EWIFO

Aufg. 42

a) $H_0: \beta_2 = \beta_3$

b) Schreibe dazu $\Theta_2 = \beta_2 - \beta_3$ und setze ins Modell ein:

$$\ln(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \Theta_2 exper + \beta_3 (exper + tenure) + \varepsilon$$

↳ R-Projekt benutzen, um Schätzgleichung zu erhalten und 95% Konfidenzintervalle für Θ_2 zu erhalten

↳ Konfidenzintervall ergibt sich zu $-0{,}0072$ bis $0{,}0112$.

⇒ Da Null enthalten ist, ist Θ_2 nicht signifikant von Null verschieden auf dem 5% Niveau.

⇒ H_0 kann abgelehnt werden

Aufg. 43

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i - \bar{x} y_i - x_i \bar{y} + \bar{x}\bar{y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \bar{x} y_i) + \sum_{i=1}^{n} -x_i \bar{y} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}\bar{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i + \bar{x}\bar{y} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{= n}$$

$$\Downarrow (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i - \bar{y} \cdot n \cdot \bar{x} + \bar{x}\bar{y} \cdot n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) y_i$$

$(*)$ $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\Leftrightarrow \sum x_i = n \cdot \bar{x}$

$\Rightarrow$ analog gilt die Rechenregel:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot x_i$$

Aufg. 44

1. Teil:

$$\hat{\beta}_1 := \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$ (Rechenregel Aufg. 43)

$$= \frac{\sum(x_i-\bar{x})(\beta_0+\beta_1\cdot x_i+\varepsilon_i)}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$ (Regressionsgerade eingesetzt)

$$= \frac{\sum(x_i\beta_0-\bar{x}\beta_0+\beta_1\cdot x_i^2-\beta_1 x_i\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} + \frac{\sum(x_i-\bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\beta_0\sum x_i-\beta_0\sum\bar{x}+\sum(\beta_1 x_i^2-\beta_1 x_i\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sum(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$ ($\leftarrow$ Rechenregel Aufg 43)

$$= \text{—''—} + \frac{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\beta_0\cdot n\cdot\bar{x}-\beta_0\cdot n\cdot\bar{x}+\beta_1\sum(x_i-\bar{x})x_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2} + \frac{\widehat{\mathrm{cov}}(X,\varepsilon)}{\hat{\sigma}_x^{\,2}}$$

$$= \beta_1 + \underbrace{\frac{\hat{cov}(X,\varepsilon)}{\hat{\sigma}_x^2}}_{\text{Term der Verzerrung}}$$

2. Teil: Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitslimit

$\text{plim}\ \hat{\beta}_1$ und nehmen an, dass $\hat{\sigma}_x^2 = Var(x) \neq 0$

also: $\text{plim}\ \hat{\beta}_1 = \text{plim}\left(\beta_1 + \frac{\hat{cov}(X,\varepsilon)}{\hat{\sigma}_x^2}\right)$

$$= \text{plim}(\beta_1) + \frac{\text{plim}\ \hat{cov}(X,\varepsilon)}{\text{plim}\ \hat{\sigma}_x^2}$$ (Rechenregel Blatt)

$$= \beta_1 + \underbrace{\frac{cov(x,\varepsilon)}{\hat{\sigma}_x^2}}_{\substack{\text{nach Annahme 3} \\ = 0}}$$ Gesetz der großen Zahlen

$= \beta_1$

$\Rightarrow$ Konsistenz für $\hat{\beta}_1$ beweisen

$\text{plim}\ X_n = C$ bedeutet

$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - C| > \varepsilon) = 0$

d.h. z.B.

$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - E[X]\right| > \varepsilon\right) = 0$

also Mittelwert konvergiert für große Stichproben gegen den Erwartungswert

b) Die asymptotische Verzerrung ($\approx$ Inkonsistenz) von β_1 ist also: $\text{plim}\,\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \frac{cov(X,\varepsilon)}{\hat{\sigma}_x^2}$

Da $\sigma_x^2 > 0$ gilt:

- wenn X, ε positiv korreliert sind
  $\Rightarrow cov(x,\varepsilon) > 0 \Rightarrow$ positive Inkonsistenz von β_1 bzw eine Verzerrung nach oben
- wenn X, ε negativ korreliert sind
  $\Rightarrow cov(x,\varepsilon) < 0 \Rightarrow$ negativ.... Verzerrung nach unten.

- wenn $cov(x,\varepsilon) << \sigma_x^2$
  $\Rightarrow$ Inkonsistenz von β_1 vernachlässigbar.

[Problem: $cov(X,\varepsilon)$ kann nicht geschätzt werden, da ε nicht beobachtet werden kann.]

Aufg. 45

laut Aufg. sind Annahmen 1-3 erfüllt:

$\Rightarrow E[v) = 0$ v ist mit x_1 und x_2 nicht korreliert!

- $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ seien die OLS-Schätzer, die konsistent sind
- durch Weglassen von $x_2 \Rightarrow \varepsilon = \beta_2 x_2 + v$
- analog zu Aufg. 44b:

$$\text{plim}\,\tilde{\beta}_1 = \dots$$

$$= \beta_1 + \frac{cov(x_1, \varepsilon)}{\sigma_{x_1}^2}$$

$$= \beta_1 + \frac{cov(x_1, \beta_2 x_2 + v)}{\sigma_{x_1}^2}$$

Rechengesetze für cov:

① $cov(x, y+a) = cov(x, y)$

② $cov(b \cdot x, y) = b\,cov(x, y)$

$$= \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{cov(x_1, x_2)}{\sigma^2_{x_1}}$$

=> Inkonsistenz und die asymptotische Verzerrung praktisch „gleich".
Unterschied liegt darin, dass wir einmal den Zusammenhang in der Grundgesamtheit und einmal den Zusammenhang in der Stichprobe betrachtet haben.

Sind x_1 und x_2 in der Grundgesamtheit unkorreliert, so ist auch $\frac{\beta_2 \cdot cov(x_1, x_2)}{\sigma^2_{x_1}} = 0$,

womit $\hat{\beta}_1$ ein konsistenter Schätzer für β_1 ist.

-> Tabelle:

	$corr(x_1, x_2) > 0$	$corr(x_1, x_2) < 0$
$\beta_2 > 0$	pos. Inkonsistenz	neg. Inkonsistenz
$\beta_2 < 0$	neg. –"–	pos. –"–

wenn $cov(x_1, x_2) << \sigma^2_{x_1}$

=> Inkonsistenz vernachlässigbar

Aufg. 46

Nein, cigs ist nicht annähernd normalverteilt

① Die meisten Leute rauchen nicht

=> für mehr als die Hälfte der Bevölkerung ist cigs = 0

$(P(cigs = 0) > 0)$

Aber: Eine normalverteilte Zufallsvariable nimmt aber keinen Wert mit einer pos. W'keit an

② Die Verteilung von cigs ist schief, während normalverteilte ZV symmetrisch um den Mittelwert ~~ist~~ liegt.

Aufg. 47

höhere Risikobereitschaft => höhere Bereitschaft in Aktien zu investieren => $\beta_2 > 0$

laut Voraussetzung: $Corr(funds, risktol) > 0$

mit der Tabelle von Aufg. 44b:

$$\Rightarrow \frac{COV(funds, risktol)}{\sigma^2_{funds}} > 0$$

also ist die asymptotische Verzerrung (bzw. Inkonsistenz) positiv!

Macht dies Sinn? Ja!

Wenn wir risktol aus der Regression herausnehmen und diese positiv korreliert ist, dann wird ein Teil des für funds geschätzten Effektes durch den Effekt von risktol verursacht.

Aufg 48

Es ist: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$

Bilde dazu den Erwartungswert:

$$E[y] = \beta_0 + \beta_1 \cdot E[x_1] + \underbrace{E[\varepsilon]}_{=0}$$

$$= \beta_0 + \beta_1 \cdot E[x_1]$$

Außerdem gilt:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1$$, (denn der Mittelwert liegt auf der Regressionsgeraden)

Bilde nun W'keitslimit auf beiden Seiten:

$$\text{plim}(\hat{\beta}_0) = \text{plim}(\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1)$$

$$= \text{plim}(\bar{y}) - \text{plim}(\hat{\beta}_1) \cdot \text{plim}(\bar{x}_1)$$

$$= E[y] - \hat{\beta}_1 \cdot E[x_1]$$

($n \to \infty$: $\bar{x}_1$ konvergiert gegen $E[x_1]$
$\bar{y}$ " " $E[y]$)