

# WiSe Übung 3

## Aufg 1

a)  $y = x \cdot \beta + \epsilon$  in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \end{pmatrix}$$

$$b) X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 36 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{80} \cdot \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X'y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 84 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} X'y = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 36 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = b_{OLS}$$

c)  $\underbrace{X(X'X)^{-1} X'y}_{b_{OLS}} = X \cdot b_{OLS} = \hat{y} = \text{geschätzte Werte für } y$   
 $= \text{fitted values}$

hier:  $\hat{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/2 \\ 15/2 \\ 15/2 \\ 9 \end{pmatrix} = \text{Projektion}$

$$(I_5 - X(X'X)^{-1} X')y = y - X \cdot b_{OLS} = y - \hat{y} = e$$

Residuum = geschätzter Fehlerterm

hier:  $e = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ 4.5 \\ 7.5 \\ 7.5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left| \sum = 0 \right.$

$$\underbrace{y'(I_5 - X(X'X)^{-1} X')}_{\substack{(y-\hat{y}) \\ \cdot e}} y = y' \cdot e \quad y = \hat{y} + e$$
$$= (\hat{y} + e)' \cdot e$$
$$= \underbrace{\hat{y}' \cdot e}_{=0, \text{ da } \hat{y} \perp e} + e'e$$

$$= e'e = \sum_{i=1}^n e_i^2 = (\min) \text{ Fehlerquadratsumme}$$

$$\text{hier: } y'e = (2 \ 4 \ 8 \ 6 \ 10) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Aufg 19

$$p'p \stackrel{!}{=} p$$

$$p'p = (X(X'X)^{-1}X')' \cdot (X(X'X)^{-1}X')$$

$$= (X')'(X(X'X)^{-1})' \cdot (X(X'X)^{-1})X' \quad | \quad (A')' = A$$

$$= X((X'X)^{-1})' \cdot \underbrace{X' \cdot X(X'X)^{-1}X'}_{\mathbb{I}} \quad | \quad (AB)' = B'A'$$

$$= X(X'(X'X)^{-1})' \cdot X' \quad | \quad (A')' = A$$

$$= \underbrace{X(X'X)^{-1}X'}_{= p}$$

Aufg 20

Modell in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{pmatrix}$$

nun Schrittweise zum OLS-Schätzer:  $(X'X)^{-1}X'y$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 15 & -5 \\ 8 & -5 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 1 & 15 & -5 \\ 8 & -5 & 30 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{630} \begin{pmatrix} 425 & -70 & -125 \\ -70 & 56 & 28 \\ -125 & 28 & 59 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{95}{126} & -\frac{1}{9} & -\frac{25}{126} \\ -\frac{1}{9} & \frac{4}{45} & \frac{2}{45} \\ -\frac{25}{126} & \frac{2}{45} & \frac{59}{630} \end{pmatrix}$$

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} X'Y = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} 365 \\ 182 \\ 241 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73/42 \\ 13/15 \\ 241/210 \end{pmatrix} = \text{bols}$$

### Aufg 21

a)  $E[\bar{X}_4] = \mu \rightarrow \text{siehe Aufg 22}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_4) &= \text{Var}\left(\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \quad |\text{Ü1 Hinweis}| \\ &= \frac{1}{16} (\text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + \text{Var}(X_4)) \\ &= \frac{1}{16} (\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{4} \end{aligned}$$

b)  $E[Y] = \mu$

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{1}{8}X_1 + \frac{1}{8}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{2}X_4\right] \\ &= E\left[\frac{1}{8}X_1\right] + E\left[\frac{1}{8}X_2\right] + E\left[\frac{1}{4}X_3\right] + E\left[\frac{1}{2}X_4\right] \\ &= \frac{1}{8}E[X_1] + \frac{1}{8}E[X_2] + \frac{1}{4}E[X_3] + \frac{1}{2}E[X_4] \end{aligned}$$

$X_i$  ident. verteilt  $\Rightarrow \frac{1}{8}\mu + \frac{1}{8}\mu + \frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\mu = \mu$

~~$\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{1}{8}X_1 + \frac{1}{8}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{2}X_4\right)$~~

C.5.18 (Kramer)

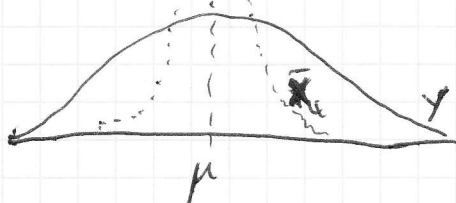
$$= \text{Var}\left(\frac{1}{8}X_1\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{8}X_2\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{4}X_3\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{2}X_4\right)$$

da  $X_i$  stoch. unabh.

$$= \frac{1}{64}\sigma^2 + \frac{1}{64}\sigma^2 + \frac{1}{16}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{11}{32}\sigma^2$$

c) Vorzug:  $\bar{X}_4$  oder  $Y$ ?

$\bar{X}_4$  und  $Y$  sind beide erwartungstreu  $\Rightarrow$  Erwartungstreue  
kein Auswahlkriterium  
 $\bar{X}_4$  hat eine kleinere Varianz, daher ist diese dem Schätzer  $Y$   
vorzuziehen



# Aufg 22

a)  $E[\bar{X}_n] = \mu$

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right]$$

$$= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] \quad \text{ü1, Hinweis}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[x_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu \quad \begin{array}{l} x_i \text{ identisch} \\ \text{verteilt} \end{array}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

b)  $E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2?$

dazu 2 Nebenrechnungen:

i)  $\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \quad \begin{array}{l} \text{ü1, Hinweis} \\ x_i \text{ stoch. unabh.} \end{array}$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

ii)  $\text{Var}(\bar{X}_n) = E[\bar{X}_n^2] - (E[\bar{X}_n])^2$   
 $= E[\bar{X}_n^2] - \mu^2$

i & ii  $\Rightarrow E[\bar{X}_n^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

NR II:

i)  $\text{Var}(x_i) = E[x_i^2] - (E[x_i])^2$   
 $= E[x_i^2] - \mu^2$

$$\Rightarrow E[x_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

ii)  $E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] = \sum_{i=1}^n E[x_i^2] = \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) = n(\sigma^2 + \mu^2)$

# Wifo Übung 3

Hauptrechnung

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\sigma}^2] &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2\right] \\
 &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x}_n + \bar{x}_n^2)\right] \\
 &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i \bar{x}_n + \sum_{i=1}^n \bar{x}_n^2\right] \\
 &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x}_n \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n \cdot \bar{x}_n} + \sum_{i=1}^n \bar{x}_n^2\right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( \underbrace{E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right]}_{NR II i} - 2n E[\bar{x}_n^2] + E\left[\sum_{i=1}^n \bar{x}_n^2\right] \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( n(\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \underbrace{E[\bar{x}_n^2]}_{NR I i} \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( n(\sigma^2 + \mu^2) - n \left( \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right) \\
 &= \frac{n}{n-1} \left( \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \right) = \sigma^2, \text{ erwartungstreu}
 \end{aligned}$$

c)  $E[x_i] = \mu$ , erwartungstreu s.o.

d)  $\text{Var}(\bar{x}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$  (NR I i)

e)  $\text{Var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{1} = \sigma^2$

f)  $\bar{x}_n$  und  $x_i$  sind beide erwartungstreue Schätzer für  $\mu$ .

$\text{Var}(\bar{x}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$  für jedes beliebige  $n \in \mathbb{N}$

$n \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Var}(\bar{x}_n) = 0$

Informationsgüte wird sich mit zunehmendem Stichprobenumfang verbessern (weniger Streuung)

Nachteil: kostenintensiver & Berechnung ist aufwändiger

$\text{Var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{1} = \sigma^2 = \text{const}$

bei größer werdendem Stichprobenumfang verbessert sich die Informationsgüte nicht!

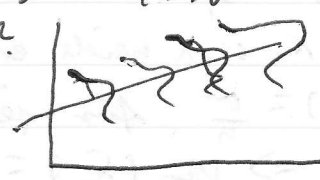
Nachteil: ungenauer

Vorteil: günstiger, einfacher zu berechnen

### Aufg 23

$$\begin{aligned}b_{OLS} &= (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) \\&= \underbrace{(X'X)^{-1}X'X}_{I}\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\&= \beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon \\E[b_{OLS} | \varepsilon] &= E[\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon | X] \\&= E[\beta | X] + E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon | X] \\&= \beta + (X'X)^{-1}X' \cdot \underbrace{E[\varepsilon | X]}_{= 0 \text{ Annahme 3}} \\&= \beta\end{aligned}$$

### Aufg 24

- a)  $\hat{\beta}_1 = 0,0780$   $\sqrt{SE^2}$ . Wir erwarten ein pö. Vorzeichen, da Bildungsinvestitionen eine positive Rendite haben.
- b) Ja, es ist ein lineares Modell, da die  $\beta$ -Koeff. linear sind.
- c) vgl. ÜB 1 Aufg. 11  
Änderung von  $\ln w$  um 2 Jahre bedeutet eine relative Änderung von  $w$  um  $100 \cdot \hat{\beta}_1 \cdot 2 \ln w \%$   
also hier  $100 \cdot 0,0780 \cdot 2 \% = 15,6\%$
- d) Homoskedastizität verletzt? 
- Ja, da davon auszugehen ist, dass Akademiker mehr Möglichkeiten in der Jobwahl haben und somit eine größere Varianz im Lohn wahrscheinlich ist.

## Aufg 24

d)

weitere Faktoren können sein:

Sozioökonomischer Hintergrund, Einkommen, ...  
Faktor vergessen und mit  
ist dies der Fall (oder Korrelation oder besteht ein anderer  
funktionale Zusammenhang)

$\Rightarrow$  Verzerrung des OLS-Schätzers

f)  $\beta_4 > 0 \Rightarrow$  Diskriminierung?

zum Einen müssten die oben genannten Faktoren kontrolliert  
werden, zum Anderen muss im Datensatz umgeschrieben  
werden nach

- erlernter Beruf
- Größe des Unternehmens (Arbeitgeber)
- Voll-/Teilzeit

Selbst wenn all dies beachtet wird, bleiben noch 23 %  
der Lohnunterschiede unerklärbar ( $\rightarrow$  Forschung notwendig!)

$\Rightarrow$  keine direkte Aussage zur Diskriminierung!