WiFo Übung 1

Aufg 1

a) ~~Erwartungswert~~ Spiel aus Sicht des Publikums, nur dann fair wenn $E(X) = 0$

Tatsächlich

$$E(X) = \frac{1}{36}(-1000) + \frac{35}{36} \cdot 100 = 69,\overline{4}$$

$\Rightarrow$ nicht fair

Wette annehmen?

$\Rightarrow$ abh. von Risikoeinstellung des jeweiligen Zuschauers

- risikoneutraler Zuschauer hat eine lineare Nutzenfunktion u mit $u(X) = a \cdot X$

  $$E(u(X)) = E(a \cdot X) = a \cdot \underbrace{E(X)}_{>0} \quad \text{mit } a > 0$$

  $\Rightarrow$ annehmen
- risikofreudig $\Rightarrow$ ~~annehmen~~
- risikoavers $\Rightarrow$ abhängig von jeweiliger Nutzenfunkt.

für fairen Wetteinsatz müsste $E(X) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{36}(-y) + \frac{35}{36} \cdot 100 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow y = 3500$$

b) schlechtester Fall $\Rightarrow$ kein 6er Pasch

$\Rightarrow$ Kandidat erhält:

$$6000 - 10 \cdot 100 = 5000 \text{ €}$$

bester Fall $\Rightarrow$ 6er Pasch

$\Rightarrow$ Kandidat erhält:

$$0 + 10 \cdot 1000 = 10\,000 \text{ €}$$

Fazit: Kandidat ist risikoavers, durch die Weitergabe der Wette an das Publikum erhöht er seinen Mindestgewinn (von 0 € auf 5000 €)

Aufg 2

a) $Var(aX+b) \overset{Def}{=} E[(ax+b-E[ax-b])^2]$

$\overset{Hinweis}{=} E[(aX+b-(aE(x)+b))^2]$

$= E[aX-(aE[x])^2]$

$= E[a^2(X-E[x])^2]$

$= a^2 \underbrace{E[(x-E[x])^2]}$

$= a^2 \quad Var\,X$

b) $Cov(X+Y,Z) \overset{Def}{\underset{Hinweis}{=}} E[(x+Y-E[x+y]\cdot(Z-E[z]))]$

$= E[(X-E[x]+Y-E[Y])\cdot(Z-E[z])]$

$= E[(X-E[x]\cdot(Z-E[z])$

$+ Y-E[y]\cdot(Z-E[z]))]$

$= \underbrace{E[(X-E[x])\cdot(Z-E[z])]}_{Cov(X,Z)} + \underbrace{E[(Y-E[Y])\cdot(Z-E[z])]}_{Cov(Y,Z)}$

c) X,Y stoch. unabh.

$\Rightarrow E[x]\cdot E[y] = E[x\cdot y]$

$Cov(X,y) = E[x\cdot y] - E[x]\cdot E[y] = 0$

Aufg 3

Stichprobenmittel von x: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

a) $\bar{x} = \frac{1}{11}\cdot 220 = 20$

Stichprobenvarianz von X: $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

bleibt erwartungstreu

$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{10}\cdot 440 = 44$

Stichproben kovarianz von X und Y: $\widehat{cov}(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$

b) $\widehat{cov}(X,y) = \frac{1}{10}(-568) = -56{,}8$

Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson:

$\hat{r}_{xy} = \frac{\widehat{cov}(X,Y)}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2\cdot\hat{\sigma}_y^2}}$

c) $\hat{r}_{xy} = \frac{-56{,}8}{\sqrt{44 \cdot 112}} \approx -0{,}811$

Aufg 4

$n = 36$ (monatliche Beobachtungen)

Teststatistik $V = \frac{\hat{r}_{xy} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}_{xy}^2}}$

ist t-verteilt mit $n-2$ Freiheitgraden.

Der kritische Wert mit $n-2 = 34$ Freiheitgraden und einem 2-seitigen t-Test ist ca $\underline{\underline{2{,}032}}$

$\left(\begin{array}{ll} \text{2-seitig} & \neq 0 \\ \text{1seitig} & > 0 \\ & < 0 \end{array}\right)$

$V_1 = \frac{0{,}3102 \cdot \sqrt{36-2}}{\sqrt{1-0{,}3102^2}} \approx 1{,}403 < 2{,}032$

=> nicht signifikant verschieden auf dem 5%-Niveau

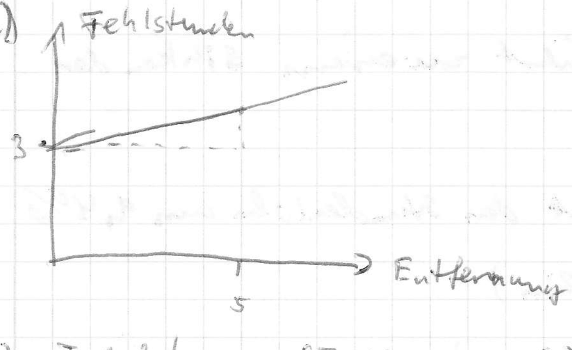
$V_2 = \frac{0{,}4156 \cdot \sqrt{36-2}}{\sqrt{1-0{,}4156^2}} \approx 2{,}664 > 2{,}032$

=> signifikant verschieden auf dem 5%-Niveau

=> Ablehnung der Hypothese

Aufg 6

a)



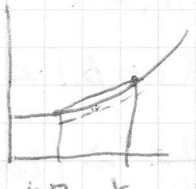
Achsenabschnitt entspricht den Fehlstunden von jemandem, der AUF dem Campus wohnt, d.h. 3h.

b) Fehlstunden (Entfernung = 5) = $3 + 0{,}2 \cdot 5 = \underline{\underline{4}}$

Aufg 9

Sei $y = f(x) = \ln x$

und sei $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$



Somit gilt für kleine Änderungen von x

$\Delta y \approx \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \Delta x$

Wir wissen $y = \ln x$

$\Rightarrow \frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \Delta y \approx \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x$

$\Rightarrow \ln(x_1) - \ln(x_0) = \frac{\Delta x}{x_0}$

Aufg 10

a) $\frac{42\,000 - 35\,000}{35\,000} = \frac{1}{5} = 20\%$

B verdient 20% mehr als A

b) $\ln(42000) - \ln(35\,000) = 0{,}182$

$\Rightarrow$ Die approximierte prozentuale Differenz liegt bei 18,2%

Aufg 11

a) Def. der Preiselastizität $\frac{\Delta y}{y_0} \cdot \frac{x_0}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}}$

$\approx \frac{\ln(y_1) - \ln(y_0)}{\ln(x_1) - \ln(x_0)}$ | $\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$

$\Rightarrow \frac{\beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(x_1) - (\beta_0 + \beta_1 \ln(x_0))}{\ln(x_1) - \ln(x_0)}$

$= \frac{\beta_1 \, (\cancel{\ln(x_1) - \ln(x_0)})}{\cancel{\ln(x_1) - \ln(x_0)}} = \beta_1$

Der 1% Anstieg im Preis führt zu einem Sinken der Nachfrage um 1,25% ($= \beta_1$)

b) Ein Jahr mehr Bildung erhöht den Stundenlohn um 9,4%

$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$ (log - lin)

$\Rightarrow \Delta \ln = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_2)$

$= \beta_1 (x_1 - x_2)$

$= \beta_1 \Delta x$ $| \cdot 100$

$100 \cdot \Delta \ln = (100\, \beta_1) \cdot \Delta x$

Approx

$\Rightarrow 100 \cdot \frac{\Delta y}{y_0} \approx (100 \cdot \beta_1) \Delta x$

$\% \Delta y \approx (100 \cdot \beta_1) \Delta x$

c) $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(x)$

$$\Rightarrow \Delta y = \beta_1 \cdot \Delta \ln(x)$$

$$\overset{\text{Approx}}{\approx} \beta_1 \cdot \frac{\Delta x}{x_0} \quad \text{(s. Aufg a)}$$

$$= \frac{\beta_1}{100} \cdot \frac{100\,\Delta x}{x_0}$$ | Trick: Multiplikation mit „1"

$$= \frac{\beta_1}{100} \cdot \%\Delta x$$

$\Rightarrow$ Eine prozentuale Änderung von x um 1% führt zu einer absoluten Änderung von y um $\frac{\beta_1}{100}$ Einheiten

Wenn der Stundenlohn um 10% steigt, so steigt die Anzahl der gearbeiteten Stunden um 4,51 h.