→ *Mathematik*

• Matrizen-Rechnung

Inverse Matrix $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Determinante $det\ A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

$det\ A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$

Rang $Rang A<n \Leftrightarrow det A=0$

• Partialbruchzerlegung

Nullstelle des Nenners	Ansatz
$(s-p)$	$G(s)=\frac{A}{s-p}$
$(s-p)^n$	$G(s)=\frac{A_1}{s-p}+\frac{A_2}{(s-p)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(s-p)^n}$
(s^2+as+b)	$G(s)=\frac{A+Bs}{s^2+as+b}$
$(s^2+as+b)^n$	$G(s)=\frac{A_1+B_1 s}{s^2+as+b}+\frac{A_2+B_2 s}{(s^2+as+b)^2}+\ldots+\frac{A_n+B_n s}{(s^2+as+b)^n}$

→ *Elektrotechnik*

• Bauteilgleichungen

Kapazität $i_C(t)=C\cdot\frac{d\,u_C(t)}{dt}$

Induktivität $u_L(t)=L\cdot\frac{d\,i_L(t)}{dt}$

→ *Kapitel 1: Einleitung*

Regelgröße	y
Störgröße	z
Führungsgröße	w
Regelabweichung	e

→ *Kapitel 2: Modellierung zeitkontinuierlicher Systeme*

System $y(t)=f[u(t),y(t)]$

Zeitinvarianz $y(t-t_0)=f[u(t-t_0),y(t-t_0)]$ (2.9)

Linearität $f(a_1 u_1+a_2 u_2)=a_1 f(u_1)+a_2 f(u_2)$ (2.10)

lineare Differentialgleichung $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots a_1\dot{y}+a_0 y=f(u)$

Taylor-Reihe $y=f(u)=f(U_0)+\left(\frac{df}{du}\right)_{u=U_0}(u-U_0)+\left(\frac{d^2f}{du^2}\right)_{u=U_0}\frac{(u-U_0)^2}{2}+\cdots$ (2.12)

Linearisierung $y=f(u)=f(U_0)+\left(\frac{df}{du}\right)_{u=U_0}(u-U_0)=Y_0+m(u-U_0)$ (2.13)

$$y=f(u_1,u_2,\ldots,u_n)=f(U_{1,0},\ldots,U_{n,0})+\sum_{n}^{k=1}\left(\frac{\partial f}{\partial u_k}\right)_{\substack{u_1=U_{1,0}\\ \vdots \\ u_n=U_{n,0}}}(u_k-U_{k,0})$$

(2.15)

→ *Kapitel 4: Beschreibung von Systemen im Frequenzbereich*

charakteristische Gleichung

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$
$$\Leftrightarrow p(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0$$ (4.6)

(Pole der Übertragungsfunktion)

- **Lösungen für die Nullstellen**
  - einfache relle Wurzel λ_k : $e^{\lambda_k t}$ (4.7)
  - Wurzel mit Vielfachheit q $e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{q-1} e^{\lambda_k t}$ (4.8)
  - konjugiert komplexes Wurzelpaar $\lambda = \sigma \pm i\omega$: $e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t}\sin(\omega t)$ (4.9)
  - mit Vielfachheit q $e^{\sigma t}\cos(\omega t), e^{\sigma t} t\cos(\omega t), \dots, e^{\sigma t} t^{q-1}\cos(\omega t)$; $e^{\sigma t}\sin(\omega t), e^{\sigma t} t\sin(\omega t), \dots, e^{\sigma t} t^{q-1}\sin(\omega t)$ (4.10)

Falls alle Nullstellen negative Realteile haben: $\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0$ (4.11)

Fourier-Transformierte der Stoßantwort: $G(s=i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(t)\,dt$ (4.25)

$G(i\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	
$(i\omega T)^N$	$N 20 log(\omega T)$	$N\pi/2$	(4.36) (4.37)
$\frac{1}{1+i\omega T}$	$-20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$	$-\arctan(\omega T)$	(4.39) (4.40)
$1+i\omega T$	$20\log\sqrt{1+(\omega T)^2}$	$\arctan(\omega T)$	(4.45) (4.46)
$\frac{1}{\left(i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}+1}$ $\zeta<1$	$-20\log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+4\zeta^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$-\arctan\left\{\frac{2\zeta\,\omega/\omega_0}{1-(\omega/\omega_0)^2}\right\}$	(4.47) (4.55)

→ ***Kapitel 5: Eigenschaften rückgekoppelter Systeme***

Tabelle 5.1 (Seite 62): Stationäre Fehler für Testsignale und Systemtypen.

aufgeschnittener Regelkreis $G_0(s) = G_1 G_2 G_3$ (5.5),(5.6)

Sprungfunktion $\omega(t) = A\cdot\epsilon(t)$; $W(s) = A/s$

Rampe $\omega(t) = B\cdot t$; $W(s) = B/s^2$

Parabel $\omega(t) = 0{,}5\, C\cdot T^2$; $W(s) = C/s^3$

stationärer Fehler $e(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} W(s)\, s\, \frac{1}{1+G_0}$ (5.51)

Systemtyp N $G_0(s) = K\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-z_k)}{s^N\prod_{n=1}^{Q}(s-p_n)}$ $mit\quad M \leqslant N+Q$ (5.53)

- **System 2. Ordnung**

<u>Transformationstabelle! Auch nächstes und übernächstes Kapitel beachten!</u>

Abbildung 5.15 (Seite 66): Definition der Parameter
Abbildung 5.16 (Seite 68): Parameter in Abhängigkeit von ζ.
Abbildung 5.18 (Seite 71): Gütekriterium für Systeme 2. Ordnung für $\omega_0 = 1$
Abbildung 11.9 (Seite 185): Pole

Differentialgleichung $\omega(t) = y(t) + a\frac{dy(t)}{dt} + b\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ (5.55)

Sprungantwort $\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1/b}{s^2+\frac{a}{b}s+1/b}$ (5.56)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} \quad (5.57)$$

$$y(t) = 1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t+\Phi\right)\ ;\ \cos\Phi=\zeta\ ;\ \zeta<1 \quad (5.60)$$

Eigenfrequenz (ungedämpft) $\omega_0 = 1/\sqrt{b}$

Dämpfungsgrad $\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$

Pole $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm\sqrt{(\zeta\omega_0)^2-\omega_0^2} = -\zeta\omega_0\pm\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$ (5.58)

$$p_{1,2}=-\zeta\,\omega_0 \pm \begin{cases} i\,\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} & \zeta<1 \quad \textit{unterkritische Dämpfung} \\ 0 & \zeta=1 \quad \textit{kritische Dämpfung} \\ \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} & \zeta>1 \quad \textit{überkritische Dämpfung} \end{cases}$$

Rückkopplung $G(s)=\dfrac{\omega_0^2}{s(s+2\zeta\,\omega_0)}$ (5.59)

Einstellzeit $T_s \simeq \dfrac{3}{\zeta\,\omega_0} \quad mit \quad \delta=0{,}05 \quad und \quad \zeta\le 0{,}7$ (5.64) (6.20)

Überschwingzeit $T_p=\dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$ (5.67)

Maximales Überschwingen $M_p=e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ (relativ zum stationären Endwert) (5.68)

Anstiegszeit $T_r=\dfrac{1}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\pi-\arccos(\zeta)\right] \quad mit \quad \zeta<1$ (5.69)

Güte-Index $I=\int_0^\infty t^k F[e(t)]\,dt$ (5.77)

ISE-Kriterium $\int_0^\infty e^2(t)\,dt$ (5.78)

IAE-Kriterium $\int_0^\infty |e(t)|\,dt$ (5.79)

ITAE-Kriterium $\int_0^\infty t\,|e(t)|\,dt$ (5.80)

→ *Kapitel 6: Stabilität von linearen Systemen*

Stabilitätskriterium im Zeitbereich $\int_0^t |g(\tau)|\,d\tau < M_g \quad \textit{für alle } t \quad M_g \ \textit{: endliche Zahl}$ (6.1)

Dämpfungsgrad als Kriterium $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ (6.21)

Phasenrand $\varphi_R=\arctan\left(\dfrac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{4\zeta^4+1}}}\right)$ (6.63)

$\zeta\simeq 0{,}01\,\varphi_R \quad mit \quad \varphi_R\, \textit{in Grad und}\ 0^0\le\varphi_R\le 70^0$ (dominantes Polpaar) (6.65)

→ *Kapitel 7: Entwurf von Regelkreisen nach dem Frequenzlinienverfahren*

Dimensionierung:

idealer PI-Regler Seite 105
realer PI-Regler Seite 110
realer PD-Regler Seite 116
PID-Regler Seite 120

Standardregelkreis $Y(s)=\dfrac{G_0(s)}{1+G_0(s)}W(s)+\dfrac{G(s)}{1+G_0(s)}Z(s) \quad mit\ G_0(s)=G_K(s)\,G(s)$ (7.2)

Für stationäre Genauigkeit $|G_0(0)|\gg 1$ (7.2)

- **Synthese von Reglern**

Übertragungsfunktion $G(s)=\dfrac{K_s}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots(1+sT_n)}$ (7.11)

PI-Regler

Bodediagramm: Seite 109, Abb. 7.9

Forderung (stationäres Verhalten) $W(s)=1/s \Rightarrow e(\infty)=0$ (7.12)

idealer PI-Regler $G_K(s)=\dfrac{K_R}{s}(1+s\tau) \quad mit \quad \tau=T_1$ (7.16)

nicht-idealer (realer) PI-Regler $G_K(s)=K_R\dfrac{(1+\tau s)}{(1+\alpha\tau s)} \quad mit \quad \alpha>1$ (7.29)

$$G_K(s) \simeq \frac{K_R}{\alpha\tau}\frac{1+\tau s}{s} \quad (7.30)$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+G_K(0)G(0)} > 0 \quad \textit{für} \quad W(s)=1/2 \ , \ |G(0)| < \infty \quad (7.32)$$

PD-Regler

Bodediagramm: Seite 115, Abb. 7.12

idealer PD-Regler $G_K(s) = K_R(1+Ts)$ (7.44)

nicht-idealer (realer) PD-Regler $G_K(s) = K_R \frac{1+\alpha T s}{1+T s}; \quad \alpha > 1$ (7.47)

Mittenfrequenz $\omega_{Mitte} = \sqrt{zp} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ (max. Phasenvoreilung) (7.48)

Phasenvoreilung $\varphi_{add} = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ (Abb. 7.13)

PID-Regler

Bodediagramm: Seite 119, Abb. 7.16

nicht-idealer (realer) PID-Regler $G_K(s) = \frac{K_R}{s}(1+T_1 s)\left(\frac{1+\alpha T_2 s}{1+T_2 s}\right) \quad mit \quad \alpha > 1, T_1 > \alpha T_2$ (7.56)

stationärer Fehler $e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_R G(s)/s}$ (7.57)

idealer PID-Regler $G_R(s) = K_R\left[1+\frac{1}{sT_I}+sT_D\right]$ (11.6)

→ *Kapitel 9: Mehrgrößen-Regelungen*

Abbildung: Seite 147, Abb. 9.4

Ausgangsgrößen (Regelgrößen) $Y = [Y_1 Y_2] = GU = [I+GR]^{-1} GRW$ (9.10)

Eingangsgrößen (Führungsgrößen) $W = [W_1 W_2]$ (9.10)

Stellgrößen $U = [U_1 U_2]$ (9.10)

Regler $R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$ (9.11)

Stellgrößen $U = R[W-Y]$ (9.11)

Teilstrecken $G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ (9.11)

ungekoppelt $G_{12} = G_{21} = 0$

einseitig gekoppelt $G_{12} = 0$

Entkopplungsregler $K_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}}$ und $K_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}}$

→ *Kapitel 10: Lineare zeitdiskrete Systeme*

Quantisierungsfehler $e_Q(k) = y(k) - y_Q(k)$ (10.1)

bei Rundung: $-\frac{Q}{2} \leqslant e_Q(k) \leqslant \frac{Q}{2}$ (10.2)

D/A-Umsetzer $u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t-kT)$ (10.3)

Stoßantwort (D/A-Umsetzer) $\bar{g}(m) = \begin{cases} L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\Big|_{t=mT} & \textit{für } m=0 \\ L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s}e^{-sT}\right\}\Big|_{t=mT} & \textit{für } m \geqslant 1 \end{cases}$ (10.20)

Diracfunktion $\Delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & sonst \end{cases}$ (10.30)

Differenzengleichung $y(k+m) + a_{m-1}y(k+m-1) + \ldots + a_0 y(k) = b_n u(k+n) + \ldots + b_0 u(k)$ (10.36)

Verzögerungselement $u(k-1) = z^{-1}[u(k)]$

z-Transformation $u^*(t) \;\rightarrow\; U^*(s)=U(z)\big|_{z=e^{sT}}$ (10.53)

diskrete Faltung $y(k)=\sum_{m=0}^{\infty} u(m)\,g(k-m) \;\rightarrow\; Y(z)=U(z)G(z)$ (10.55)

→ *Kapitel 11: Analyse von Abtastsystemen*

Kennwerte (11.37) bis (11.39)

relative Stabilität Abb. 11.9 (Seite 185)

$y(k-n)\Leftrightarrow z^{-n}y$

Differentialquotient $\left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=kT} \simeq \frac{e(k)-e(k-1)}{T}$ (11.9)

Integral $\int_{t=kT}^{0} e(\tau)\,d\tau \simeq T\sum_{i=0}^{k-1} e(i)$ (11.10)

digitaler PID-Regler $G_R(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{q_0+q_1 z^{-1}+q_2 z^{-2}}{1-z^{-1}}=\frac{q_2+q_1 z+q_0 z^2}{z(z-1)}$ (11.14)

$q_0=K_R\left(1+\frac{T_D}{T}\right)$

$q_1=-K_R\left(1+2\frac{T_D}{T}+\frac{T}{T_I}\right)$

$q_2=K_R\frac{T_D}{T}$ (11.13)

digitaler PI-Regler $T_D=0$

Stabilitätskriterium I $\sum_{k=0}^{\infty}|g(k)|<\infty$ (11.42)

Stabilitätskriterium II $G(z)=\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k z}{(z-c_k)}+\sum_{k=1}^{N_2}\left[\frac{B_k z}{z-d_k}+\frac{B_k^* z}{z-d_k^*}\right]+\sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$ (11.43)

$|z|=|c_k|<1$ (11.46)

$|z|=|d_k|<1$ (11.49)

→ *Kapitel 12: Zeitdiskrete Signale und Systeme*

Frequenzgang $z=e^{i\omega T}$ (12.5)

Periodizität $z=e^{i(\omega T+2\pi n)}=e^{i\omega T}$ (12.7)

Fourier-Transformation $x(kT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(e^{i\omega T})e^{+i\omega kT}\,d\omega$ (12.10)

$X(e^{i\omega T})=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-i\omega kT}$ (12.10)

Spektrum $X_z(z=e^{i\omega T})=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(\omega-\frac{2\pi m}{T}\right)$ (12.18)

$X(\omega)=\begin{cases} T\cdot X_z(z=e^{i\omega T}) & -\pi/T<\omega\leqslant+\pi/T \\ 0 & sonst \end{cases}$ (12.20)

Basisband $\pi/T<\omega\leqslant+\pi/T$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) $\hat{X}_N(n\Delta\omega)=\sum_{k=0}^{N-1} x(kT)e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad 0\leqslant n\leqslant N-1$ (12.26)

Inverse DFT (IDFT) $x(kT)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{X}_N(n\Delta\omega)e+i\frac{2\pi}{N}nk \quad 0\leqslant k\leqslant N-1$ (12.27)

- **D/A-Umsetzer**

Interpolation $y(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(mT)\,p(t-mT) \;\; mit \;\; p(t) \;\; Interpolationsfunktion$ (12.30)

idealer Interpolator $p(t)=si(2\pi Bt)$ (idealer Tiefpass)

Überabtastung $\frac{1}{T}>2\mathrm{B}$ (12.40) realer Interpolator $$P_1(\omega)=\begin{cases} T=P(\omega) & für\,|\omega|<2\pi B \\ beliebig & für\,2\pi B\leqslant|\omega|<2\pi(\frac{1}{T}-B) \\ 0 & für\,|\omega|\geqslant 2\pi(\frac{1}{T}-B)\end{cases} \quad (12.41)$$

Raised Cosine Filter $$P_{1,RC}(\omega)=\begin{cases} T & für\,0\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi(1-\beta)/2\mathrm{T} \\ \frac{T}{2}\left[1-\sin\left[\frac{T(\omega-\frac{2\pi}{2\mathrm{T}})}{2\beta}\right]\right] & für\,2\pi(1-\beta)/2\mathrm{T}\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi(1+\beta)/2\mathrm{T} \\ 0 & sonst\end{cases}$$

(12.43)

$$p_{1,RC}(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\cdot\frac{\cos(\beta\pi t/T)}{1-4\beta^2t^2/T^2} \quad (12.44)$$

sin(x)/x-Interpolation $$u(t=kT')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u(mT)\frac{\sin 2\pi B(kT'-mT)}{2\pi B(kT'-mT)} \quad (12.45)$$

(zeitdiskrete Interpolation → Überabtastung)

Halteglied 0. Ordnung $$P_0(\omega)=\frac{1}{i\omega}\left[1-e^{-i\omega T}\right] \quad (12.46)$$

→ *Kapitel 13: Wahrscheinlichkeitsrechnung*

IMMER ERST EINMAL ALLES BEKANNTE EINSETZEN!

$$p(A|B)=\frac{p(A,B)}{p(B)} \qquad p(A)=p(A,B)+p(A,\overline{B}) \qquad p(A|B)=1-p(\overline{A}|B)$$

$$p_{z|x}=\frac{p_y(y(z))}{\left|\frac{dz}{dy}\right|} \qquad p_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{x,y}(x,y)\,dx$$

Wahrscheinlichkeit $$P(t_0\leqslant t\leqslant t_1)=\int_{t_0}^{t_1}p_t(x)\,dx \quad (13.2)$$

Erwartungswert $$E_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p_x(x)\,dx \quad \text{(erstes Moment)} \quad (13.3)$$

$$E_x(\underline{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{x}\,p_{\underline{x}}(\underline{x})\,d\,x_1\cdots d\,x_n \quad (13.7)$$

$$E_{x|y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p_{x|y}(x)\,dx \quad (13.13)$$

Zweites Moment $$E_x(\underline{xx}^T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{xx}^T\,p_{\underline{x}}(\underline{x})\,d\,x_1\cdots d\,x_n \quad (13.8)$$

Höhere Momente $$E_x(x^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,p_x(x)\,dx \quad (13.4)$$

Varianz $$Var_x(x)=E_x(x^2)-(E_x(x))^2 \quad (13.5)$$

$$Var(\underline{x})=E(\underline{xx}^T)-E_{\underline{x}}(\underline{x})E_{\underline{x}}(\underline{x})^T \quad (13.11)$$

$$Var_{x|y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E_{x|y}(x))(x-E_{xy}(x))^T\,p_{x|y}(x)\,dx \quad (13.15)$$

Kovarianz $$V_{ij}=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x_i-E(x_i)\right]\left[x_j-E(x_j)\right]p_{\underline{x}}(\underline{x})\,dx_1\cdots dx_n \quad (13.11)$$

Bayes Regel $$p(x|y)=\frac{p(x,y)}{p(y)} \quad (13.12)$$

Unabhängigkeit $$p_x(x)\cdot p_y(y)=p_{x,y}(x,y) \qquad p_{x|y}(x|y)=p_x(x)$$

Gauß-/Normalverteilung $$p_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{13.16}$$

$$E_x(x)=m_x \tag{13.17}$$

$$Var_x(x)=\sigma^2 \tag{13.18}$$

Q-Funktion $$t=\frac{x-m_x}{\sigma} \tag{13.19}$$

$$Q(0)=\frac{1}{2}\quad und\quad Q(-x)=1-Q(x) \tag{13.21}$$

$$P_{N(0,1)}[t_0\leqslant t\leqslant t_1]=Q(t_0)-Q(t_1) \tag{13.22}$$

normierter Korrelationskoeffizient $$\rho=\frac{\sigma_{1,2}^2}{\sigma_1\sigma_2} \tag{13.29}$$

→ *Kapitel 14: Algebraische Methoden für zeitdiskrete Systeme*

V-Transformation $$V^k\Leftrightarrow\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k},1,0,\ldots\} \tag{14.17}$$

$$V^0=\underline{1} \tag{14.8}$$

Rechtsverschiebung $$F_{-k}=V^k F \tag{14.27}$$

Linksverschiebung $$F_{+k}=V^{-k}-\left[f(0)V^{-k}+f(1)V^{-(k-1)}+\cdots+f(k-1)V^{-1}\right] \tag{14.31}$$

allgemeines Element $$F=\frac{B}{A}=\frac{b_0\underline{1}+b_1V+b_2V^2+\cdots+b_nV^n+\cdots}{a_0\underline{1}+a_1V+a_2V^2+\cdots+a_mV^m+\cdots} \tag{14.32}$$

Rücktransformation $$f_0\underline{1}+f_1V+f_2V^2+\cdots=\frac{b_0\underline{1}+b_1V+b_2V^2+\cdots}{a_0\underline{1}+a_1V+a_2V^2+\cdots} \tag{14.35}$$

Partialbruchzerlegung $$F=\sum_{i=0}^{n-m}C_iV^i+\sum_{j=0}^{m}r_j\frac{1}{\underline{1}-p_jV} \tag{14.44}$$

$$C_iV^i\Leftrightarrow\{0,0,\ldots,C_i,0,\ldots\} \tag{14.45}$$

$$\frac{1}{\underline{1}-p_jV}\Leftrightarrow\{1,p_j,p_j^2,p_j^3,\ldots\} \tag{14.46}$$

Schieberegister $$G(V)=\frac{1}{P(V)}=\frac{V^n}{\underline{1}-a_{n-1}V-\cdots-a_0V^n} \tag{14.63}$$

Maximalperiodizität *Nennerpolynom ist irreduzibel und primitiv.*

- **Primitive und irreduzible Polynome im GF(2)**

V^2+1; V^2+V+1; V^3+V+1; V^3+V^2+1; V^4+V+1; V^4+V^3+1; V^5+V^2+1; $V^5+V^4+V^3+V^2+1$;
$V^5+V^4+V^2+V+1$; $V^5+V^3+V^2+V+1$; $V^5+V^4+V^3+V+1$; V^5+V^3+1; V^6+V+1; $V^6+V^5+V^2+V+1$;
$V^6+V^5+V^3+V^2+1$; $V^6+V^4+V^3+V+1$; $V^6+V^5+V^4+V+1$; V^6+V^5+1; V^7+V+1; $V^7+V^5+V^3+V+1$;
$V^7+V^3+V^2+V+1$; $V^7+V^6+V^5+V^4+V^3+V^2+1$; $V^7+V^5+V^4+V^3+1$; V^7+V^3+1; $V^7+V^6+V^5+V^2+1$;
$V^7+V^5+V^4+V^3+V^2+V+1$; $V^7+V^6+V^5+V^3+V^2+V+1$; $V^7+V^6+V^3+V+1$; $V^7+V^5+V^2+V+1$;
$V^7+V^6+V^5+V^4+V^2+V+1$; V^7+V^4+1; $V^7+V^6+V^4+V^2+1$; $V^7+V^6+V^4+V+1$; $V^7+V^6+V^5+V^4+1$;
$V^7+V^4+V^3+V^2+1$; V^7+V^6+1; $V^8+V^4+V^3+V^2+1$; $V^8+V^6+V^5+V^3+1$; $V^8+V^7+V^6+V^5+V^2+V+1$;
$V^8+V^5+V^3+V+1$; $V^8+V^6+V^5+V^2+1$; $V^8+V^6+V^5+V+1$; $V^8+V^7+V^3+V^2+1$; $V^8+V^5+V^3+V^2+1$;
$V^8+V^6+V^4+V^3+V^2+V+1$; $V^8+V^7+V^6+V+1$; $V^8+V^7+V^5+V^3+1$; $V^8+V^7+V^2+V+1$;
$V^8+V^6+V^3+V^2+1$; $V^8+V^7+V^6+V^3+V^2+V+1$; $V^8+V^7+V^6+V^5+V^4+V^2+1$; $V^8+V^6+V^5+V^4+1$;

- **Rücktransformation**

$$Y(V)=\frac{P_n(V)}{Q_m(V)}$$

<u>1. Fall:</u> $m\leqslant n$ und Q_m ist Teiler von P_n
Ausdividieren liefert eine endliche Sequenz.
<u>2. Fall:</u> $m\leqslant n$ und Q_m ist nicht Teiler von P_n

$$Y(V)=\frac{P_n(V)}{Q_m(V)}=\frac{R_l(V)}{1+V^T}=\frac{P_n(V)}{Q_m(V)}\cdot\frac{E(V)}{E(V)}$$

Es muss gelten: $Q_m \cdot E = 1 + V^p \Leftrightarrow E = (1+V^p) : Q_m$ mit $m \leqslant p \leqslant 2^n - 1$ minimal.

3. Fall: $m > n$ (aperiodischer Anfang)
wie Fall 2, mit Ablesen des Zählerpolynoms für den aperiodischen Anfang.

→ *Kapitel 16: Systemdynamik und lokale Übergangsfunktion*

- **zeitdiskret**

Abbildung 16.3, Seite 261

$$x(k+1) = f[k, x(k), u(k)] \quad (16.3)$$

lokale Übergangsfunktion $X(k+1) = AX + BU$ (16.12)

Ausgangsfunktion $Y = CX + DU$ (16.12)

- **zeitkontinuierlich**

Abbildung 16.5, Seite 266

$$\dot{x} = f[t, x(t), u(t)] = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (16.21)\ (16.23)$$

lokale Übergangsfunktion $\dot{X} = FX + GU$ (16.31)

Ausgangsfunktion $Y = HX + DU$ (16.31)

→ *Kapitel 17: Aufstellen der Zustandsgleichungen*

- **zeitkontinuierlich**

Regelungsnormalform

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (17.14)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad D = 0 \quad (17.15)$$

- **zeitdiskret**

Regelungsnormalform

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (17.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad D = 0 \quad (17.6)$$

Die Regelungsnormalform existiert, falls das System steuerbar ist. (Abb. 17.1, Seite 270)

Beobachternormalform

$$G(z) = \frac{b_0 z^{-n} + b_1 z^{-n+1} + \cdots + b_{n-1} z^{-1}}{a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \cdots + 1} \quad (17.16)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad D = 0 \quad (17.20)$$

Die Beobachternormalform existiert, falls das System beobachtbar ist. (Abb. 17.2, Seite 271)

Jordansche Normalform

$$G(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - \lambda_i} \quad \text{(nur } \textit{einfache} \text{ Pole!)} \quad (17.21)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \quad D = 0 \quad (17.25)$$

(*mehrfache* Pole) Abbildung 17.4 und 17.5, Seite 273f.

(Abb. 17.3 und 17.4, Seite 273)

- **Äquivalentes zeitdiskretes Modell**

$$\Psi(s)=\left[Is-F\right]^{-1} \qquad A=\Psi(T) \quad (ILT\,!) \qquad B=\int_0^T \Psi(\xi)G\,d\xi \qquad C=H \tag{17.31) (17.41}$$

→ *Kapitel 18: Lösung der Zustandsgleichungen für lineare zeitdiskrete Systeme*

V-Transformation $\quad Y(V)=\left[C\left(IV^{-1}-A\right)^{-1}B+D\right]U(V)$ (18.32)

$$\left(IV^{-1}-A\right)^{-1}=\frac{1}{det\left[IV^{-1}-A\right]}\begin{pmatrix} V^{-1}-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & V^{-1}-a_{11}\end{pmatrix} \tag{18.31}$$

$$\begin{aligned} X_1(V)V^{-1}-x_1(0)V^{-1}&=a_{11}X_1(V)+a_{12}X_2(V)+b_{11}U_1(V)+b_{12}U_2(V) \\ X_2(V)V^{-1}-x_2(0)V^{-1}&=a_{21}X_1(V)+a_{22}X_2(V)+b_{21}U_1(V)+b_{22}U_2(V)\end{aligned} \tag{18.26}$$

→ *Kapitel 19: Erreichbarkeit/Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit*

Anzahl Zustände $\quad dim\,X=n$

- **Bedingungen**

vollständige Steuerbarkeit $\quad Rang\,Q_S=Rang\left[A^{n-1}B\,,A^{n-2}B\,,\ldots,AB\,,B\right]=n$ (19.12)

$Rang\,Q_S<n \quad und \quad det\,A=0 \quad \Rightarrow vielleicht\,steuerbar$

vollständige Erreichbarkeit $\quad Rang\,Q_S=Rang\left[A^{n-1}B\,,A^{n-2}B\,,\ldots,AB\,,B\right]=n$ (19.13)

$Erreichbarkeit \Rightarrow Steuerbarkeit$

vollständige Beobachtbarkeit $\quad Rang\,Q_B=Rang\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{pmatrix}=n \Leftrightarrow det(Q_B)\neq 0$ (19.21)

Dualitätstheorem $\quad (A\,,B\,,C)\Leftrightarrow(A^T\,,C^T\,,B^T)$ (Kalman)

→ *Kapitel 20: Äquivalente Systeme*

Ähnlichkeitsgesetze (20.5)

$$X_1=S\,X_2\Rightarrow det\,S\neq 0$$
$$A^*=S^{-1}AS$$
$$B^*=S^{-1}B$$
$$C^*=CS$$
$$D^*=D$$

Regelungsnormalform $\quad S=Q_S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1\end{pmatrix}$ (Koeffizienten aus char. Gl. von A) (20.30)

Koeffizienten $\quad det(Iz-A)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$

Äquivalenzgesetze (20.45)

$$A^*R=RA$$
$$B^*=RB$$
$$C=C^*R$$
$$D^*=D$$

zero-state equivalent ident. Ausgangsfolgen bei ident. Eingangsfolgen und verschwindenden Anfangsbed.

- **Minimale äquivalente Systeme**

Transformationsmatrix $\quad R=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{m-1}\end{pmatrix}$ (alle Zeilen linear unabhängig) (20.55) minimales System $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & \cdots & -a_{m-1}^* \end{pmatrix}$ (Abb. 20.13)

$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

→ *Kapitel 21: Regelung im Zustandsraum*

Rückkopplung $K = (k_0 \;\; k_1 \;\; \cdots \;\; k_{n-1})$ (21.21)

$K^* = (k_0^* \;\; k_1^* \;\; \cdots \;\; k_{n-1}^*)$

$U = K^* X + W$

$X(k+1) = (A^* + B^* K^*) X + B^* W$

charakteristisches Polynom $det(\lambda I - A^* - B^* K^*) = 0$

Pole gegeben:

$(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n) = z^n + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_0$

$\tilde{a}_k = a_k - k_k^*$

Transformation $K = K^* S^{-1}$

Dead-Beat Alle Pole im Ursprung. (minimale Einschwingzeit)

→ *Kapitel 22: Kalman Filter*

(Abbildung 22.4)

Messrauschen $R_k = E\{m_k m_k^T\}$

Systemrauschen $Q = E\{n_k n_k^T\}$

Systemgleichungen $X_{k+1} = A_k X_k + B_k u_k + n_k$ (22.1) (22.2)

$Y_k = C_k x_k + m_k$

- **Kalman-Gleichungen**

<u>measurement update</u> $\hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + \Sigma_{k,k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k\right)^{-1} \cdot \left(y_k - C_k \hat{x}_{k,k-1}\right)$

$\Sigma_{k,k} = \Sigma_{k,k-1} - \Sigma_{k,k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k\right)^{-1} C_k \Sigma_{k,k-1}$

<u>time update</u> $\hat{x}_{k+1,k} = A_k \hat{x}_{k,k} + B_k u_k$

$\Sigma_{k+1,k} = A_k \Sigma_{k,k} A_k^T + Q_k$

<u>Kalman-Gain</u> $K_k = A_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T (C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$ (22.33)

Anfangsbedingungen $\hat{x}_0 = E_{x_0}$

$\Sigma_0 = P_0$

→ *Kapitel 23: Adaptive Systeme*

- **Verfahren des kleinsten mittleren Fehlerquadrats (FIR Filter)**

$\hat{y}(k) = \hat{g}^T(k) u(k)$ (23.16)

Korrelationsmatrizen $R_{uu} = E[\underline{u}(k) \underline{u}^T(k)]$ (23.17)

$R_{yu} = E[y(k) \underline{u}(k)]$ (23.18)

mittlerer quadratischer Fehler $e(\hat{g}) = E[y^2] - 2\hat{g}^T R_{yu} + \hat{g}^T R_{uu} \hat{g} = E\left[(y(k) - \hat{y}(k))^2\right]$ (23.19)

optimale FIR Koeffizienten $\hat{g} = R_{uu}^{-1} R_{yu}$ (23.22)