

# Klausurhilfe zu Systemtheorie

Stefan Dreyer und Sebastian Engel

24. Juli 2007

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Bode-Diagramm</b>	<b>3</b>
1.1 Übertragungsfunktionen . . . . .	3
<b>2 Mechanik</b>	<b>4</b>
<b>3 Äquivalente Systeme</b>	<b>5</b>
<b>4 Regelverhalten</b>	<b>5</b>
4.1 Testsignale . . . . .	5
4.2 Transientes Verhalten . . . . .	5
4.3 Eigenfrequenz des ungedämpften Systems . . . . .	5
4.4 Dämpfungsgrad . . . . .	6
4.4.1 Einstellzeit $T_s$ . . . . .	6
4.4.2 Überschwingzeit $T_p$ . . . . .	7
4.4.3 Anstiegszeit $T_r$ . . . . .	7
4.4.4 Maximales Überschwingen $M_p$ . . . . .	7
4.5 Dominante Polpaare . . . . .	7
4.6 Gütekriterien . . . . .	8
<b>5 Stabilität von linearen Regelsystemen</b>	<b>8</b>
5.1 Stabilität . . . . .	8
5.2 Nyquist-Kriterium . . . . .	8

<b>6</b>	<b>Entwurf von Regelkreisen</b>	<b>9</b>
6.1	P-Regler . . . . .	9
6.2	PI-Regler . . . . .	9
6.2.1	Idealer PI-Regler . . . . .	9
6.2.2	Realer PI-Regler . . . . .	10
6.2.3	Dimensionierung . . . . .	10
6.3	Dimensionierung mit Bodediagramm . . . . .	10
6.4	Realer PD-Regler . . . . .	10
6.4.1	Eigenschaften . . . . .	10
6.4.2	Dimensionierung . . . . .	11
6.5	PID-Regler . . . . .	11
6.5.1	Idealer PID-Regler . . . . .	11
6.5.2	Realer PID-Regler . . . . .	11
6.5.3	Modifizierter PID-Regler . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Kaskadenregelung und Störgrößenaufschaltung</b>	<b>12</b>
<b>8</b>	<b>Zustandsgleichung zeitdiskreter Systeme</b>	<b>12</b>
8.1	Regelungsnormalform . . . . .	12
8.1.1	Bestimmung der Basistransformationsmatrix S auf Regelungsnormalform . . . . .	13
8.2	Beobachternormalform . . . . .	13
8.3	Jordanische Normalform (einfache Pole) . . . . .	14
<b>9</b>	<b>Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von linearen Systemen</b>	<b>14</b>
9.1	Zeitdiskret . . . . .	14
9.2	Zeitkontinuierlich . . . . .	15
<b>10</b>	<b>Lösung der Zustandsgleichungen</b>	<b>15</b>
10.1	Im Zeitbereich . . . . .	15
10.2	Mit V-Transformation . . . . .	15
<b>11</b>	<b>Äquivalentes zeitdiskretes Model</b>	<b>15</b>

<b>12 Minimale äquivalente Systeme</b>	<b>16</b>
12.1 System $\Sigma$ und $\Sigma^*$ . . . . .	16
12.2 Berechnung . . . . .	16
<b>13 Duale Systeme</b>	<b>17</b>
<b>14 Regelung im Zustandsraum</b>	<b>17</b>
<b>15 Suche nach K</b>	<b>17</b>
<b>16 ToDo</b>	<b>18</b>
16.1 Dead-Beat-Verhalten . . . . .	18
16.2 Scrampler und Descrampler . . . . .	18
16.2.1 Scrampler . . . . .	18
16.2.2 Descrampler . . . . .	18
<b>17 Mathematische Grundregeln</b>	<b>18</b>
17.1 Matrizenrechenregeln . . . . .	18

# 1 Bode-Diagramm

## 1.1 Übertragungsfunktionen

Übertragungsfunktion	Amplitudengang	Phasengang
$K$	$20 \cdot \log  A $	0 falls $A \geq 0$ , $\pi$ falls $A < 0$
$\frac{s}{\omega_0}$	+20 dB/Dekade, 0 dB bei $\omega_0$	konstant bei $+\frac{\pi}{2}$
$-\frac{s}{\omega_0}$	+20 dB/Dekade, 0 dB bei $\omega_0$	konstant bei $-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\omega_0}{s}$	-20 dB/Dekade, 0 dB bei $\omega_0$	konstant bei $-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\omega_0}{s}$	-20 dB/Dekade, 0 dB bei $\omega_0$	konstant bei $+\frac{\pi}{2}$
$1 + \frac{s}{\omega_0}$	Knick bei $\omega_0$ , dann +20 dB/Dekade	$+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}$	Knick bei $\omega_0$ , dann -20 dB/Dekade	$-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{1 + 2d\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$	Knick bei $\omega_0$ , dann -40 dB/Dekade	$-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden mit einer Stauchung je nach d

## 2 Mechanik

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1}$$

$$M + \text{“ anliegende Kräfte “} = M_{res}$$

### 3 Äquivalente Systeme

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (3)$$

- A = Wirkung der Zustände untereinander
- B = Wirkung des Eingangs auf die Zustände
- C = Wirkung der Zustände auf den Ausgang
- D = Wirkung Eingang auf den Ausgang

$$A^* = s^{-1} \cdot A \cdot S \quad (4)$$

$$B^* = s^{-1} \cdot B \quad (5)$$

$$C^* = C \cdot S \quad (6)$$

$$D^* = D \quad (7)$$

### 4 Regelverhalten

#### 4.1 Testsignale

1. Sprung  $W(s) = \frac{A}{s}$
2. Rampe  $W(s) = \frac{A}{s^2}$
3. Parabel  $W(s) = \frac{A}{s^3}$

#### 4.2 Transientes Verhalten

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{bs^2 + as + 1} = \frac{\frac{1}{b}}{s^2 + \frac{a}{b}s + \frac{1}{b}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (8)$$

Stationäre Regelabweichung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (9)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} sW(s) \frac{1}{1 + G(s)} \quad (10)$$

#### 4.3 Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

Eigenfrequenz des ungedämpften Systems  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b}}$

## 4.4 Dämpfungsgrad

Dämpfungsgrad  $\xi = \frac{a}{2\sqrt{b}}$  Die Schnelligkeit der Antwort auf einen Sprung wird durch die Größen

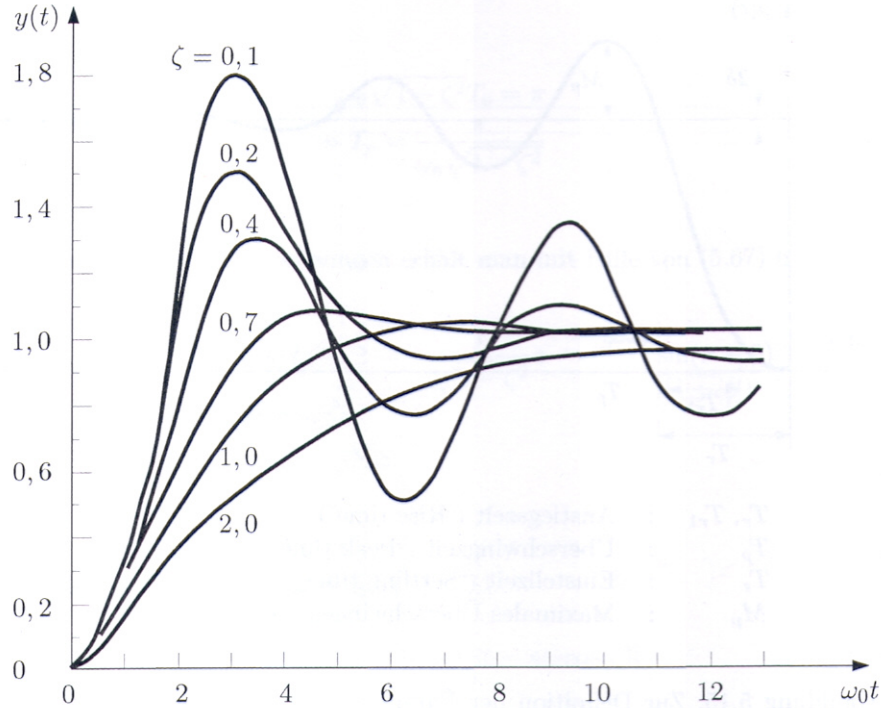


Abbildung 1: Dämpfungsarten

$T_r$ ,  $T_{r1}$  und  $T_p$  charakterisiert. Die Anstiegszeit  $T_{r1}$  wird dabei meist als die Zeit definiert, die das System braucht, um den 10-90%-Bereich zu durchlaufen. Für unterkritisch gedämpfte Systeme wird auch die Anstiegszeit  $T_r$  für den Bereich 0-100% gebraucht.

### 4.4.1 Einstellzeit $T_s$

Für  $T_s$  gilt:

$$|y(t) - 1| < \delta \quad (11)$$

mit  $t \geq T_s$  und  $\delta$ , einer vorgegebenen Toleranzgröße.

Für schwach gedämpfte Systeme (meistens) gilt:

$$|y(t) - 1| \cong \exp(-\xi\omega_0 t) < \delta \quad (12)$$

$$\exp(-\xi\omega_0 T_s) \leq 0,05 \quad (13)$$

$$T_s \cong \frac{3}{\xi\omega_0} \quad (14)$$

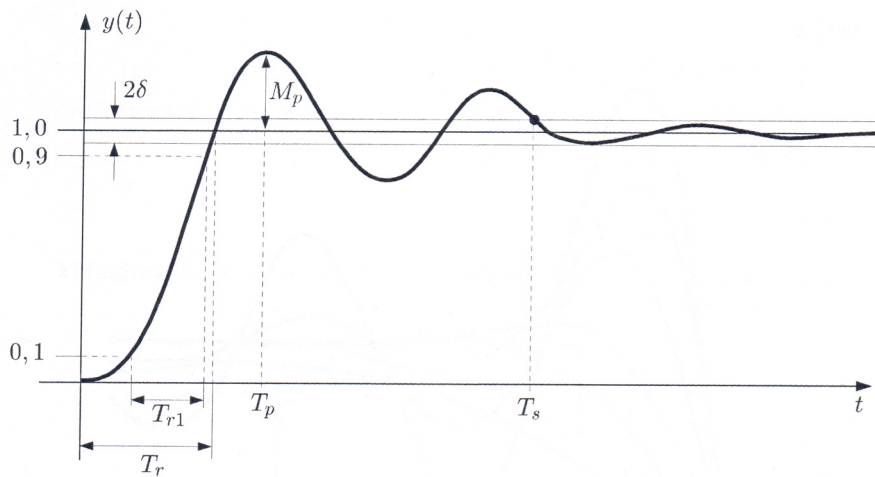


Abbildung 2: Dämpfungsarten

#### 4.4.2 Überschwingzeit $T_p$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (15)$$

#### 4.4.3 Anstiegszeit $T_r$

$$T_r = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} [\pi - \arccos(\xi)] \quad (16)$$

#### 4.4.4 Maximales Überschwingen $M_p$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad (17)$$

### 4.5 Dominante Polpaare

Zwei konjugiert komplexe Pole sind dominant, wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Andere Pole liegen weit links von den dominanten Polen.
2. Wenn ein anderer Pol in der Nähe der imaginären Achse liegt, dann muss er nahe an einer Nullstelle liegen.

(Begründung und Beweisidee siehe Skript Seite 68)



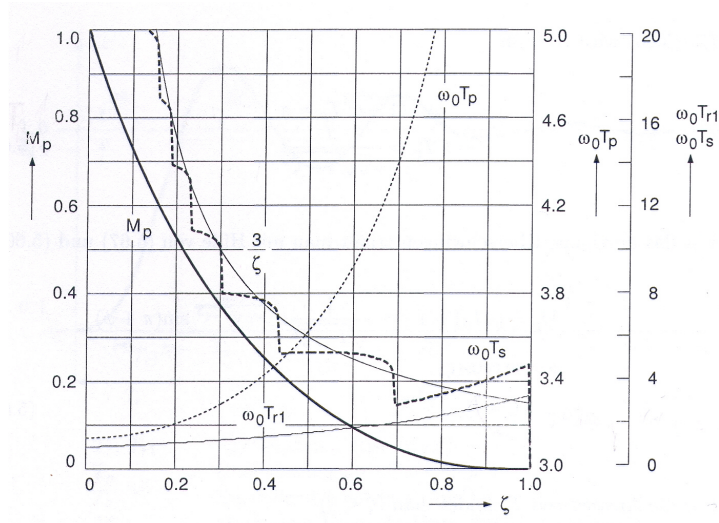


Abbildung 3: Dämpfungsarten

## 4.6 Gütekriterien

- Minimale Einstellzeit  $T_s$
- ISE-Kriterium (quadratische Regelfläche bzw. „integrated squared error“)  $\int_0^{\infty} e^2(t) dt$
- IAE-Kriterium (betragslineare Fläche bzw. „integrated absolute error“)  $\int_0^{\infty} |e(t)| dt$
- ITAE-Kriterium (zeitgewichtete betragslineare Fläche bzw. „integrated time-multiplied absolute error“)  $\int_0^{\infty} t |e(t)| dt$

## 5 Stabilität von linearen Regelsystemen

### 5.1 Stabilität

Ein System heißt stabil, wenn gilt:

- Begrenztes Eingangssignal führt zu begrenzter Antwort (BIBO - Bounded Input Bounded Output)
- Alle Pole der Übertragungsfunktion haben einen negativen Realteil

### 5.2 Nyquist-Kriterium

$$\xi \cong 0,01\varphi_R \quad (18)$$

für  $0^\circ \leq \varphi_R \leq 70^\circ$  und ein dominantes Polpaar

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad (19)$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{bs^2 + as + 1} = \frac{\frac{1}{b}}{s^2 + \frac{a}{b}s + \frac{1}{b}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (20)$$

$$T_s = \frac{3}{\xi\omega_0} \quad (21)$$

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \begin{cases} i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} & \xi < 1 \quad \text{unterkritische Dämpfung } (\diamond) \\ 0 & \xi = 1 \quad \text{kritische Dämpfung } (*) \\ \omega_0\sqrt{\xi^2-1} & \xi > 1 \quad \text{überkritische Dämpfung } (\times) \end{cases}$$

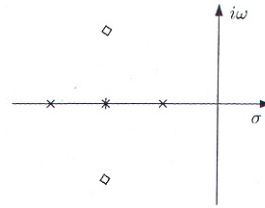


Abbildung 4: Dämpfungsarten

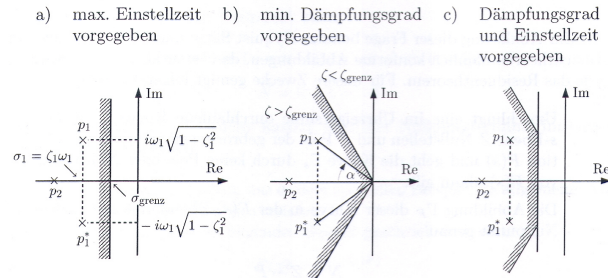


Abbildung 5: Dämpfungsarten

## 6 Entwurf von Regelkreisen

### 6.1 P-Regler

$$G_K(s) = K_R \quad (22)$$

Durch einen P-Regler wird das stationäre Verhalten, also die Regelabweichung auf einen Einheitsprung am Eingang, nicht verändert.

### 6.2 PI-Regler

#### 6.2.1 Idealer PI-Regler

$$G_K(s) = \frac{K_R}{s}(1 + s\tau) \quad (23)$$

### 6.2.2 Realer PI-Regler

$$G_K(s) = K_R \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{mit } \alpha > 1 \quad (24)$$

### 6.2.3 Dimensionierung

Faustregeln:

- $\tau = T_1$  (=größte Zeitkonstante)
- Mit  $M_p$ ,  $\xi$  und  $\varphi_R$  berechnen.
- Die vorgegebene Phasenreserve führt zu  $\omega_D$ .
- $K_R$  aus dem Bode-Diagramm ablesen.
- Überprüfen, ob alle Forderungen erfüllt sind.

## 6.3 Dimensionierung mit Bodediagramm

1. Skizze: Bode-Diagramm des unkompensierten Systems  $K_R G(s)$
2. Bestimmung der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  zu gefordertem Phasenrand  $\varphi_R$ , ggf. Phasenverschiebung des Kompensationsnetzwerks berücksichtigen:  $\varphi_R + 5^\circ$
3. Nullstelle  $z$  des Kompensators eine Dekade tiefer setzen, als die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ .  $z = -0,1\omega_D$ . ( $\omega_D$  ist ein Maß für die Schnelligkeit des Regelkreises und somit vergleichbar mit dem Realteil von  $p_1$ )
4. Man bestimme die Abschwächung  $K_\alpha$  für  $\omega = \omega_D$  so, dass der Amplitudengang die  $0dB$ -Linie schneidet. Dann gilt:  $K_\alpha = -20 \log(\alpha) \Rightarrow \alpha$
5. Der Pol  $p$  des Kompensationsnetzwerks ist dann  $p = -\frac{0,1\omega_D}{\alpha}$

## 6.4 Realer PD-Regler

### 6.4.1 Eigenschaften

Das stationäre Verhalten ist zufriedenstellend, jedoch ist der ursprüngliche Regelkreis ...

- instabil
- zu langsam oder zu schlecht gedämpft

$$G_K(s) = K_R \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s} \quad (25)$$

Die maximale Phasenvoreilung erhält man für die Mittenfrequenz des PD-Reglers:

$$\omega_{Mitte} = \sqrt{z p} = \sqrt{\frac{1}{\alpha T} \frac{1}{T}} = \frac{1}{T \sqrt{\alpha}} \quad (26)$$

### 6.4.2 Dimensionierung

1. Faktor  $K_R$  aus den Forderungen an den stationären Fehler berechnen.
2. Zeichne Bode-Diagramm für  $K_R G(s)$ .
3. Bestimme den Phasenrand  $\varphi_R$  von  $K_R G(s)$ .
4. Berechne die zusätzlich notwendige Phasenvoreilung  $\varphi_{add}$  für den geforderten Phasenrand ( $+5^\circ$  Reserve).
5. Aus dem Diagramm Phasenvoreilung  $\varphi_{add}(\alpha)$  das zu  $\varphi_{add}$  korrespondierenden  $\alpha$  ablesen.  
 $\varphi_{add} = \arcsin \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$
6. Berechne  $10 \log \alpha$
7. Bestimme die Frequenz bei dem der unkomensierte Amplitudengang  $-10 \log \alpha$  beträgt.  $\Rightarrow \omega_D = \omega_{Mitte}$  des kompensierten Systems (maximale Phasenvoreilung)
8. Man überprüfe den resultierenden Phasenrand  $\varphi_R$  und wiederhole, falls notwendig, die Dimensionierung mit einem geeigneterem Wert für  $\alpha$ .

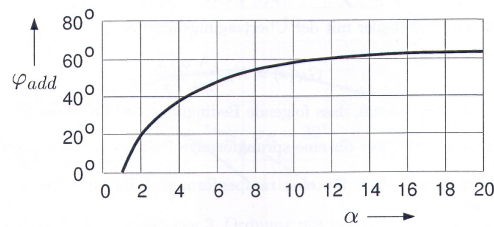


Abbildung 6:  $\varphi_{add}$  vs.  $\alpha$

$$\text{Polstelle } \frac{1}{T} = \omega_D \sqrt{\alpha} \quad (27)$$

$$\text{Nullstelle } \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_D}{\sqrt{\alpha}} \quad (28)$$

## 6.5 PID-Regler

### 6.5.1 Idealer PID-Regler

Physikalisch nicht realisierbar.

$$G_K(s) = \frac{K_R}{s}(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \quad (29)$$

### 6.5.2 Realer PID-Regler

$$G_K(s) = \frac{K_R}{s}(1 + T_1 s) \left( \frac{1 + \beta T_2 s}{1 + T_2 s} \right) \quad \text{mit } \beta > 1, T_1 > \beta T_2 \quad (30)$$

### 6.5.3 Modifizierter PID-Regler

$$G_K(s) = \frac{K_R}{s} \left( \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \right) \left( \frac{1 + \beta T_2 s}{1 + T_2 s} \right) \quad \text{mit } \alpha > 1, \beta > 1, T_1 > \beta T_2 \quad (31)$$

Die PI und PD Anteile lassen sich getrennt berechnen! (s.o.)

## 7 Kaskadenregelung und Störgrößenaufschaltung

BILD KLAUSUR 17.08.2001 AUFGABE 2b

## 8 Zustandsgleichung zeitdiskreter Systeme

### 8.1 Regelungsnormalform

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n} \quad (32)$$

$$x(k+1) \equiv \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} u(k) \quad (33)$$

$$y(k) = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \quad (34)$$

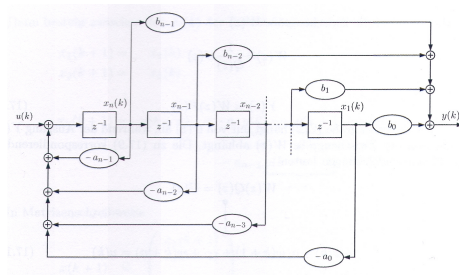


Abbildung 7: Regelungsnormalform

### 8.1.1 Bestimmung der Basistransformationsmatrix S auf Regelungsnormform

1.

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

2.

$$\det[zI - A] = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (36)$$

3.

$$s_n = B \quad (37)$$

$$s_{n-1} = a_{n-1}B + AB \quad (38)$$

$$s_{n-2} = A^2B + A_{n-1}AB + A_{n-2}AB \quad (39)$$

$$S = (s_1 \ s_2 \ s_3 \ \dots \ s_n) \quad (40)$$

$$= (A^{n-1}B \ A^{n-2}B \ \dots \ AB \ B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

4.

$$C^* = CS \quad D^* = D \quad (42)$$

## 8.2 Beobachternormalform

$$G(z) = \frac{b_0 z^{-n} + b_1 z^{-n+1} + \dots + b_{n-1} z^{-1}}{a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \dots + 1} \quad (43)$$

$$x(k+1) \equiv \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u(k) \quad (44)$$

$$y(k) = (0 \ 0 \ \dots \ 1) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \quad (45)$$

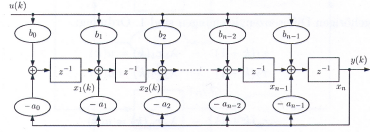


Abbildung 8: Beobachternormalform

### 8.3 Jordanische Normalform (einfache Pole)

$$G(z) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - \lambda_i} \quad (46)$$

$$x(k+1) \equiv \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(k) \quad (47)$$

$$y(k) = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} \quad (48)$$

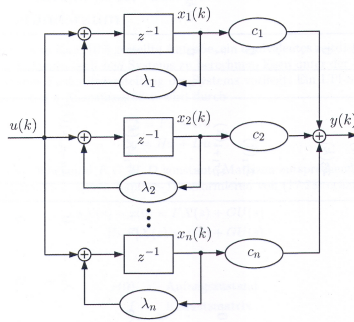


Abbildung 9: Jordanische Normalform (einfache Pole)

## 9 Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit von linearen Systemen

### 9.1 Zeitdiskret

$$Q_s = \begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \quad Q_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (49)$$

## 9.2 Zeitkontinuierlich

Erreichbarkeit = Steuerbarkeit

$$Q_s = [G \quad FG \quad \dots \quad F^{n-1}G] \quad Q_B = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} \quad (50)$$

	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
$\text{Rang} Q_s = n$	Steuerbar Erreichbar	Steuerbar Erreichbar
$\text{Rang} Q_s < n$	Nicht steuerbar Nicht erreichbar	- Keine Aussage - Nicht erreichbar

## 10 Lösung der Zustandsgleichungen

### 10.1 Im Zeitbereich

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (51)$$

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{\text{autonomer Anteil}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k)}_{\text{erzwungener Anteil}} \quad (52)$$

### 10.2 Mit V-Transformation

$$Y(V) = [C(IV^{-1} - A)^{-1}B + D] U(V) \quad (53)$$

## 11 Äquivalentes zeitdiskretes Model

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (54)$$

$$y = Hx + Du \quad (55)$$



$$\Psi(s) = [Is - F]^{-1} \quad (56)$$

$$\Psi(s) \xrightarrow{InvLaplace} \Psi(T) \quad (57)$$

$$A = \Psi(T) \quad (58)$$

$$B = \int_0^T \Psi(\xi) \cdot G \cdot d\xi \quad (59)$$

$$C = H \quad (60)$$

## 12 Minimale äquivalente Systeme

### 12.1 System $\Sigma$ und $\Sigma^*$

Gegeben ist System  $\Sigma$ : ( $x$  = n-dimensionaler Zustandsvektor)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (61)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (62)$$

Minimales System  $\Sigma^*$ : ( $x$  = m-dimensionaler Zustandsvektor,  $m \leq n$ )

$$x^*(k+1) = A^* x^*(k) + B^* u(k) \quad (63)$$

$$y(k) = C^* x^*(k) + D^* u(k) \quad (64)$$

### 12.2 Berechnung

Äquivalenzgesetze:

$$A^* R = R A \quad (65)$$

$$B^* = R B \quad (66)$$

$$C = C^* R \quad (67)$$

$$D^* = D \quad (68)$$

1.

$$m = Rang(Q_B) = Rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (69)$$

2.

$$R = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix} \quad (70)$$

3.

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{pmatrix} \quad (71)$$

4. Koeffizientenvergleich:  $A^*R = RA \longrightarrow A^*$  ( $A^* = RA\tilde{R}$ ,  $\tilde{R}$  - Pseudoinverse)

5.  $C^* = \underbrace{(1 \ 0 \ 0 \ \cdots)}_m$ ,  $B^* = RB$ ,  $D^* = D$

## 13 Duale Systeme

$$\text{System} \quad (A, B, C) \quad (72)$$

$$\text{Duales System} \quad (A^T, C^T, B^T) \quad (73)$$

System ist vollständig beobachtbar, wenn das duale System vollständig erreichbar.

## 14 Regelung im Zustandsraum

$$\text{Regelungsnormalform: } A^* + B^*K^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_0^* + k_0^* & -a_1^* + k_1^* & -a_2^* + k_2^* & \cdots & -a_{n-1}^* + k_{n-1}^* \end{pmatrix} \quad (74)$$

BILD SEITE 323

## 15 Suche nach K

1. Bestimme  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) aus  $\det[Iz - A] = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$

2. Festlegung der gewünschten Eigenwerte  $\tilde{\lambda}_i (1 \leq i \leq n)$  und berechne  $\tilde{a}_i (1 \leq i \leq n-1)$  aus  $(z - \tilde{\lambda}_1)(z - \tilde{\lambda}_2) \cdots (z - \tilde{\lambda}_n) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z + \cdots + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n$
3. Berechne  $k_0^* = a_0 - \tilde{a}_0 \quad k_1^* = a_1 - \tilde{a}_1 \cdots k_{n-1}^* = a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1} \longrightarrow K^* = (k_0^* \quad k_1^* \quad \cdots \quad k_{n-1}^*)$
4. Bestimme  $S = (A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \cdots \quad AB \quad B) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$
5.  $K = K^* S^{-1}$

## 16 ToDo

### 16.1 Dead-Beat-Verhalten

$$L^* = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \quad (75)$$

$$\text{Dynamisches Verhalten} \quad (A - LC) \quad (76)$$

$$\text{Charakteristisches Polynom} \quad \det[\lambda I - (A - LC)] \quad (77)$$

### 16.2 Scrampler und Descrampler

#### 16.2.1 Scrampler

Erkennt Code und gibt ein Signal aus (meistens 1 nach durchlaufen des Codes).  $\Rightarrow$  „Decoder“

#### 16.2.2 Descrampler

Gibt auf ein Signal (meistens 10000...) einen Code (meist einem Scrampler entgegen) aus.  $\Rightarrow$  „Encoder“

## 17 Mathematische Grundregeln

### 17.1 Matrizenrechenregeln

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$