

Formelsammlung Systemtheorie

Inhalt

Mathematische Grundlagen.....	2	PID-Regler.....	11
e-Funktion, Sinus, Cosinus.....	2	Operationsverstärker.....	12
Taylorreihe.....	2	Totzeitglied.....	12
Algebra.....	2	Schieberegister.....	12
Sonstiges.....	2	Scrambler / Descrambler.....	12
Lineare Algebra, Matrizen.....	3	Bandbegrenzte Signale, Abtastung.....	13
Physikalische/elektrotechnische Grundlagen.....	3	Abtastung, Interpolation.....	13
V-Transformation & GF(2).....	4	Raised-Cosine-Filter.....	13
V-Transformation.....	4	Halteglied 0. Ordnung.....	13
GF(2).....	4	Approximationsfehler.....	13
V-Rücktransformation im GF(2).....	4	Elementarsignale.....	13
z-Transformation.....	5	Diskrete Faltung.....	13
Rücktransformation.....	5	Zustandsgleichungen, Normalformen.....	14
Laplace-Transformation.....	6	Regelungs-, Beobachter-, Jordansche Normalform.....	14
Partialbruchzerlegung zur Rücktransformation.....	6	Äquivalentes zeitdiskretes Modell im Zustandsraum.....	15
Blockschaltbilder.....	7	Lösung der Zustandsgleichungen.....	15
Entkoppler.....	7	Duale Systeme.....	15
Bodediagramm.....	7	Erreichbarkeit, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit....	15
dB-Tabelle.....	7	Äquivalente Systeme.....	16
dB-Umrechnung.....	7	Minimal äquivalentes System.....	16
Stabilität.....	8	Regelung im Zustandsraum.....	16
Stabilitätsparameter.....	8	Zustandsvektorrückführung.....	16
Rückgekoppelte Systeme.....	8	Dead-Beat-Verhalten: Entwurf auf min. Einschwingzeit.....	17
Systeme 2. Ordnung.....	9	Luenberger-Beobachter.....	17
P-, PI-, PD-, PID-Regler.....	10	Regelung mit geschätztem Zustandsvektor.....	18
P-Regler.....	10	Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kalman-Filter.....	18
PI-Regler.....	10	Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	18
Stationärer Fehler.....	10	Kalman-Filter.....	18
PD-Regler.....	11	Adaptive Systeme.....	20
		Matrizenrechnung.....	20

Mathematische Grundlagen

e-Funktion, Sinus, Cosinus

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$|1 - e^{jx}| = |e^{jx/2} \cdot j| \cdot \left| \frac{e^{-jx/2} - e^{jx/2}}{2j} \right| = \left| \sin \frac{x}{2} \right| \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$e^x \geq 1+x ; \quad e^x \approx 1+x \quad \text{f. } x \ll 1$$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Additionstheoreme

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y) \quad 2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) \quad 2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

weitere?!

Taylorreihe

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \frac{d}{dx} f_{x=x_0} + \frac{1}{2!} (x-x_0)^2 \frac{d^2}{dx^2} f_{x=x_0} + \dots ; \quad \text{sofern } f(x) \text{ stetig differenzierbar in } x_0.$$

Algebra

- (kommutative) **Halbgruppe**: eine Verknüpfung.
Bsp.: Ganze Zahlen mit „Multiplikation“.
- (kommutative) **Gruppe**: eine Verknüpfung.
Bsp.: Ganze Zahlen mit „Addition“.
- (kommutativer) **Ring**: Gruppe in Bezug auf eine Verknüpfung, Halbgruppe in Bezug auf eine zweite.
Bsp.: Ganze Zahlen mit „Addition“ und „Multiplikation“.
- Körper**: Gruppe in Bezug auf zwei Verknüpfungen, einzige Ausnahme: kein inverses Element zur „0“ für zweite Verknüpfung.
Bsp.: Rationale/reelle/komplexe Zahlen.

Axiome:

(kommutative) Gruppe	(kommutative) Halbgruppe	Abgeschlossenheit	$a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$
		Assoziativität	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
		Neutralelement	$a \circ n_e = a$
		(Kommutativität)	$a \circ b = b \circ a$
		Inverse Elemente	$a \circ \bar{a} = n_e$

für Ring und Körper außerdem:

Distributivgesetz	$a \circ (b \circ c) = a \circ b \circ a \circ c$
-------------------	---

Sonstiges

$$k \in \mathbb{Z}: \quad \log z = \log |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

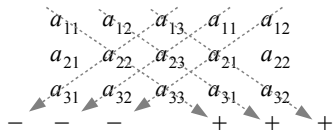
$$e^{2k\pi i} = 1 \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

Lineare Algebra, Matrizen

Inverse einer Matrix: $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)^T}{\det A}$

Determinanten:

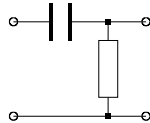
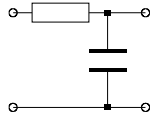
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$


$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} - a_{14} \cdot \det A_{14}$$

Adjunkte Matrix: $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & \dots & (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ \vdots & (-1)^{i+j} \det A_{ij} & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{n1} & \dots & (-1)^{n+n} \det A_{nn} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k \end{pmatrix}$

Physikalische/elektrotechnische Grundlagen

Einheiten??!

RC-Hochpass	RC-Tiefpass
	

$$A_G(\omega) = 20 \log |G| \quad \varphi_G(\omega) = \arctan \frac{\text{Im } G}{\text{Re } G} \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi \text{ f. } \text{Re } G < 0)$$

$$|z| = \sqrt{\text{Re}^2 z + \text{Im}^2 z}$$

Grenzfrequenz: die Frequenz, bei der der Amplitudengang auf **3 dB** abgesunken ist!

Kondensator	$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Q = -\omega C U^2$	$W = \frac{1}{2} C U^2$	$u(t)$ kann nicht springen
Spule	$u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$	$Z = j\omega L$	$Q = \omega L I^2$	$W = \frac{1}{2} L I^2$	$i(t)$ kann nicht springen

Die **Stoßantwort** ist die Ableitung der **Sprungantwort**.

Def.: Ein System ist **linear**, wenn $f(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2)$

V-Transformation & GF(2)

V-Transformation

Definition: $\{v(n)\} = \{0, 1, 0, \dots\} \Leftrightarrow V \quad \underbrace{\{v(n)\} * \dots * \{v(n)\}}_k = \underbrace{\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}}_k \Leftrightarrow V^k$
 $v(n) \in (\text{bel. Körper})$

Verschiebungssätze: $\{f(n-k)\} \Leftrightarrow F_{-k} = V^k \cdot F$
 $\{f(n+k)\} \Leftrightarrow F_{+k} = V^{-k} \cdot F - [f(0)V^{-k} + f(1)V^{-(k-1)} + \dots + f(k-1)V^{-1}]$

Rücktransformation: $F = \frac{B}{A} = \frac{b_0 \cdot 1 + b_1 V + b_2 V^2 + \dots + b_n V^n + \dots}{a_0 \cdot 1 + a_1 V + a_2 V^2 + \dots + a_m V^m + \dots} = f_0 \cdot 1 + f_1 V + f_2 V^2 + \dots$

Für $a_0 \neq 0$ mit: $f_0 = \frac{b_0}{a_0}$, $f_1 = \frac{b_1}{a_0} - f_0 \frac{a_1}{a_0}$, \dots , $f_k = \frac{b_k}{a_0} - \sum_{n=1}^k f_{k-n} \frac{a_n}{a_0}$

Periodische Sequenzen: $\{\overline{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, \dots}\} \Leftrightarrow \frac{f_0 \cdot 1 + f_1 V + \dots + f_{n-1} V^{n-1}}{1 - V^n}$

GF(2)

Grundsätzliches	Polynomumformungen	Primitive (\Rightarrow irreduzible) Polynome	
$V^x + V^x = 0$ $-V = V$	$1 + V^{2^p} = (1 + V)^{2^p}$	$1 + V$	$1 + V^4 + V^9$
	$1 + V^2 = (1 + V)^2$	$1 + V + V^2$	$1 + V^3 + V^{10}$
	$1 + V^3 = (1 + V)(1 + V + V^2)$	$1 + V + V^3$	$1 + V^2 + V^{11}$
	$1 + V^4 = (1 + V)(1 + V + V^2 + V^3) = (1 + V)^4$	$1 + V^2 + V^3$	$1 + V + V^4 + V^6 + V^{12}$
	$1 + V^5 = (1 + V)(1 + V + V^2 + V^3 + V^4)$	$1 + V + V^4$	$1 + V + V^3 + V^4 + V^{13}$
	$1 + V^6 = (1 + V + V^2)(1 + V + V^3 + V^4)$	$1 + V^2 + V^5$	$1 + V + V^6 + V^{10} + V^{14}$
	$1 + V^7 = (1 + V^2 + V^3)(1 + V^2 + V^3 + V^4)$ $= (1 + V + V^2 + V^4)(1 + V + V^3)$	$1 + V + V^6$	$1 + V + V^{15}$
	$1 + V^8 = (1 + V^2)(1 + V^2 + V^4 + V^6)$	$1 + V^3 + V^7$	$1 + V + V^3 + V^{12} + V^{16}$
		$1 + V^2 + V^3 + V^4 + V^8$	
		Anwendung z.B. maximalperiodische Schieberegister, s.u.	

V-Rücktransformation im GF(2)

gegeben: $Y(V) = \frac{P_n(V)}{Q_m(V)}$; gesucht: $\{y(k)\}$ (Annahme: es existiere eine Sequenz $y(k)$)

1. Fall: $m \leq n$: **a)** $Q_m(V)$ Teiler von $P_n(V)$: „endliche“ Folge (endlich viele von Null verschiedene Elemente):
 $\{y(k)\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-n}, 0, \dots\}$
 Lösungsweg: ausdividieren.

b) $Q_m(V)$ kein Teiler von $P_n(V)$: periodische Folge mit nichtperiodischen Anfangsgliedern:
 $\{y(k)\} = \{y_0, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+q}, \dots\}$
 Lösungsweg: ausdividieren.

2. Fall: $m > n$: periodische Folge. Lösungsweg: Periodischer Ansatz:

$$\{y(k)\} = \{\overline{y_0, y_1, \dots, y_{p-1}, \dots}\} \Leftrightarrow Y(V) = \frac{y_0 \cdot 1 + y_1 V + \dots + y_{p-1} V^{p-1}}{1 + V^p} = \frac{R(V)}{1 + V^p} = \frac{P(V)}{Q(V)} \cdot \frac{E(V)}{E(V)}, \text{ d.h.}$$

- bestimme $E(V)$ aus obiger Liste so, dass $Q(V) \cdot E(V) = 1 + V^p$ mit $p \leq 2^m - 1$,
- $R(V) = P(V) \cdot E(V)$ ausmultiplizieren

z-Transformation

Formal gleich zur v-Transformation mit Substitution: $V = z^{-1}$

Definition: $f(k) \in A \subseteq \mathbb{C} !$ $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$

Faltungsgesetz: $F_1(z) \cdot F_2(z) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k f_1(i) \cdot f_2(k-i)$

Verschiebungssätze: $f(k-m) \Leftrightarrow z^{-m} F(z)$
 $f(k+m) \Leftrightarrow z^m F(z) - [f(0)z^m + f(1)z^{m-1} + \dots + f(m-1)z]$

Summenregel: $g(k) = \sum_{i=0}^k f(i) \Leftrightarrow G(z) = \frac{z}{z-1} F(z)$
 $g(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i) \Leftrightarrow G(z) = \frac{1}{z-1} F(z)$

Anfangswerttheorem: $\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$, wenn $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$ existiert.

Endwerttheorem: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$, wenn $\lim_{z \rightarrow 1} F(z)$ existiert. ? $\lim (z-1)F(z)$ oder $\lim F(z)$?! vgl. S. 394!

einfache rückgekoppelte Glieder: $\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z-a} \Leftrightarrow a^{k-1}$; $\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \Leftrightarrow a^k$; $\frac{a}{1-az^{-1}} = a \frac{z}{z-a} \Leftrightarrow a^{k+1}$

Rücktransformation

Partialbruchzerlegung. **Trick:** nach $\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{b}{z-z_1} + \dots = Q(z)$ zerlegen, dann ist $A = Q(z) \cdot z_{z \rightarrow 0}$
 $B = Q(z) \cdot (z-z_0)_{z \rightarrow z_0}$
 ...

Laplace-Transformation

einseitige Laplace-Transformation!

$f(t)$ für $t \geq 0$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\frac{d^n}{dt^n} y(t)$ insbes.: $\frac{d}{dt} y(t)$	$s^n Y(s) - [s^{n-1} y(0) + s^{n-2} y'(0) + \dots]$ $s Y(s) - y(0)$	← beim Bestimmen der Übertragungsfunktion fallen Anfangsbedingungen weg! $y(0)=0$ etc.	
$\int_0^t y(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} Y(s)$	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$ (nötig?)
t^n insbes.: $1 (= \varepsilon(t)')$ t	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $\frac{1}{s}$ $\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{b-a} \cdot (a e^{-at} - b e^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ (nötig?)

Korrespondenztabelle siehe Skript S.387

$$X - \boxed{\frac{1}{1+sT}} - Y \text{ entspricht } T \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$$

Endwerttheorem: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$

Voraussetzungen (für beide):

- zeitlicher Grenzwert existiert

Anfangswerttheorem: $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s)$

- $sF(s)$ hat keinen Pol in der rechten Halbebene

Partialbruchzerlegung zur Rücktransformation

gegeben: $G(s) = \frac{\sum_m a_i s^i}{\sum_n b_i s^i}$

1. Falls $m \geq n$:
Zerlegung in Polynom und echten Bruch.

2. Nullstellen des Nenners bestimmen

3. Ansatz gem. Art der Nullstellen:

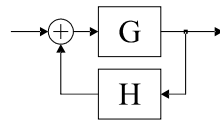
4. Koeffizientenvergleich

vgl. Übungsskript S.31

einfach reell:	$(s-p)$	$\frac{A}{s-p}$
n-fach reell:	$(s-p)^n$	$\frac{A_1}{s-p} + \dots + \frac{A_n}{(s-p)^n}$
einfach komplex:	(s^2+as+b)	$\frac{As+B}{s^2+as+b}$
n-fach komplex:	$(s^2+as+b)^n$	$\frac{A_1 s + B_1}{s^2+as+b} + \dots + \frac{A_n s + B_n}{(s^2+as+b)^n}$

Blockschaltbilder

Rückgekoppelter Kreis:

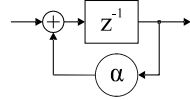


entspricht:

$$\frac{G}{1-GH}$$

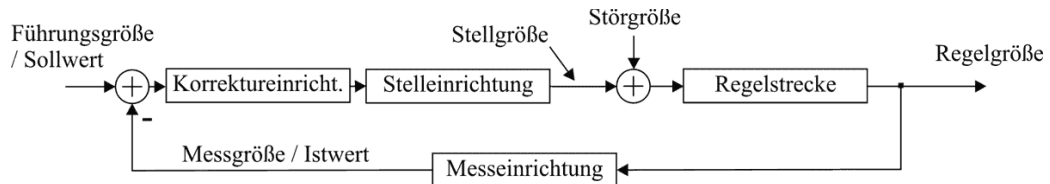
Herleitung siehe Skript S.28

im zeitdiskreten analog, z.B:



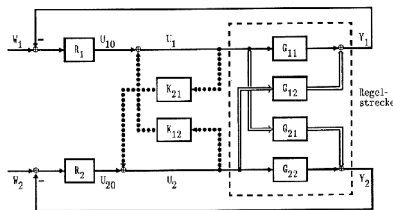
$$\Rightarrow G(z) = \frac{z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1}{z-\alpha} \Rightarrow g(k) = \alpha^{k-1}, \text{ weitere s. } \mathbf{z\text{-Transf.}}$$

$$T = \frac{G}{1+G} \Leftrightarrow G = \frac{T}{1-T}$$



Führungs-, Stör-Übertragungsfunktion siehe S.48

Entkoppler



S.150; H99 A2c)/d); F01 A2 d); H01 A2e)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \Rightarrow K_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}} \quad K_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}}$$

ggf. **umzeichnen**: mehrfach genutzte Blöcke auftrennen, vgl Block C bei Lsg. zu H03 A2 f)

Bodediagramm

Man erhält das Bode-Diagramm des Kehrwertes einer Funktion indem man für Amplituden- und Phasengang die Vorzeichen wechselt.

Annäherung durch Geraden für $G = \frac{1}{1+s}$: maximaler Fehler im Amplitudengang **3,01 dB**, maximaler Fehler im Phasengang **5,71°**

$G =$ verhält sich im Betragsgang wie , im Phasengang wie

$$\frac{1-sT}{1+sT} \quad \frac{1}{1+sT} \quad \frac{1}{1+sT}$$

$$A(-G) = A(G)$$

$$\varphi(-G) = \varphi(G) - 180^\circ$$

vorm Zeichnen immer auf die Form $1+sT = 1+\frac{s}{\omega}$ bringen!

dB-Tabelle

$\frac{x}{1}$	$\frac{20 \log x}{dB}$
1	0
10	20
100	40
10^n	20n
3,162	10
31,62	30
2	6
$\sqrt{2}$	3
$x \cdot y$	$A_x + A_y$
x^m	$m \cdot A_x$

dB-Umrechnung

$$y = 20 \log x \Leftrightarrow x = 10^{y/20}$$

Stabilität

- Ein nicht-lineares System ist genau dann **BIBO-stabil** (= **absolut stabil**), wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal reagiert.
- Ein **lineares** System $G(s)$ ist genau dann **BIBO-stabil** (= **absolut stabil**), wenn $\int_0^T |g(t)| dt < \infty \quad \forall T$
- Ein lineares System mit rationaler (!) Übertragungsfunktion $G(s)$ ist genau dann stabil, wenn alle Pole links der imaginären Achse liegen, d.h. für nicht überkritisch gedämpfte Systeme 2. Ordnung $-\zeta \omega_0 < 0 \Leftrightarrow \zeta > 0$
- Ein zeitdiskretes LTI-System ist genau dann BIBO-stabil, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$ alle Pole liegen innerhalb des Einheitskreises.
- Ein LTI-System (A, B, C) ist genau dann **asymptotisch stabil**, wenn alle Eigenwerte der Matrix A im Inneren des Einheitskreises liegen (siehe *Jordansche Normalform*: nur dann strebt das System aus jedem Anfangszustand in den Nullzustand).
- Aus asymptotischer Stabilität folgt BIBO-Stabilität, aber nicht andersherum, da bei BIBO-Stabilität nur die Beziehung von Ein- und Ausgang, aber nicht der gesamte Zustandsvektor berücksichtigt wird, vgl. S.322 unten.
- Von zwei Systemen ist dasjenige mit der kürzeren Einstellzeit T_s **relativ stabiler**.
- Ein **rückgekoppeltes System** ist stabil, wenn $\varphi_R > 0$ (siehe unten!) ist.

Stabilitätsparameter

Ein rückgekoppeltes System wird instabil, wenn die Ortskurve der **Übertragungsfunktion G_0 des aufgeschnittenen Kreises** durch den kritischen Punkt $(-1; 0i)$ verläuft.

vgl. S.89f	Phasenrand/-reserve φ_R	Amplitudenreserve A_R
Definition:	Betrag, um den die Phase von G_0 geändert werden kann, ehe das System instabil wird.	Faktor, mit dem G_0 multipliziert werden müsste, damit das System instabil wird.
...in der Ortskurve:	Winkel zwischen der neg. reellen Achse und der Gerade durch den Ursprung und den Punkt, an dem die Ortskurve den Einheitskreis schneidet.	Kehrwert des Abstandes des Punktes, an dem die Ortskurve die reelle Achse schneidet, von der imaginären Achse.
...im Bodediagramm:	Abstand des Phasengangs von -180° bei der Frequenz, bei der $A(\omega) = 0$ beträgt.	Dämpfungsgrad bei der Frequenz, bei der die Phase -180° beträgt.

$\varphi_R = 0 \Leftrightarrow$ „Stabilitätsrand“, Pol auf imaginärer Achse!

Für Systeme mit dominantem Polpaar und $\varphi_R \in [0^\circ; 70^\circ]$ gilt: $\zeta \approx 0,01 \cdot \varphi_R$, φ_R in Grad.

Rückgekoppelte Systeme

Vorteile rückgekoppelter Systeme

- Der Einfluss von **Parameteränderungen** in der Regelstrecke kann durch Rückkopplung vermindert werden.
- Durch geeignete Rückkopplung lässt sich das **stationäre Verhalten** eines Systems verbessern.
- Durch geeignete Rückkopplung lässt sich das **transiente Verhalten** eines Systems beeinflussen. (**stat. Fehler s.u.!**)
- Durch geeignete Rückkopplung lässt sich der Einfluss von **Störgrößen** verringern.

Nachteile rückgekoppelter Systeme

- zusätzliche Kosten, erhöhte Komplexität, u.U. Zuverlässigkeitsprobleme
- Systeme können durch Rückkopplung **instabil** werden.

Systeme 2. Ordnung

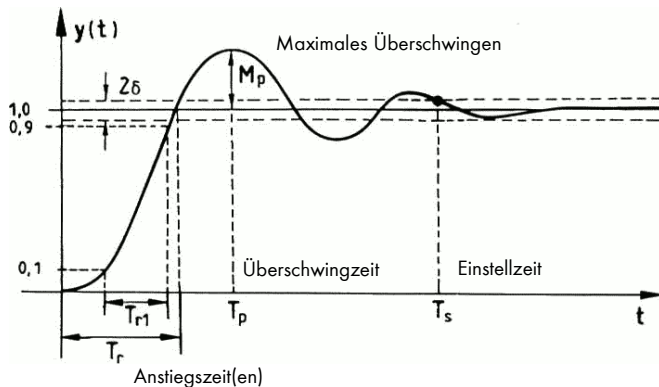
$$w(t) = y(t) + a \dot{y}(t) + b \ddot{y}(t) \rightarrow T(s) = \frac{1/b}{s^2 + \frac{a}{b}s + 1/b} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{b} \quad \text{Eigenfrequenz [Hz],}$$

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}} < 1 \quad \text{Dämpfungsgrad [1].}$$

Pole von T(s): $s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$,
vgl. auch S. 64 oben

$$\Leftrightarrow G_0(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s}$$

„Optimale Dämpfung“: $\zeta = 0,7$
„kritische Dämpfung“: $\zeta = 1,0$



$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T_p \omega_0} \right)^2}$$

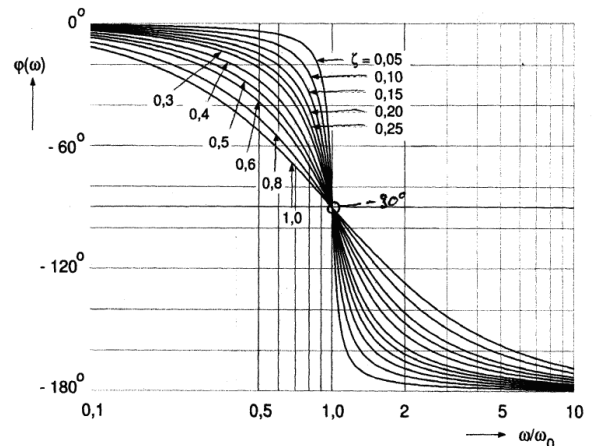
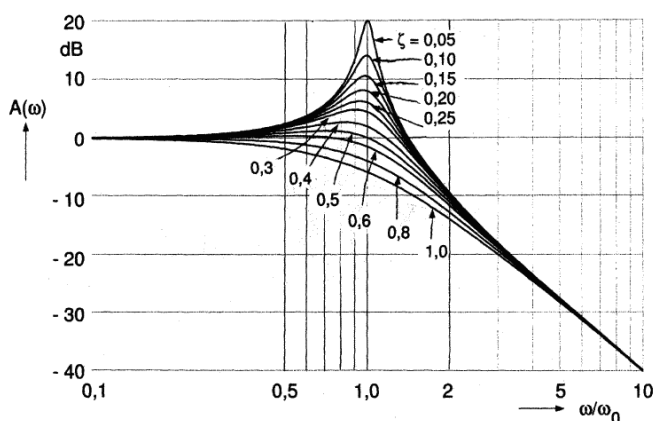
$$M_p = \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = \sqrt{\frac{\ln^2 M_p}{\pi^2 + \ln^2 M_p}}$$

$$T_r = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}} (\pi - \arccos \zeta)$$

Abschätzen der Einhüllenden: mit $\delta \geq |y(t) - 1| \simeq e^{\zeta\omega_0 t}$

folgt für $\delta = 0,05$: $T_s \simeq \frac{3}{\zeta\omega_0}$

ζ im Bodediagramm:



Abhängigkeit der Parameter von ζ siehe Skript **S.68 oben**.

Qualitative Abhängigkeiten: ω_D größer $\Rightarrow T_s / T_p$ kleiner

φ_R größer $\Rightarrow M_p$ kleiner

Stabilitätsregionen abhängig von ζ / T_s siehe Skript S.79 oben

Winkel der Stabilitätsregion: $\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$, S.78

Dominante Pole

Für **Systeme höherer Ordnung** gelten obige Kenngrößen in guter Näherung, wenn zwei konjugiert komplexe Pole **dominant** sind, d.h.:

andere Pole liegen weit links von den dominanten Polen

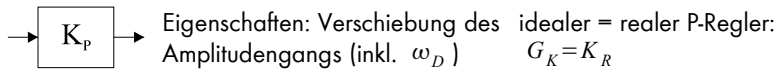
(Realteil der dominanten Pole, sofern System nicht überkritisch gedämpft: $\zeta\omega_0$!)

— oder — wenn ein anderer Pol in der Nähe der imaginären Achse liegt, dann muss er nahe an einer Nullstelle liegen.

Begründung (anhand eines Beispiels) siehe Skript S. 68f

P-, PI-, PD-, PID-Regler

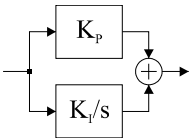
P-Regler



Forderung nach „**unverändertem dyn. Verhalten**“ / „unveränderter Durchtrittsfrequenz“:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |G_K| = 1$$

PI-Regler



Eigenschaften:

- Verringerung des stat. Fehlers
- bei geeigneter Dimensionierung kaum Beeinflussung des dynamischen Verhaltens
- System wird langsamer
- Phase wird abgesenkt

idealer Regler:

$$\left(K_R = K_I ; \tau = \frac{K_P}{K_I} \right)$$

realer Regler:

$$\alpha > 1$$

zeitdiskret:

$$G_K = K_P + \frac{K_I}{s} = K_R \frac{1+s\tau}{s}$$

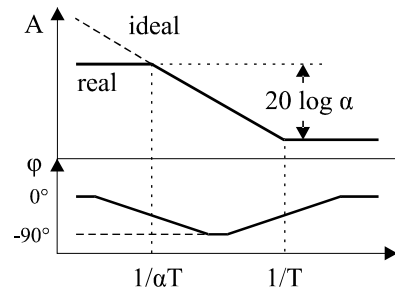
$$G_R = K_R \cdot \frac{q_0 z}{z-1}$$

$$G_K = K_R \frac{1+sT}{1+s\alpha T}$$

$$G_R = K_R \cdot \frac{q_1 + q_0 z}{z-1}$$

Dimensionierung realer PI-Regler (vgl. S. 112, Aufg. 1.23)

1. K_R aus gefordertem stationären Fehler bestimmen (**siehe unten**)
2. Bodediagramm von $K_R G(s)$ zeichnen
3. falls erforderlich: aus gefordertem Phasenrand **+5°** Reserve auf ω_D schließen
4. T gem. Faustregel bestimmen: „Nullstelle eine Dekade tiefer als Durchtrittsfrequenz“: $T = \frac{10}{\omega_D}$ ($\Leftrightarrow z = -0,1 \omega_D$)
5. α über die nötige Abschwächung bestimmen:
Bei $\omega = \omega_D$ muss das System um K_α auf Null „gezogen“ werden:
 $K_\alpha \stackrel{!}{=} 20 \log \alpha \Leftrightarrow \alpha = 10^{K_\alpha/20}$



Dimensionierung idaler PI-Regler

1. K_R wie links
2. τ gem. Faustregel: sofern die Regelstrecke eine überwiegende (d.h. größte) Zeitkonstante T_1 besitzt, wähle $\tau = T_1$

Alternative Dimensionierung: s. Aufg. 1.30!

Stationärer Fehler

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

mit Endwerttheorem,

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[sW(s) \frac{1}{1+G_0(s)} \right]$$

mit G_0 Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises, für Sprung als Eingangssignal,

[d.h. der stationäre Fehler hängt nur von $G_0(0)$ ab!]

$$= \frac{A}{1+G_0(0)}$$

$$= \frac{1}{KK_R}$$

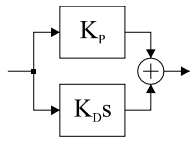
wenn sich die s geeignet kürzen.

Systemtyp	Sprung	Rampe	Parabel
(Regelstrecke hat N Pole im Ursprung)	$w(t) = A \cdot \varepsilon(t)$ $W(s) = \frac{A}{s}$	$w(t) = B \cdot t$ $W(s) = \frac{B}{s^2}$	$w(t) = 0,5 C \cdot t^2$ $W(s) = \frac{C}{s^3}$
stat. Fehler für N=0	$\frac{A}{1+K_0}$	∞	∞
stat. Fehler für N=1	0	B/K_0	∞
stat. Fehler für N=2	0	0	C/K_0

für alle Signale gilt

$w(t) = 0$ für $t < 0$!

PD-Regler



Eigenschaften:

- Verbesserung des dyn. Verhaltens (Durchtrittsfrequenz höher, Phasenrand größer)
- kaum Beeinflussung des stationären Verhaltens
- System wird schneller
- Phase wird angehoben

idealer Regler:

$$G_K = K_R \cdot (1 + sT)$$

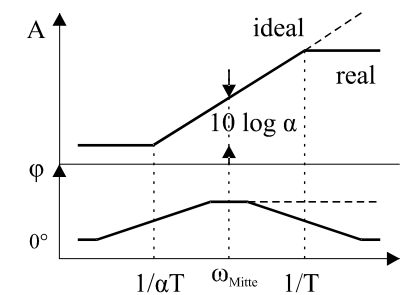
zeitdiskret:

idealer PD-Regler physikalisch nicht realisierbar, weil ein ideal differenzierender Anteil für beliebig hohe Frequenzen beliebig hohe Stellgrößen erzeugen müsste.

realer Regler:

$$G_K = K_R \frac{1 + s\alpha T}{1 + sT} \quad G_R = K_R \cdot \frac{q_2(z-1)}{z}$$

$\alpha > 1$



$$\omega_{Mitte} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

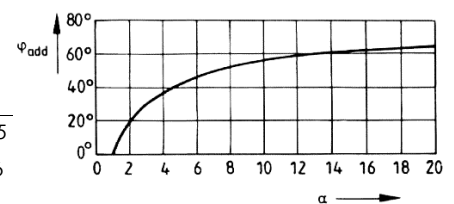
Dimensionierung (vgl. S. 118, Aufg. 1.28)

1. K_R aus gefordertem stationären Fehler bestimmen (**siehe links**)
2. Bode-Diagramm von $K_R G(s)$ zeichnen
3. aus φ_R die zusätzlich notwendige Phasenvoreilung φ_{add} bestimmen (**+5° Reserve!**) $\varphi_{add} = \varphi_{R, soll} - \varphi_{R, ist} + 5^\circ$
4. mit Tabelle/Abb. unten α bestimmen
5. neues ω_D ablesen: die Frequenz, bei der $A(\omega) = -10 \log \alpha$ ist (**s.u.!** d.i. gleichzeitig Stelle der größten Phasenvoreilung)
6. Pol und Nullstelle bestimmen: $T = \frac{1}{\omega_D \sqrt{\alpha}}$; $\alpha T = \frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_D}$
7. Neuzeichnen, Überprüfung, ob Bedingungen erfüllt, ggf. Wdh. mit höherem α .

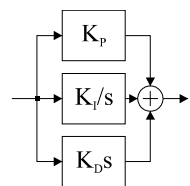
zur Bestimmung von α bei Dimensionierung

$$\varphi = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

φ	20°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
α	2	3	3,69	4,60	5,83	7,55	10,06	13,93	20,35	32,16	57,70	130,65
$-10 \log \alpha$	-3,01	-4,77	-5,67	-6,63	-7,66	-8,78	-10,03	-11,44	-13,08	-15,07	-17,61	-21,16



PID-Regler



idealer Regler:

$$G_K = K_R \left[1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right] = \frac{K_R}{s} \cdot (1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

realer Regler: $\beta > 1$; $T_1 > \beta T_2$

$$G_K = K_R \frac{1 + sT_1}{s} \cdot \frac{1 + s\beta T_2}{1 + sT_2}$$

zeitdiskr.: $G_R = \frac{q_2 + q_1 z + q_0 z^2}{z(z-1)}$

modifizierter Regler:

$$G_K = K_R \frac{1 + sT_1}{1 + s\alpha T_1} \cdot \frac{1 + s\beta T_2}{1 + sT_2}$$

Dimensionierung:

Die Dimensionierung des PI- und PD-Anteils kann getrennt nach obigen Regeln durchgeführt werden, bzw.:

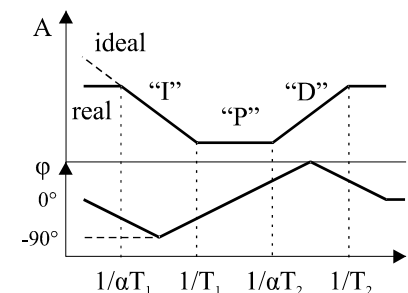
erste 4 Schritte wie oben **PD-Regler**;

$$\frac{1}{T_2} > \omega_D > \frac{1}{T_1} \wedge \omega_D > \frac{1}{\beta T_2} \Rightarrow |G_R(s = \omega_D)| = K_R T_1 \cdot \frac{\beta T_2 \omega_D}{\sqrt{\beta}}$$

Aus $|G_R(\omega_D) \cdot G_K(\omega_D)| = 1 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{|K_R G(\omega_D)| \sqrt{\beta}}$

Zeitbereich:

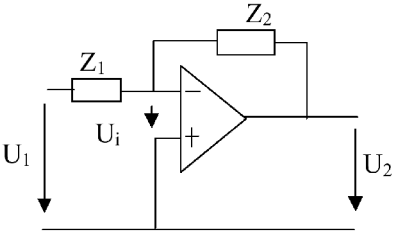
zeitkontinuierlich: $y(t) = K_R \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} e(t) \right]$ zeitdiskr.: $y(kT) = K_R \left[e(kT) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(iT) + \frac{T_D}{T} (e(kT) - e(kT - T)) \right]$



Operationsverstärker

vgl. **Kap 7.7!** z.B. S.124 bzw. $T = \frac{R_2}{\frac{R_1 + R_2}{A} + R_2}$

OP-Standschaltungen vgl. ET1-Formelsammlung!

invertierender Verstärker	Z_1	Z_2	$G(s) = -Z_2/Z_1$	ergibt...
	R_1	R_2	$-R_2/R_1$	P-Regler
	R_1	$R_2 + \frac{1}{sC_2}$	$-\frac{1+sR_2C_2}{sR_1C_2}$	idealer PI-Regler
	R_1	$\frac{1}{sC_2}$	$\frac{-1}{sR_1C_2}$	Integrator *)
	$R_1 + \frac{1}{sC_1}$	R_2	$-\frac{sR_2C_1}{1+sR_1C_1}$	(?)
	$R_1 + \frac{1}{sC_1}$	$R_2 + \frac{1}{sC_2}$	$-\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1+sR_2C_2}{1+sR_1C_1}$	$R_2C_2 > R_1C_1$: realer PD-Regler $R_2C_2 < R_1C_1$: realer PI-Regler

*) Problem bei Messung einer Größe über Integrator: auch Fehler werden integriert, Ausgangslage muss bekannt sein.

Totzeitglied

Verzögerung des Eingangssignals um eine feste Zeitspanne T , d.h.: $y(t) = K \cdot x(t-T)$

Frequenzgang: $G(i\omega) = Ke^{-i\omega T}$,

Amplitudengang: $A(\omega) = 20 \log K$ ($= 0$ f. $K=1$),

Phasengang: $\varphi(\omega) = -\omega T$ (d.i. im Bodediagramm eine e-Funktion!)

Näherung für „niedrige“ Frequenzen per Taylorreihe: $e^{-sT} = \frac{1}{1+sT+\frac{1}{2}s^2T^2+\dots} \approx \frac{1}{1+sT} \Rightarrow G(i\omega) \approx K \cdot \frac{1}{1+i\omega T}$

sinnvoll: $T \leq \frac{1}{10\omega_D}$, weil sonst der Phasengang zu stark abgesenkt wird.

oder $e^{-sT} = 1 - sT + \frac{1}{2}s^2T^2 - \dots \approx 1 - sT$, vgl. Anm. bei „Bodediagramm“!

vgl. Aufg. 1.30

Schieberegister

Rückgekoppelte Schieberegister ohne Eingang erzeugen periodische Sequenzen (vgl. V-Rücktransformation). Wenn innerhalb einer Periode alle 2^{n-1} möglichen Zustände (außer Nullzustand) angenommen werden, ist das Schieberegister **maximalperiodisch** \Leftrightarrow das Nennerpolynom ist **primitiv**.

Scrambler / Descrambler

Achtung: Übertragungsfunktion(Scrambler) \cdot Übertragungsfunktion(Descrambler) = $V^{\text{Anzahl Speicher}}$!

siehe Abb S.225

Bandbegrenzte Signale, Abtastung

Nyquist-Frequenz: $\frac{1}{T_A} = 2B$; B Bandbreite.

Abtastung, Interpolation

Abtastung im **Zeitbereich**: „Sieben“ mit Dirac-Folge:

$$s_a(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Abtastung im **Frequenzbereich**: Faltung mit Dirac-Folge:

$$S_a(j\omega) = S(j\omega) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{T_A})$$

Interpoliertes Signal: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT) \cdot \text{si}(2\pi B(t - nT))$

Zur Rekonstruktion einer Funktion, **deren Spektrum um ω_{mod} verschoben ist**, muss die für Abtastfrequenz ω_{last} $n \cdot \omega_{last} = \omega_{mod}$, $n \in \mathbb{N}$ gelten, damit eine Wiederholung des Spektrums „im Basisband“, d. h. mittig um die Null liegt.

Bedingungen für exakte digitale Simulation:

- Alle Signale müssen bandbegrenzt sein
- Signale müssen mit mindestens Nyquistfrequenz abgetastet sein
- analoges System muss ebenfalls bandbegrenzt sein
- Interpolation muss ideal sein

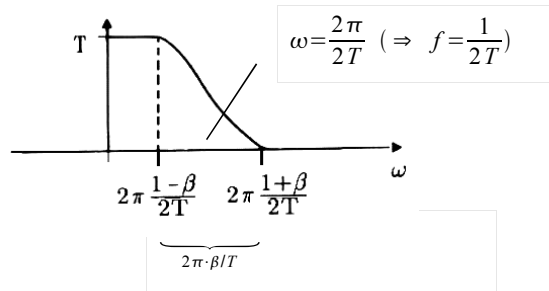
Das Spektrum eines **nicht stetigen Signals** ist nicht bandbegrenzt, das Signal ist daher nicht exakt rekonstruierbar.

Raised-Cosine-Filter

$$P(\omega) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[1 - \sin \frac{T}{2\beta} \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) \right] & \text{Bereiche wie in Skizze.} \\ 0 & \end{cases}$$

$$p(t) = \text{si}(\pi t) \cdot \frac{\cos(\beta \pi t)}{1 - (2\beta t)^2} \quad \text{mit } \tau = \frac{t}{T}$$

nicht realisierbar, da Stoßantwort unendlich lang!



Halteglied 0. Ordnung

$$P(\omega) = \frac{1}{i\omega} [1 - e^{-i\omega T}] = T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$p(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t < T \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

(Achtung: nicht bandbegrenzt, Signal nicht fehlerfrei rekonstruierbar!)

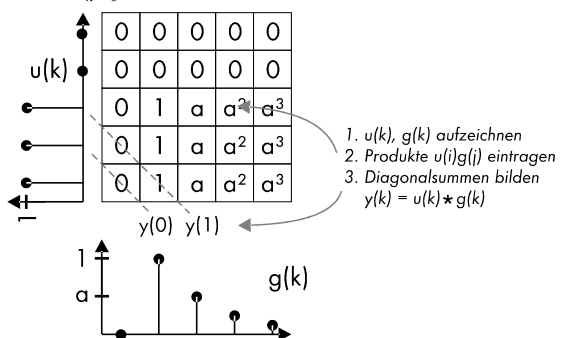
Approximationsfehler

$$e = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\omega| > 2\pi B} H(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > 2\pi B} |H(\omega)| d\omega \quad (\text{S.198})$$

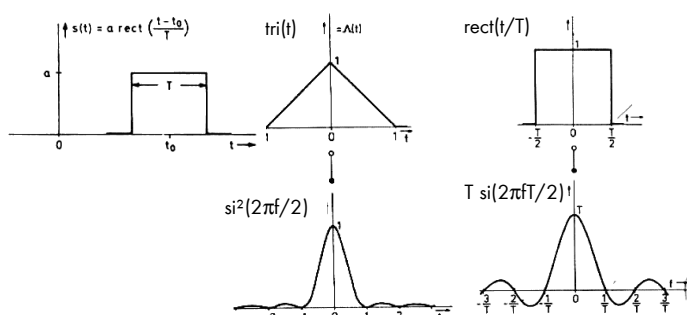
Fehler des Abtastwertes bei nT Abschätzung für alle Fehlerwerte

Diskrete Faltung

$$y(m) = \sum_{k=0}^m u(k) \cdot g(m-k), \quad \text{Lösungsschema:}$$



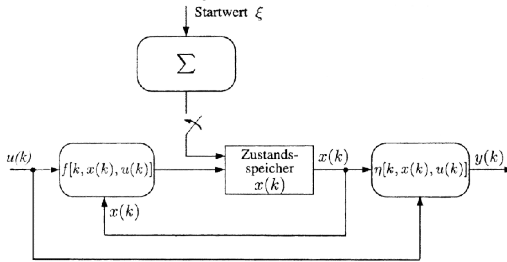
Elementarsignale



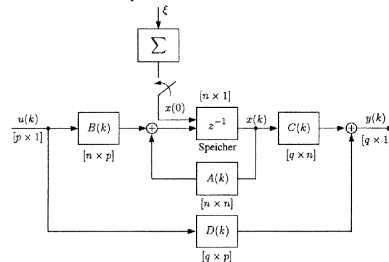
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Zustandsgleichungen, Normalformen

Allgemeines zeitdiskretes System:



Lineares zeitdiskretes System, d.h. Σ, f, η sind linear:



Zustandsgleichungen zeitdiskret:	Zustandsgleichungen zeitkontinuierlich:
$\mathbf{x}(k+1) = f[k, \mathbf{x}(k), u(k)] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \cdot u(k)$ $y(k) = \eta[k, \mathbf{x}(k), u(k)] = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} \cdot u(k)$	$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{G} \cdot u(t)$ $y(t) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot u(t)$

Regelungs-, Beobachter-, Jordansche Normalform

Anm.: im zeitkontinuierlichen Integratoren statt der Verzögerungselemente!		Vorzeichen der a, beachten!	
Regelungsnormalform		$G(s) = G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-1} z^{n-1}}{a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n}$ $A \equiv F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B \equiv G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C \equiv H = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}) \quad D = 0$	Umwandlung von einer Normalform in eine andere über $G(s)$ bzw. $G(z)$
Beobachternormalform		$G(z) = \frac{b_0 z^{-n} + b_1 z^{-n+1} + \dots + b_{n-1} z^{-1}}{a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \dots + 1}$ $A \equiv F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B \equiv G = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ $C \equiv H = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \quad D = 0$	
Jordansche Normalform		$G(z) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - \lambda_i}$ $A \equiv F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B \equiv G = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $C \equiv H = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \quad D = 0$ <p>hier: nur einfache Pole! komplexe Pole s. S.274f!</p>	

Äquivalentes zeitdiskretes Modell im Zustandsraum

gesucht: das zum zeitkont. System $\begin{matrix} \dot{x}(t) = F \cdot x(t) + G \cdot u(t) \\ y(t) = H \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{matrix}$ äquivalente zeitdiskrete Modell $\begin{matrix} x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{matrix}$

Lösung: $A = \Psi(T_S)$ $B = \int_0^{T_S} \Psi(t) G dt$ $C = H$ mit T_S Abtastezeit, $\Psi(t) = L^{-1} \{ [1s - F]^{-1} \}$ Lösungsweg s. Seite 277f

Lösung der Zustandsgleichungen

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u(j) = A^k x(0) + \underbrace{(B, AB, \dots, A^{k-1} \cdot B)}_{\text{gespiegelte Steuerbarkeitsmatrix}} \begin{pmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}$$

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{\text{autonom}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} B u(j)}_{\text{erzwungen}} + Du(k)$$

Übertragungsmatrix/-funktion:
(sofern nicht aus NF ablesbar!)

$$G(V) = C[1 \cdot V^{-1} - A]^{-1} B + D$$

$$G(z) = C[1 \cdot z - A]^{-1} B + D$$

wesentlicher Anteil für Pole etc.!

Erzwungener Anteil entspricht Faltung $y(k) = u(k) * g(k)$ mit „**Stoßantwort**“ $g(k) = \begin{cases} D & k=0 \\ CA^{k-1} B & k \geq 1 \end{cases}$

Duale Systeme

Das zum linearen System (A, B, C) **duale System** wird durch (A^T, C^T, B^T) beschrieben.

Das Ursprungssystem ist vollständig beobachtbar bzw. erreichbar, wenn das Ursprungssystem vollständig erreichbar bzw. beobachtbar ist. (Anm.: beachte $(CA^K)^T = (A^T)^K C^T$, vgl. S. 294f)

Erreichbarkeit, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit

Def. Erreichbarkeit	Def. Steuerbarkeit	Def. Beobachtbarkeit
Ein System ist vollständig erreichbar , wenn es durch geeignete Wahl des Steuervektors im Zeitintervall (t_1, t_0) vom Nullzustand in jeden beliebigen Zustand überführt werden kann: $x(t_1) = \Phi(t_1, t_0, 0, u)$ mit $x(t_1)$ beliebig, $t_1 \geq t_0$	Ein System ist vollständig steuerbar , wenn ein beliebiger Zustand $x(t_0)$ durch geeignete Wahl der Eingangsfunktion u in endlicher Zeit in den Endzustand $x(t_1) = 0$ überführt werden kann: $\Phi(t_1, t_0, x(t_0), u) = 0$ mit $x(t_0)$ beliebig, $t_1 \geq t_0$	Ein System heißt vollständig beobachtbar , wenn man bei bekannter Steuerfunktion $u(t)$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ aus der Messung von $y(t)$ über ein endliches Zeitintervall $[t_0, t_1]$ eindeutig auf den Zustand $x(t_0)$ schließen kann.

Kriterien:

Bedingung: Wenn...	...genau dann ist das System...	
$\text{Rang } Q_S = n$	steuerbar	erreichbar
$\text{Rang } Q_S < n$	$\det A = 0$	vielleicht steuerbar
	$\det A \neq 0$	nicht steuerbar
$\text{Rang } Q_B = n$	beobachtbar	

mit:

Steuerbarkeitsmatrix $Q_S = (A^{n-1} \cdot B, A^{n-2} B, \dots, AB, B)$,

Beobachtbarkeitsmatrix: $Q_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

nur für erreich- und steuerbare Systeme existiert eine Regelungsnormalform, d.h.:

Wenn ein System in Regelungsnormalform vorliegt, ist es erreich- und steuerbar!

Ein steuerbares System kann in **höchstens n** (Dimension des Systems) **Schritten** in den Nullzustand gebracht werden.

Äquivalente Systeme

Def.: Zwei Systeme M, M^* sind **äquivalent**, falls gilt: Zu jedem Anfangszustand $x(0)$ von M existiert ein Zustand $x^*(0)$ von M^* und umgekehrt existiert zu jedem $x^*(0)$ ein $x(0)$ so, dass zu jedem Zeitpunkt $k \geq 0$ für beliebige Eingangssequenzen die beiden Systeme nicht unterscheidbare Ausgangssequenzen erzeugen, also:

$$x(k) = S\tilde{x}(k) \wedge \tilde{x} = S^{-1}x(k) \quad k \geq 0$$

Einsetzen in Zustandsgleichungen ergibt

Ähnlichkeitsgesetz:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= S^{-1}AS & \tilde{B} &= S^{-1}B \\ \tilde{C} &= CS & \tilde{D} &= D \end{aligned}$$

(Anm.: S muss regulär sein!)

Basistransformationsmatrix S , um ein beliebiges steuerbares System in Regelungsnormalform zu bringen:

$$S = Q_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

mit a_i Koeffizienten des char.. Polynoms von A :
 $\chi_A(\lambda) = \det[\lambda I - A] = a_0 + a_1\lambda + \dots$
char. Polynom ändert sich nicht!

Def.: Ein System M heißt **zero-state equivalent** zu M^* , wenn M und M^* für verschwindende Anfangsbedingungen und identische Eingangsfolgen $u(k)$ identische Ausgangsfolgen $y(k)$ erzeugen.

Minimal äquivalentes System

Suche R mit $x_{\min}(k) = Rx(k)$, $R [m \times n]$ -Matrix mit $m = \text{Rang } Q_B$

Äquivalenzgesetze:

$$\begin{aligned} A_{\min} R &= RA & B_{\min} &= RB \\ C_{\min} R &= C & D_{\min} &= D \end{aligned}$$

A_{\min} hat die **Form wie in RNF**, außerdem gilt:

$$\begin{aligned} C_{\min} &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) \\ RA &= Q_B \text{ ab zweiter Zeile!} \end{aligned}$$

(Anm.: entspricht Ähnlichkeitsges., aber R muss nicht invertierbar sein!)

$$R = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix}, \text{ das sind die ersten Zeilen von } Q_B$$

Zur **Größe von m** vgl. „Synthese-Algorithmus“ S.317 unten!

Wird R mit einem Zeilenvektor zu einer regulären quadratischen Transformationsmatrix S erweitert, so enthält das mit S gebildete System das minimal äquivalente in den ersten Zeilen bzw. Spalten von A, B, C, D .

Regelung im Zustandsraum

Zustandsvektorrückführung

Def.: Ein LTI-System (A, B, C) ist genau dann **asymptotisch stabil**, wenn alle Eigenwerte der Matrix A im Inneren des Einheitskreises liegen (siehe *Jordansche Normalform*: nur dann strebt das System aus jedem Anfangszustand in den Nullzustand).

System nicht vollständig beobachtbar \Rightarrow Ausgang eignet nicht für Regelung. Lösung: **Zustandsvektorrückführung**.

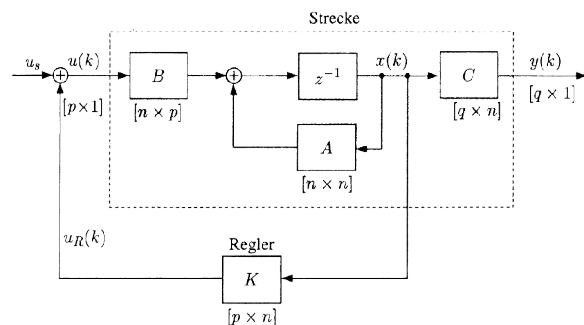
Zustandsgleichungen des dargestellten Systems:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [A+BK] \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) \end{aligned}$$

(d.h. i.Allg. $\bar{A} = A+BK$; $\bar{C} = C+DK$)

Ziel: $A+BK$ soll die geforderten **Pole = Eigenwerte** $\bar{\lambda}_i$

(Erklärung s. S. 324 unten) haben.



(Wenn u skalar ist, ist K ein Zeilenvektor: $K = (k_0 \ k_1 \ \dots)$)

Matrix, mit der die Stellgröße zu multiplizieren ist, damit die asymptotische Differenz von Stell- und Ausgangsgröße verschwindet: $M_{\text{Stell}} = (C[1 - (A+BK)]^{-1}B)^{-1}$ (siehe S. 323)

Durch Zustandsvektorrückführung wird das System vollständig beobachtbar.

System in **Regelungsnormalform** gegeben:

- Bestimme Koeffizienten \bar{a}_i zu gewünschten Eigenwerten: $\chi_{A+BK}(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_0)(\lambda - \bar{\lambda}_1) \dots = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \lambda + \dots + \bar{a}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$
 - Koeffizienten von $K = (k_0 \ k_1 \ \dots)$ in RNF sind gegeben durch $k_i = a_i - \bar{a}_i$ mit a_i negativen Koeffizienten wie in Matrix A (da A in RNF entsprechen diese den Koeffizienten des char. Polynoms von A!)
- System **nicht in Regelungsnormalform**:
 - Bestimme K_{RNF} wie oben (Achtung: a_i aus char. Polynom $\chi_A(\lambda) = \det[1\lambda - A]$ bestimmen!)
 - Bestimme Basistransformationsmatrix **S** (s. links), $K = K_{RNF} \cdot S^{-1}$ ist Rückkopplungsmatrix für allgemeines System
 - Alternativ**: $\chi_{A+BK}(\lambda) = \det[1\lambda - (A+BK)]$ aufstellen und durch Vergleich mit $\chi_{A+BK}(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}_0)(\lambda - \bar{\lambda}_1) \dots = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \lambda + \dots + \bar{a}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n$ unbekannte Koeffizienten berechnen (**S** wird nicht gebraucht!)

Dead-Beat-Verhalten: Entwurf auf min. Einschwingzeit

Ziel: Übergang $x(0) \rightarrow x(n)$ in höchstens n (Dimension des Systems) Schritten für beliebige $x(0)$, $x(n)$

Aus Lösung der Zustandsgleichungen für $x(k)$ (**siehe oben**) folgt:

(Abb.S. 330 oben?)

$$\begin{pmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} = Q_S^{-1} \cdot (-A^n) \cdot x(0) \Rightarrow u(k) = (0, \dots, 1) \cdot Q_S^{-1} \cdot (-A^n) \cdot x(k), \text{ k beliebig}$$

Zustandsvektorrückführung ($u(k) = Kx(k)$): $K = (0, \dots, 1) \cdot Q_S^{-1} \cdot (-A^n) \quad (*)$

- System in **Regelungsnormalform**: $K = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1})$ (Vorzeichen beachten!) $\Rightarrow A+BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- System **nicht in Regelungsnormalform**: nach (*) oder $K = K_{RNF} \cdot S^{-1}$ (siehe oben).

$$\Rightarrow T(z) = k \cdot (b_{m-1} z^{-1} + b_{m-2} z^{-2} + b_0 z^{-m})$$

Das so geregelte System hat einen **n-fachen Pol** (=Eigenwert) **im Ursprung**, **minimale** Einschwingzeit und eine **endliche Stoßantwort** (FIR).

Luenberger-Beobachter

Ausgangslage: A, B, C bekannt, Eingang & Ausgang messbar,
Zustandsvariable nicht messbar

\Rightarrow **System simulieren, Zustand schätzen**

- open loop** (siehe Abb. S.331):

Fehler $e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) = A \cdot e(k) = \dots = A^k e(0)$, d.h. Schätzfehler verschwindet für asymptotisch stabiles System asymptotisch.

Nachteil: nicht beeinflussbar!

- Luenberger-Beobachter (closed loop)**:

(Voraussetzung: System beobachtbar!)

Fehler $e(k+1) = [A - LC] \cdot e(k)$, d.h. im „Optimalfall“:

$$|x_k - \hat{x}_k| = 0 \text{ f. } k > 0 \Leftrightarrow A = LC \text{ (im skalaren Fall also } l = a/c \text{ !)}$$

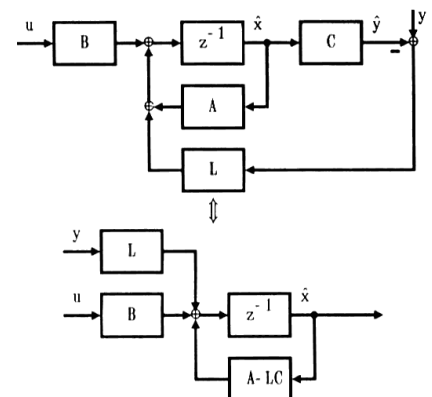
(Voraussetzung für asymptotisch verschwindenden Fehler:
Eigenwerte von $[A - LC] < 1$ (vgl. S. 322 oben)

Dimensionierung:

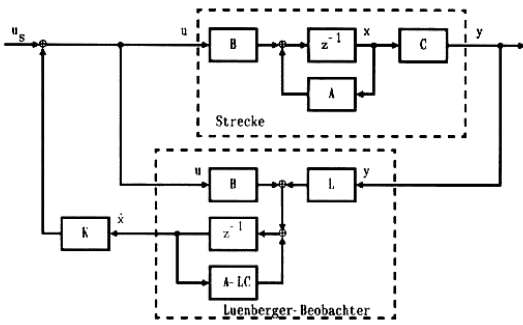
analog zu Zustandsvektorrückf. mit $A_L \triangleq A^T$; $B_L \triangleq -C^T$; $K_L \triangleq L^T$ (vgl. z.B. F02 A5)

(Regelung mit geschätztem Zustandsvektor siehe nächste Seite!)

Nochmal explizit „Dim mit min. Einstellzeit“?!



Regelung mit geschätztem Zustandsvektor



(siehe S. 334)

x und \hat{x} zu 2n-dimensionalem Zustandsvektor zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} u_s(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A, \text{gesamt}} = \det[\lambda \mathbb{1} - (A+BK)] \cdot \det[\lambda \mathbb{1} - (A-LC)]$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kalman-Filter

Wahrscheinlichkeitsrechnung

X, Y, Z, M Zufallsvariablen; \underline{x} Zufallsvektor; $a, b \in \mathbb{R}$:

$$E[aX+bY] = a \cdot EX + b \cdot EY$$

$$\text{Var}[X] = E[(X-EX)^2] = E[X^2] - (EX)^2$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\underline{x}] &= E[(\underline{x}-E\underline{x})(\underline{x}-E\underline{x})^T] \\ &= E[\underline{x}\underline{x}^T] - E\underline{x}(E\underline{x})^T \end{aligned}$$

$$\text{Var}[aX+b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$$

X, Y stoch. unabh.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$\text{Var}[X+Y] = \text{Var} X + \text{Var} Y$$

$$\Rightarrow E[XY] = EX \cdot EY; \quad p(X, Y) = p(X) \cdot p(Y)$$

$$\text{Bayes'sche Formel: } p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

$$p(x) = \int_y p(x, y) dy$$

X, Y stoch. unabh.,

$$Z = X+Y \Rightarrow p(z) = p(x) * p(y)$$

$$X \text{ gleichverteilt mit } b \text{ Breite des Rechtecks} \Rightarrow b = \sqrt{12 \cdot \text{Var} X} \Leftrightarrow \text{Var} X = \frac{1}{12} b^2$$

$$\text{geg.: } p_X(x), \quad y=f(X, M), \quad p_M(m) \Rightarrow p_{Y|M}(y|m) = \frac{p_X(x=f^{-1}(Y, M))}{\left| \frac{d}{dx} f(X, M) \right|}$$

Korrelationsmatrix:

$$\Sigma = E\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T\right] = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } c = a+b \Rightarrow p(c|a) = \frac{p_b(c-a)}{|\partial/\partial b[a+b]|} \quad \text{vgl. FS W'keitsrechnung S.4}$$

ρ Korrelationskoeffizient.

Kalman-Filter

• Anforderungen:

- Gauß'sches Rauschen: Die Rauschprozesse $\{m_k\}$ und $\{n_k\}$ seien additives, weißes gaußsches Rauschen (AWGN), mittelwertfrei, statistisch unabhängig:

$$E n_k = 0 \quad E[n_k n_l^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kl} \quad E[m_k] = 0 \quad E[m_k m_l^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kl} \quad E[m_k n_l^T] = 0$$

- Anfangszustand x_0 des Prozesses gaußverteilt mit $E[x_0] = \mathbf{E}_{x0} \quad \text{Var}[x_0] = \mathbf{P}_0$

- Markoff-Eigenschaft

• Vergleich mit Luenberger-Beobachter:

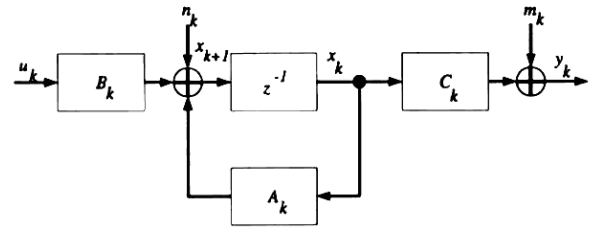
- gemeinsame Zielsetzung: beide schätzen unbekannten Zustandsvektor

- Unterschiede:

Luenberger: Rückkopplungsmatrix zeitinvariant, $|x_k - \hat{x}_k|$ frei bestimmbar / möglichst schnell gegen Null.
Kalman: Rückkopplungsmatrix zeitvariant, $E[|x_k - \hat{x}_k|^2]$ möglichst klein, verrauschte Größen

- gegeben:** verrauschtes System,

Systemgleichungen: $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + n_k$
 $y_k = C_k x_k + m_k$



- gesucht:** Schätzwert minimaler Varianz

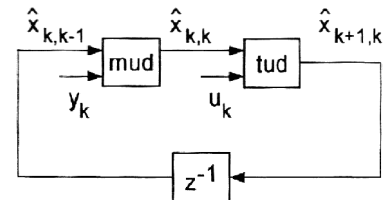
für Zustandsvektor, d.h. $E_{x|y_{mess}} [|x - \hat{x}(y)|^2 | y = y_{mess}] \rightarrow \min$
(Integral dazu siehe S. 358 oben)

- Lösung:** $\hat{x}(y_{mess}) = E[x|y_{mess}] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x|y_{mess}) dx$

- Notation:** $\hat{x}_{k,j} = E[x_k | Y_j]$ mit $Y_j = \{y_0, \dots, y_j\}$,
k Zeitpunkt, zu dem der Zustandsvektor geschätzt werden soll,
j Zeitpunkt des letzten in die Schätzung eingehenden Messwertes.

- j < k: Prädiktion, j = k: Filterung, j > k: Interpolation

- time update (**tud**): $\hat{x}_{k,k-1} = E[x_k | Y_{k-1}]$,
measurement update (**mud**): $\hat{x}_{k,k} = E[x_k | Y_k]$



- Kalman-Gleichungen:**

erstes tud: $\hat{x}_0 = E_{x0}$
 $\Sigma_0 = P_0$

erstes mud: $\hat{x}_{0,0} = \hat{x}_0 + P_0 C_0^T (C_0 P_0 C_0^T + R_0)^{-1} (y_0 - C_0 \hat{x}_0)$ $\Sigma_{0,0} = P_0 - P_0 C_0^T (C_0 P_0 C_0^T + R_0)^{-1} P_0 C_0^T$

nächstes tud: $\hat{x}_{k+1,k} = A_k \hat{x}_{k,k} + B_k u_k$ $\Sigma_{k+1,k} = A_k \Sigma_{k,k} A_k^T + Q_k$

nächstes mud: $\hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + \Sigma_{k,k-1} C_k^T (C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k,k-1})$
 $\Sigma_{k,k} = \Sigma_{k,k-1} - \Sigma_{k,k-1} C_k^T (C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k)^{-1} C_k \Sigma_{k,k-1}$

- Filterstruktur:**

Kalman-Gain $K_k = A_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T (C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$

Innovationssequenz $\tilde{y}_k = (y_k - C_k \hat{x}_{k,k-1})$

damit: $\hat{x}_{k+1,k} = A_k \hat{x}_{k,k-1} + B_k u_k + K_k \tilde{y}_k$

(die „Innovationssequenz“ bestimmt die Abweichung vom gegebenen Messwert zum berechneten Messwert)

- Gleichungen für **skalaren Fall:**

erstes tud: $\hat{x}_0 = E_{x0}$ $\sigma_0 = P_0$

erstes mud: $\hat{x}_{0,0} = \hat{x}_0 + \frac{p_0 c_0 (y_0 - c_0 \hat{x}_0)}{c_0^2 p_0 + r_0}$ $\sigma_{0,0} = p_0 - \frac{p_0^2 c_0^2}{c_0^2 p_0 + r_0}$

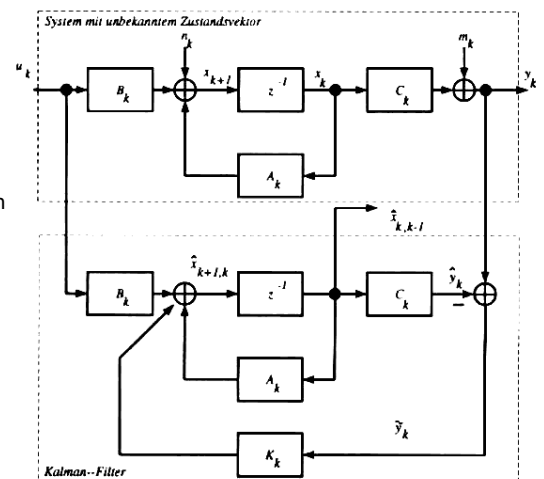
nächstes tud: $\hat{x}_{k+1,k} = a_k \hat{x}_{k,k} + b_k u_k$ $\sigma_{k+1,k} = a_k^2 \sigma_{k,k} + q_k$

nächstes mud: $\hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + \frac{\sigma_{k,k-1} c_k (y_k - c_k \hat{x}_{k,k-1})}{c_k^2 \sigma_{k,k-1} + r_k}$ $\sigma_{k,k} = \sigma_{k,k-1} - \frac{\sigma_{k,k-1}^2 c_k^2}{c_k^2 \sigma_{k,k-1} + r_k}$

Kalman-Gain: $K_k = \frac{a_k \sigma_{k,k-1} c_k}{c_k^2 \sigma_{k,k-1} + r_k}$, Innovationssequenz: $\tilde{y}_k = (y_k - c_k \hat{x}_{k,k-1})$

- Sonderfälle:** $R = 0$ kein Messrauschen, Messwert wird maximal gewichtet (wie beim Luenberger-Beob.)
 $Q = 0$ kein Systemrauschen, Varianz des Schätzwertes geht ohne Berücksichtigung des Messwertes für $k \rightarrow \infty$ gegen Null vgl. F98 Aufg. 6 d)

„stationärer Endwert der Varianz“ vgl. z.B. H01 A6(e)



Adaptive Systeme

- **Einordnung** siehe S. 369
- Modellierung eines unbekannten linearen, zeitdiskreten Systems als **FIR**- oder **IIR**-Filter
- Adaptionalgorithmus, der die unbekannten Koeffizienten z.B. nach Least Mean Square Error (**LMSE**) schätzt
- für **FIR-Systemmodell** (Vorteil: inhärent stabil):
 - $g_i(k)$ Filterkoeffizienten (vgl. Abb. 23.2 S.371)
 - mit Vektorschreibweise, z.B. $\mathbf{g}(k) = (g_0(k) \ g_1(k) \ \dots \ g_N(k))^T$, folgt $\hat{y}(k) = \mathbf{g}^T(k) \cdot \mathbf{u}(k)$
 - $\mathbf{R}_{uu} = E[\mathbf{u}(k)\mathbf{u}^T(k)] = \begin{pmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(1) & \dots & r_{uu}(N) \\ r_{uu}(1) & & & r_{uu}(N-1) \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{uu}(N) & \dots & & r_{uu}(0) \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}_{yu} = E[y(k)\mathbf{u}(k)] = \begin{pmatrix} r_{yu}(0) \\ r_{yu}(1) \\ \vdots \\ r_{yu}(N) \end{pmatrix}$
 $r_{uu}(n) = E[u(k) \cdot u(k-n)]$
 z.B. für $u(k) = \mathbf{f}^T \mathbf{w}(k)$ und $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^2$:

$$r_{uu}(n) = E[\mathbf{f}^T \mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{f}^T \mathbf{w}(k-n)] = E[\mathbf{f}^T \mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{w}(k-n)^T \mathbf{f}]$$

$$= \mathbf{f}^T E[\mathbf{w}(k) \cdot \mathbf{w}(k-n)^T] \mathbf{f} = \mathbf{f}^T E \begin{bmatrix} w_k w_{k-n} & w_k w_{k-n-1} \\ w_{k-1} w_{k-n} & w_{k-1} w_{k-n-1} \end{bmatrix} \mathbf{f}$$

$$\Rightarrow r_{uu}(0) = \mathbf{f}^T E \begin{bmatrix} w_k^2 & w_k w_{k-1} \\ w_{k-1} w_k & w_{k-1}^2 \end{bmatrix} \mathbf{f} \text{ etc.}$$
 - **Fehler:** $E[e^2(k)] = E[(y_k - \hat{y}_k)^2] = E[y^2] - 2\mathbf{g}^T \mathbf{R}_{yu} + \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{uu} \mathbf{g}$
 - Fehler wird **minimal** für $\mathbf{g} = \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{R}_{yu}$ (sofern \mathbf{R}_{uu}^{-1} existiert) $\Rightarrow E[e^2(k)] = E[y^2] - 2\mathbf{g}^T \mathbf{R}_{yu} + \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{uu} \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{R}_{yu}$

$$= E[y^2] - 2\mathbf{g}^T \mathbf{R}_{yu} + \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{yu}$$

$$= E[y^2] - \mathbf{g}^T \mathbf{R}_{yu}$$
 - Ersetzen der Erwartungswertbildung durch Mittelung
 - iteratives Verfahren: „Gradientenverfahren“ vgl. S.377f
 - ... $\mathbf{g}(k+1) = \mathbf{g}(k) + 2\Gamma e(k)\mathbf{u}(k)$ mit $\Gamma = \text{diag}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$ Diagonalmatrix mit wählbaren Koeffizienten (<1)
 - γ_i klein: gute Mittelung der Messwerte, aber: langsame Adaption
 γ_i groß (nahe 1): schnelle Adaption, schnelles Abklingen eines Fehlers, aber: empfindlicher gegen Messrauschen.
- für **IIR-Systemmodell** (Nachteil: kann instabil werden) vgl. S. 379f

Matrizenrechnung

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^T = a$$