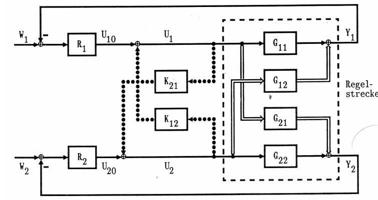
Linearisierung: $\boxed{y = f(u) = f(U_0) + \left.\frac{df}{du}\right|_{u=U_0} (u-U_0)} + \left.\frac{d^2 f}{du^2}\right|_{u=U_0} \frac{(u-U_0)^2}{2} + \ldots$

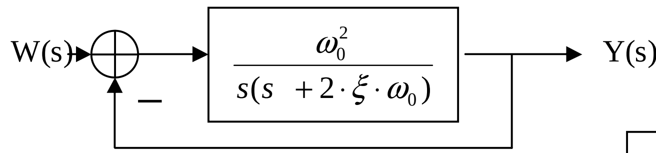


Endwerttheorem : $y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s)$

Sprung: W(s) = K/s ; Rampe W(s) = K/s^2 ;

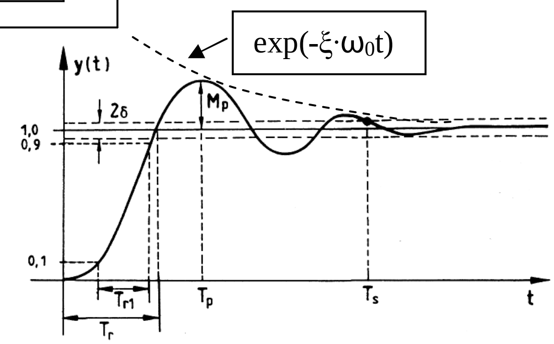
$K_{21} = -G_{21}/G_{22}$
$K_{12} = -G_{12}/G_{11}$

$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 s + \omega_0^2}$



$T_s \approx \frac{3}{\xi \cdot \omega_0}$

$M_p = e^{-\frac{\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\pi / \ln M_p\right)^2}}$

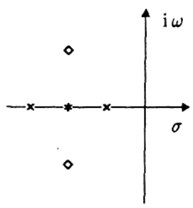


$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \xi = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{T_p \cdot \omega_0}\right)^2}$

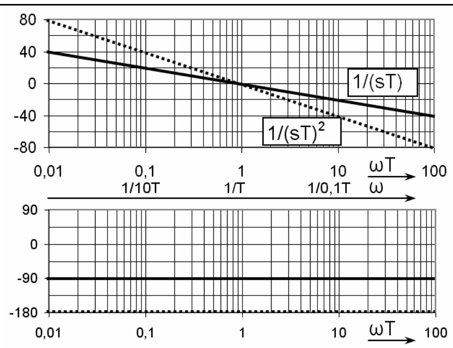
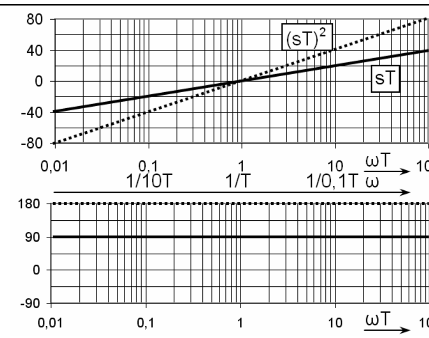
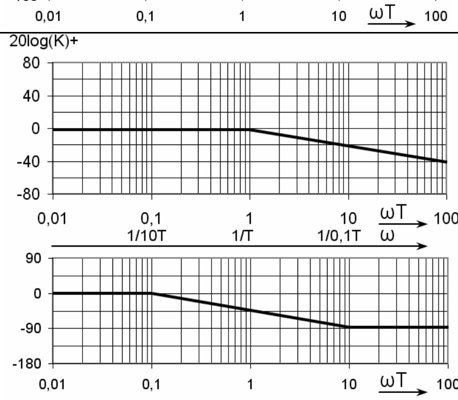
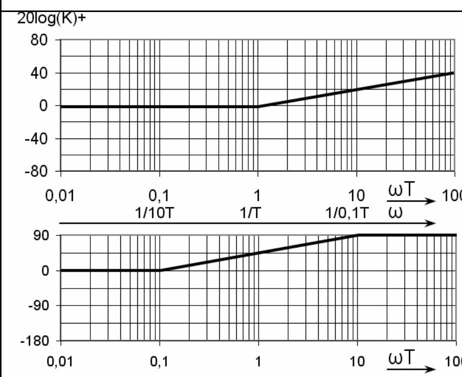
$T_r = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \left[\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right]$

T_r, T_{r1} : Anstiegszeit ('Rise time')
T_p : Überschwingzeit ('Peak time')
T_s : Einstellzeit ('Settling time')
M_p : Max. Überschwingung ('Peak overshoot')

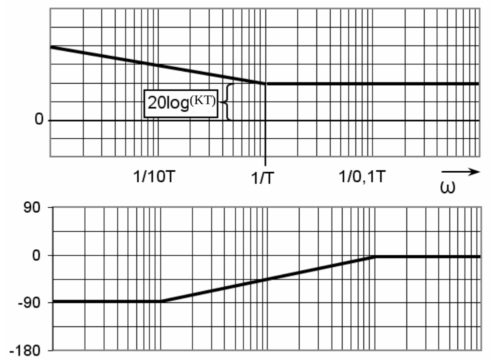
$\xi \approx 0{,}01 \varphi_R \quad \varphi_R - in\,Grad$ -
Wenn ein dominantes Polpaar existiert



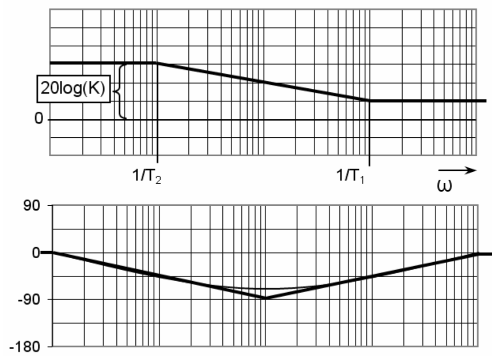
$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \begin{cases} i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} & \zeta < 1 \text{ unterkritische Dämpfung } \diamond \\ 0 & \zeta = 1 \text{ kritische Dämpfung } * \\ \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} & \zeta > 1 \text{ überkritische Dämpfung } \times \end{cases}$

$G(s)=\frac{1}{sT}=$ $\left(\frac{1/T}{s}=\frac{K}{s}\right)$ $G(s)=\frac{1}{(sT)^2}$		G(s) = sT G(s) = (sT)^2	
$G(s)=\frac{K}{1+sT}$ $=\frac{K/T}{1/T+s}$		G(s)= K(1+sT)	

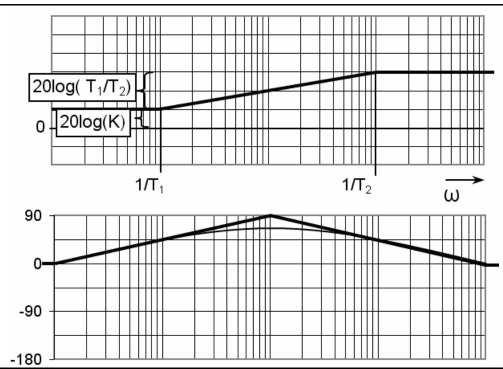
G(s) = T(s) / [1-T(s)]   E(s) = 1-T(s)

<table>
<tr>
<td>G(s)=
$= \dfrac{K(1+sT)}{s}$
(ideal PI-R)</td>
<td>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>G(s)=
$= \dfrac{K(1+sT_1)}{(1+sT_2)}$

$T_1 < T_2$
$T_2 = \alpha T_1$

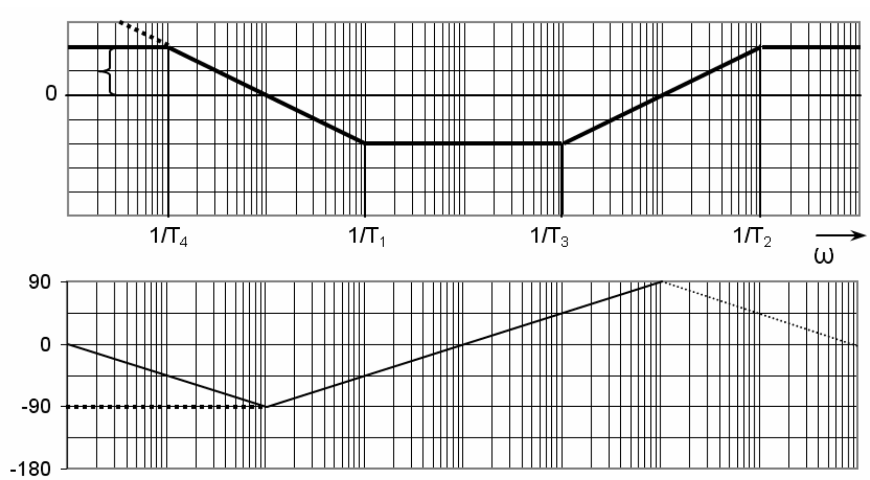
(real PI-R)</td>
<td>
</td>
<td colspan="2">$\omega_{MITTE} = \sqrt{\dfrac{1}{T_1T_2}} = \dfrac{1}{T_1\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{T_2}$
1) e(∞) = f(K) = gegeb. Wert -> K
2) Bode-D. aufzeichnen für K*G(s)
3) φ_R + 5% -> ω_D
4) z =$-1/T_1$ = -0,1 ω_D - Nullstelle eine Dekade tiefer ω_D
5) Bestimme K_a (Abschwäch. für $\omega = \omega_D$) -> $\alpha = 10^{\lvert K_\alpha / 20 \rvert}$
6) p = $-1/T_2$= -0,1ω_D / α</td>
</tr>
<tr>
<td>G(s)=
$= \dfrac{K(1+sT_1)}{(1+sT_2)}$

$T_1 > T_2$
$T_1 = \alpha T_2$

(real PD-R)</td>
<td>
</td>
<td colspan="2">$\omega_{MITTE} = \sqrt{\dfrac{1}{T_1T_2}} = \dfrac{1}{T_2\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{T_1}$
1) e(∞) = f(K) = gegeb. Wert -> K
2) Bode-D. aufzeichnen für K*G(s)
3) $\varphi_{Add} = \varphi_R$ + 5% -> $\alpha = \dfrac{1+\sin(\varphi_{ADD})}{1-\sin(\varphi_{ADD})}$ $\varphi_{ADD} = \arcsin\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$
4) ω_D= ω, bei der K*G(s) == -10log(α)
5) $1/T_2 = \omega_D \cdot \sqrt{\alpha}$ - Polstelle
    $1/T_1 = \omega_D / \sqrt{\alpha}$ - Nullstelle</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
</table>

Realer PID-Regler G(s) = $\dfrac{K}{s}\cdot(1+sT_1)\cdot\dfrac{(1+sT_3)}{(1+sT_2)} = \dfrac{K}{s}\cdot(1+sT_1)\cdot\dfrac{(1+s\cdot\beta\cdot T_2)}{(1+sT_2)}$ $T_1 > T_3 > T_2$ $\beta > 1$

Modifizierter PID-R G(s) = $K\cdot\dfrac{(1+sT_1)}{(1+sT_4)}\cdot\dfrac{(1+sT_3)}{(1+sT_2)} = K\cdot\dfrac{(1+sT_1)}{(1+s\cdot\alpha T_1)}\cdot\dfrac{(1+s\cdot\beta T_2)}{(1+sT_2)}$ $T_4 > T_1 > T_3 > T_2$ $\alpha > 1$



$$G_0(s) = K\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-z_k)}{s^N\cdot\prod_{n=1}^{Q}(s-p_n)}\ ,\quad M \le N+Q$$

Systemtyp N	e(t→∞) für W(s)=		
	A/s (sprung)	B/s² (Rampe)	C/s³ (parable)
0	$A/(1+K_0)$	∞	∞
1	0	B/K_0	∞
2	0	0	C/K_0

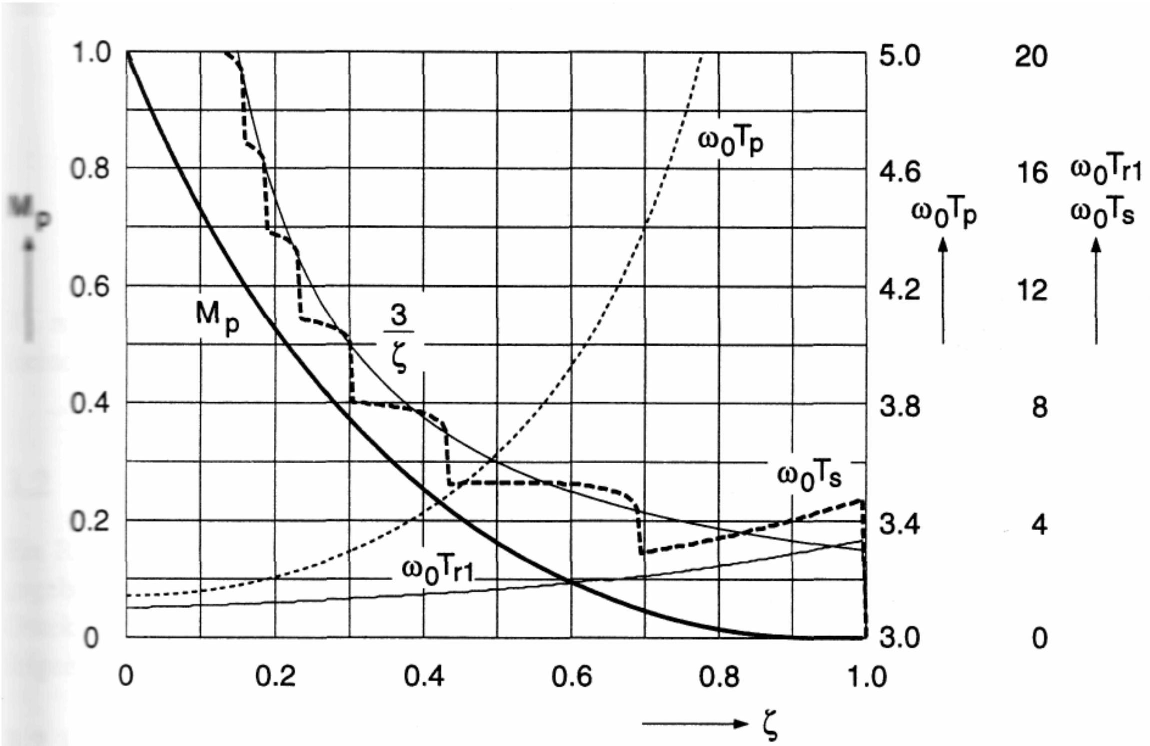
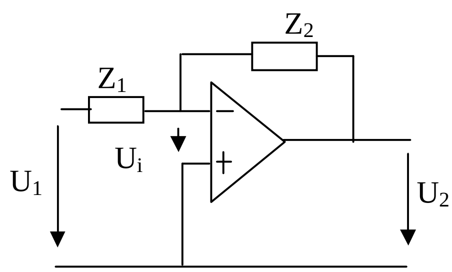


Fig. 3.6 Maximale Überschwingung M_p, Überschwingzeit T_p, Anstiegszeit T_r und Einstellzeit T_s bei $\delta = 0,05$ für ein System 2. Ordnung (Gl.3.9)

$e^{j\cdot\omega} = \cos(\omega) + j \cdot \sin(\omega)$ $\quad$ $-1 = e^{j\cdot(2\cdot n+1)\pi}$, n = 0,±1, ±2, … $\quad$ $e^{a*\ln(b)} = b^a$

$$\frac{U_1 - U_i}{Z_1} + \frac{U_2 - U_i}{Z_2} = \frac{U_i}{Z_e} \qquad \frac{U_2}{U_i} = -A(j\omega)$$

$$(Ze \to \infty) \Rightarrow U_i = U_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$



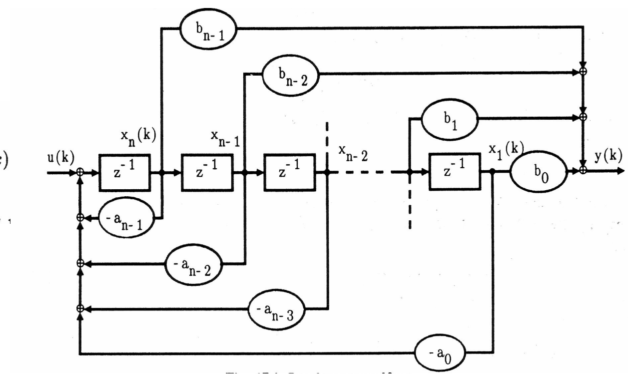
Z_1	Z_2	$G(s)=-Z_2/Z_1$	
R_1	R_2	$-R_2/R_1$	P-R
R_1	$R_2 + 1/sC_2$	$-\frac{1+s(R_2 \cdot C_2)}{s(R_1 \cdot C_2)}$	Ideal PI-R
R_1	$1/sC_2$	$-1/(sR_1C_2)$	I
$R_1 + 1/sC_1$	R_2	$-\frac{s(R_2 \cdot C_1)}{1+s(R_1 \cdot C_1)}$	
$R_1 + 1/sC_1$	$R_2 + 1/sC_2$	$-\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{1+s(R_2 \cdot C_2)}{1+s(R_1 \cdot C_1)}$	$R_2C_2 > R_1C_1$ – real PD-R $R_2C_2 < R_1C_1$ – real PI-R

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots+b_{n-1}z^{n-1}}{a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n}$$

Regelungsnormalform

$$x(k+1)\,\hat{=}\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\x_n(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&&&&\vdots\\0&0&0&1&&&\\\vdots&&&&&\ddots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&&&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}u(k)$$

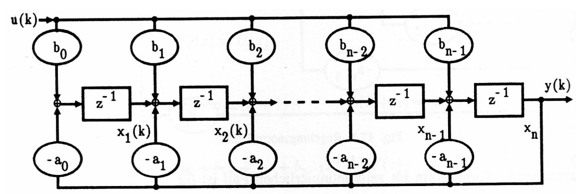
$$y(k)=\begin{pmatrix}b_0, & b_1, & \cdots & b_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{pmatrix}$$



Beobachternormalform

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\x_n(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&&0&-a_0\\1&0&0&&&-a_1\\0&1&0&&&\vdots\\&&&\ddots&&\\0&0&0&&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\\vdots\\b_{n-1}\end{pmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{pmatrix}0, & 0, & \cdots, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{pmatrix}$$

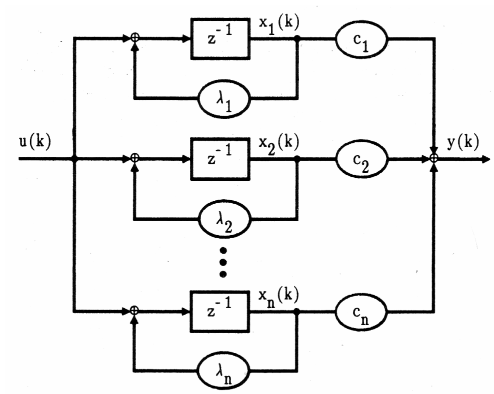


Jordanische Normalform (einfache pole)

$$G(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{z-\lambda_i}$$

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\\vdots\\\\x_n(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&&\\0&\lambda_2&0&&\\0&0&\lambda_3&&\\&&&\ddots&\\0&0&0&&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\\\x_n(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\\\1\end{pmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{pmatrix}c_1, & c_2, & \cdots, & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\\vdots\\\\x_n(k)\end{pmatrix}$$



Aquivalentes zeitdiskretes Model

$$\dot{x}=Fx+Gu \qquad y=Hx+Du$$

$$1)\quad \Psi(s)=[Is-F]^{-1} \qquad \Psi(s)\xrightarrow{InvLaplace}\Psi(T)$$

$$2)\quad A=\Psi(T) \qquad B=\int_0^T\Psi(\xi)\cdot G\cdot d\xi \qquad C=H$$

Lösung der Zustandgleichungen

im Zeitbereich

$$y(k)=\underbrace{CA^k x(0)}_{\text{Autonomer Anteil}}+\underbrace{\sum_{j=0}^{k-1}CA^{k-1-j}Bu(j)+Du(k)}_{\text{Erzwungener Anteil}}$$

mit V-Transformation

$$Y(V)=[C(IV^{1}-A)^{-1}B+D]U(V)$$

Steuerbarkeit (->X_0) , Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit

Zeitdiskrete Systeme

Q_s = [$A^{n-1}B$, $A^{n-2}B$, …., AB, B] $\quad Q_B=\left\{\begin{matrix}C\\CA\\\ldots\ldots\\CA^{n-1}\end{matrix}\right\}$

	det A $\neq$ 0	det A = 0
Rang Q_s = n	Steuerbar Erreichbar	Steuerbar Erreichbar
Rang Q_s < n	Nicht steuerbar Nicht erreichbar	Vielleicht steuerbar (keine Aussage) Nicht erreichbar

Zeitkontinuirliche Systeme

(errechbarkeit == steuerbarkeit)

Q_s = [G, FG, …. F^{n-1}G]

$Q_B=\left\{\begin{matrix}H\\HF\\\ldots\\HF^{n-1}\end{matrix}\right\}$

Duale Systeme

System $(A,\ B,\ C)$ — System ist vollständig beobachtbar, wenn das duale System vollständig erreichbar

Duales System $(A^T,\ C^T,\ B^T)$

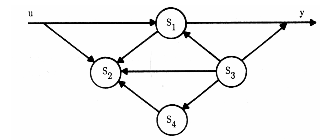
Änliche (algebraisch äquivalente systeme)

$A^* = S^{-1}AS$ $\qquad x(k) = S\,x^*(k)$

$B^* = S^{-1}B$

$C^* = CS$ $\qquad$ Zerlegung in Unterräume

$D^* = D$



Unterraum	beobachtbar	erreichbar
S_1	ja	ja
S_2	nein	ja
S_3	ja	nein
S_4	nein	nein

Bestimmung der Basistransformationsmatrix S auf Regelungsnormalform

1) $B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **2**) $\det[zI-A] = a_0+a_1z+a_2z^2+ \dots +a_{n-1}z^{n-1} + z^n \;\longrightarrow\; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ .. & & 0 & & 0 \\ .. & & & .... & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots\dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

3) $s_n = B$

$s_{n-1} = a_{n-1}B+AB$

$s_{n-2} = A^2B+a_{n-1}AB+a_{n-2}B$

für $0 \le j < n-1 \longrightarrow$ $\qquad s_{n-j} = (\underbrace{A^jB \quad A^{j-1}B \ \dots\ AB \ \ B}_{j+1}) \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_{n-j} \end{pmatrix}$ $j+1$ $\qquad s_1 = (A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \ \dots\ AB \ \ B) \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots. \\ a_1 \end{pmatrix}$

$S = (s_1 \ \ s_2 \ \ s_3 \ \dots\ s_n) = S = (\underbrace{A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \cdots \quad AB \quad B}_{\text{Steuerbarkeitsmatrix } Q_S}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$

4) $C^* = CS$ und $D^* = D$

Minimale Äquivalenete Systeme

<u>Gegeben ist System</u> $\sum$

$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$

$y(k) = Cx(k)$

x : n –dimensionaler Zustandvektor

<u>Minimales System</u> $\sum^*$

$x^*(k+1)=A^*x^*(k)+B^*u(k)$

$y(k) = C^*x^*(k)$

x : m –dimensionaler Zustandvektor, $m \le n$

<u>Äquivalenzgesetze</u> $A^*R = RA \qquad B^* = RB \quad C = C^*R \qquad D^* = D$

1) $m = \text{Rang}\,(Q_B) = \text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ $\qquad$ **2**) $R = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix}$ $\qquad$ **3**) A^* hat Form: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & \dots & -a_{m-1}^* \end{pmatrix}$

4) Koeffizientenvergleich $A^*R = RA \;\longrightarrow\; A^*$ $\qquad (A^* = RAR^\dagger$, $R^\dagger$ - Pseudoinverse)

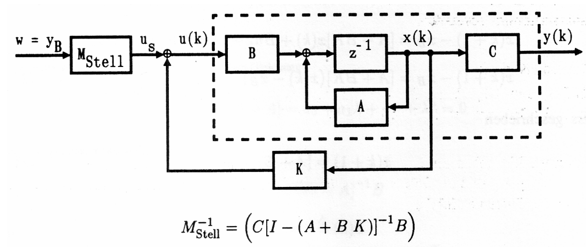
5) $C^* = (\underbrace{1\ 0\ 0}_{m}\ ..)$ $\qquad B^*=RB \qquad D^* = D$

Einige Matrizenrechenregeln :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regelung im Zustandraum

RNF: $A^*+B^*K^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & 0 \\ ... & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0^*+k_0^* & -a_1^*+k_1^* & -a_2^*+k_2^* & ... & -a_{n-1}^*+k_{n-1}^* \end{pmatrix}$



Suche nach K

1) Bestimme $\boldsymbol{a_i}$ (0≤i≤n-1) aus det[$\boldsymbol{I}$·z-$\boldsymbol{A}$] = $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = (z-\lambda_1)(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$

2) Festlege gewünschte $\tilde{\lambda}_i$ (1≤i≤n) und berechne $\tilde{a}_i$ (0≤i≤n-1) aus $(z-\tilde{\lambda}_1)(z-\tilde{\lambda}_2)..(z-\tilde{\lambda}_n) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z + ... + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n$

3) Berechne $k_0^* = a_0 - \tilde{a}_0 \quad k_1^* = a_1 - \tilde{a}_1 \quad .... \; k_{n-1}^* = a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1} \;\rightarrow\;$ $\mathbf{K}^*$ = $(k_0^* \;\; k_1^* \;\ldots\; k_{n-1}^*)$

4) Bestimme S

$$S = \underbrace{\begin{pmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix}}_{\text{Steuerbarkeitsmatrix } Q_S} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

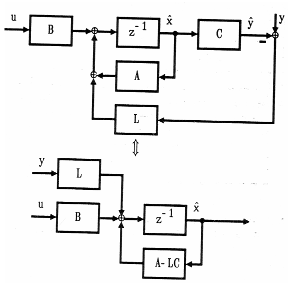
5) $K = K^* S^{-1}$

Dead-Beat-Verhalten $K^* = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ - <u>Alle Pole des Gesamtsystems p_i=0</u> (Dead-Beat Regler, FIR-Filter, Endliche StoßAntwort)

Luenberger Beobachter

$e(k+1) = (A-LC)\, e(k)$

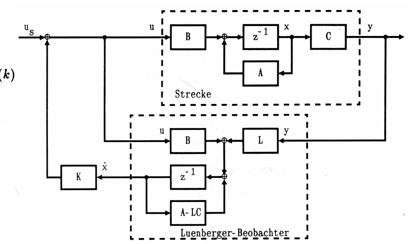
$A_L \leftarrow A^T$
$B_L \leftarrow -C^T$
$K_L \leftarrow L^T$
det[zI-(A-LC)] =
= det [zI – $(A_L+B_L C_L)$]



Regelung mit geschätztem Vektor

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{pmatrix}}_{x_{\text{tot}}(k+1)} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} A & BK \\ LC & A-LC+BK \end{array}\right)}_{A_{\text{tot}}} \underbrace{\begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix}}_{x_{\text{tot}}(k)} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix}}_{B_{\text{tot}}} u_s(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\left(C \mid 0\right)}_{C_{\text{tot}}} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix}$$



<u>Seperationseigenschaft</u>:

$\chi_{A\text{tot}}(z) = \det[zI - A_{\text{tot}}] = \det[zI-(A+BK)] \cdot \det[zI-(A-LC)]$

Suche nach L

1) Bestimme $\boldsymbol{a_i}$ (0≤i≤n-1) aus det[$\boldsymbol{I}$·z-$\boldsymbol{A}$] = $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = (z-\lambda_1)(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)$

2) Festlege gewünschte $\tilde{\lambda}_i$ (1≤i≤n) und berechne $\tilde{a}_i$ (0≤i≤n-1) aus $(z-\tilde{\lambda}_1)(z-\tilde{\lambda}_2)..(z-\tilde{\lambda}_n) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z + ... + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n$

3) Berechne $l_0^* = a_0 - \tilde{a}_0 \quad l_1^* = a_1 - \tilde{a}_1 \quad .... \; l_{n-1}^* = a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1} \;\rightarrow\;$ $\mathbf{L}^*$ = $(l_0^* \;\; l_1^* \;\ldots\; l_{n-1}^*)$

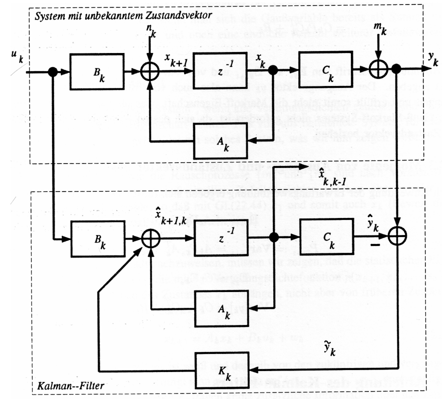
4) Bestimme $Q_s = \left(-A^{T^{n-1}}C^T, ..., -A^T C^T, -C^T\right)$

4) Bestimme $S = Q_s \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} = \left(-A^{T^{n-1}}C^T, ..., -A^T C^T, -C^T\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$

5) $L = (L^* S^{-1})^T$

Dead-Beat-Verhalten $L^* = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$

Kalman Filter



Markoff-Eigenschaft :

$p(x_k | x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0) = p(x_k | x_{k-1})$

$\rightarrow \; p(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_0) = p(x_k | x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} | x_{k-2}) \cdot \ldots \cdot p(x_1 | x_0) \cdot p(x_0)$

Schätzwert mit minimaler bedingter Fehlervarianz : $\hat{x}(y) = E_{x|y}$

$\hat{x}_{k,j}(y) = E\lfloor x_k \,|\, Y_j \rfloor \qquad Y_k = [y_0, \ldots, y_j]$

k – Zeitpunkt, zu dem Zustandvektor geschätz werden soll

j – Zeitpunkt des letzten in die Schätzung eingehndn Meßwertes

Randbedingungen:

System linear, zeitdiskret, erfüllt *Gauß-Markoff-Eigenschaft*

Rauschen mittelwertfrei, weiß, *gauscheß Rauschen*, unkorreliert

Gleichungen:

1. measurement update:

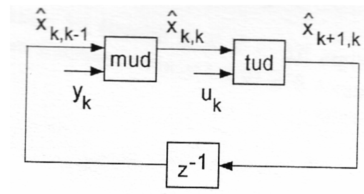
(a) $\hat{x}_{k,k} = \hat{x}_{k,k-1} + \Sigma_{k,k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k\right)^{-1} \cdot (y_k - C_k \hat{x}_{k,k-1})$

(b) $\Sigma_{k,k} = \Sigma_{k,k-1} - \Sigma_{k,k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k\right)^{-1} C_k \Sigma_{k,k-1}$

2. time update:

(a) $\hat{x}_{k+1,k} = A_k \hat{x}_{k,k} + B_k u_k$

(b) $\Sigma_{k+1,k} = A_k \Sigma_{k,k} A_k^T + Q_k$



Anfangsbedingungen (entsp. ersten tud):

$$\hat{x}_0 = \mathbf{E}[x_0] = \mathbf{E}_{x_0}$$

$$\Sigma_0 = \mathbf{E}\left[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[(x_0 - \mathbf{E}_{x_0})(x_0 - \mathbf{E}_{x_0})^T\right] = P_0$$

$$\hat{x}_{0,0} = \mathbf{E}[x_0 | Y_0]$$

$$= \hat{x}_0 + P_0 C_0^T \left(C_0 P_0 C_0^T + R_0\right)^{-1} \cdot (y_0 - C_0 \hat{x}_0)$$

$$\Sigma_{0,0} = P_0 - P_0 C_0^T \left(C_0 P_0 C_0^T + R_0\right)^{-1} P_0 C_0^T$$

Filterstruktur:

$$\hat{x}_{k+1,k} = A_k \hat{x}_{k,k-1} + B_k u_k +$$

$$+ \underbrace{A_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k,k-1} C_k^T + R_k\right)^{-1}}_{\text{Kalman - Gain } K_k} \cdot \underbrace{(y_k - C_k \hat{x}_{k,k-1})}_{\text{Innovationssequenz } \tilde{y}_k}$$

LAPLACE-TRANS.

	$F(s)$	$f(t), \quad t \geq 0$
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\frac{1}{s}$	1
3.	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
4.	$\frac{1}{(s+a)}$	e^{-at}
5.	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$
6.	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
7.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
8.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}\left[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}\right]$
9.	$\frac{ab}{s(s+a)(s+b)}$	$1-\frac{b}{(b-a)}e^{-at}+\frac{a}{(b-a)}e^{-bt}$
10.	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
11.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
12.	$\frac{ab(s+\alpha)}{s(s+a)(s+b)}$	$\alpha-\frac{b(\alpha-a)}{(b-a)}e^{-at}+\frac{a(\alpha-b)}{(b-a)}e^{-bt}$
13.	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$
14.	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
15.	$\frac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\phi), \qquad \phi=\arctan\frac{\omega}{\alpha}$
16.	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
17.	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$

$1/(1+sT) \approx \exp(-sT) \quad \delta(T)$

	$F(s)$	$f(t), \quad t \geq 0$
18.	$\frac{s+\alpha}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\left[(\alpha-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$, $\phi=\arctan\frac{\omega}{\alpha-a}$
19.	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t, \quad \zeta<1$
20.	$\frac{1}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\frac{1}{a^2+\omega^2}-\frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-at}\sin(\omega t-\phi)$, $\phi=\arctan\frac{\omega}{-a}$
21.	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi\right]$, $\phi=\arccos\zeta, \quad \zeta<1$
22.	$\frac{s+\alpha}{s\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\frac{\alpha}{a^2+\omega^2}+\frac{1}{\omega}\left[\frac{(\alpha-a)^2+\omega^2}{a^2+\omega^2}\right]^{1/2}e^{-at}\sin(\omega t+\phi)$, $\phi=\arctan\frac{\omega}{\alpha-a}-\arctan\frac{\omega}{-a}$
23.	$\frac{1}{(s+c)\left[(s+a)^2+\omega^2\right]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c-a)^2+\omega^2}+\frac{e^{-at}\sin(\omega t+\phi)}{\omega\left[(c-a)^2+\omega^2\right]^{1/2}}, \quad \phi=\arctan\frac{\omega}{c-a}$
24.	$\frac{s\cdot\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$-\frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t-\phi\right]$, $\phi=\arccos\zeta, \quad \zeta<1$
25.	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left(e^{-at}+at-1\right)$
26.	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}-ate^{-at}$

Differentiation und Integration der Funktion $y(t)$:

$$y^{(n)}=\frac{d^n y(t)}{dt^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^n Y(s)-\left[s^{n-1}y(0)+s^{n-2}y'(0)+\cdots+y^{(n-1)}(0)\right]$$

$$\int_0^t y(\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}Y(s)$$

Endwerttheorem (gilt nur, sofern der zeitliche Grenzwert existiert!):

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} sY(s)$$

Z-TRANS.

$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s)$	$f(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\Delta(k)$	1
1┌	$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	k^2T^2	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{z\left(e^{-aT}-e^{-bT}\right)}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega kT$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega kT$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akT}\sin\omega kT$	$\frac{z\cdot e^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2z\cdot e^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-akT}\cos\omega kT$	$\frac{z^2-z\cdot e^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2z\cdot e^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

Rechenregeln zur z-Transformation

Definition:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Linearität:

$$a_1f_1(k)+a_2f_2(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$$

Faltungsgesetz:

$$\sum_{i=0}^{k} f_1(i)f_2(k-i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(z)F_2(z)$$

Verschiebungssätze:

$$f(k-m) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-m}F(z)$$

$$f(k+m) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^mF(z)-\sum_{i=0}^{m-1} f(i)z^{m-i}$$

Summenregel:

$$g(k)=\sum_{i=0}^{k} f(i) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad G(z)=\frac{z}{z-1}F(z)$$

Multiplikation mit k:

$$kf(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$k^2f(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad +z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z)+z\frac{d}{dz}F(z)$$

Anfangswerttheorem:

$$\lim_{k\to 0} f(k)=\lim_{z\to\infty} F(z) \text{ , wenn } \lim F(z) \text{ existiert.}$$

Endwerttheorem:

$$\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Wichtig: Der Grenzwert muß existieren.

Fourier - Transformation

Tabelle 4 Fourier-Transformationen einfacher Zeitfunktionen

	$f(t)$	$F(j\omega)$
1.	$a \cdot \delta(t)$	a
2.	a	$2\pi a \delta(\omega)$
3.	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
4.	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
5.	$a \cdot \mathrm{rect}(t/T)$	$a \cdot T \cdot \mathrm{si}(\omega T/2)$
6.	$a \cdot \mathrm{tri}(t/T)$	$a \cdot T \cdot \mathrm{si}^2(\omega T/2)$
7.	$\mathrm{si}(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \mathrm{rect}(\omega/2\omega_0)$
8.	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)]$
9.	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)]$
10.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
11.	$\varepsilon(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{j\omega + a}$
12.	$\varepsilon(t) \cdot e^{-at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(j\omega+a)^n}$
13.	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
14.	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
15.	$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$(j\omega)^n$
16.	$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{\omega^2}$
17.	t^n	$2\pi j^n \frac{d^n}{d\omega^n}\delta(\omega)$
	$\mathrm{si}^2(\omega_0 t)$	$\pi/\omega_0 \cdot \mathrm{tri}(\omega/2\omega_0)$
	$\delta(t-T_0)$	$\exp(-j\omega T_0)$

Tabelle 5 Rechenregeln der Fourier-Transformation

Transformations-Paar:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

Existenz des Fourier-Integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$$

Linearität:

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad k_1 F_1(j\omega) + k_2 F_2(j\omega)$$

Dualität:

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(j\omega)$$

$$\underline{F(jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi f(-\omega)}$$

Ähnlichkeitssatz (Zeitskalierung):

$$f(at) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right), \quad a \text{ reell und } a > 0$$

Frequenzskalierung:

$$F(jb\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{|b|}f\left(\frac{t}{b}\right), \quad b \text{ reell und } b > 0$$

Normierung und Zeit-Bandbreite-Produkt:

$$f\left(\frac{t}{t_n}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad t_n \cdot F(j\omega t_n)$$

$$f(t\omega_n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{\omega_n} \cdot F\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$t_n = \frac{1}{\omega_n}$$

!

Verschiebungssatz (Zeitverschiebung):

$$f(t-t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(j\omega)\exp(-j\omega t_0)$$

Modulationssatz (Frequenzverschiebung):

$$f(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(j\omega - j\omega_0)$$

Konjugiert komplexe Zeitfunktion:

$$f^*(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F^*(-j\omega)$$

Differentiation:

$$\frac{d}{dt}f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad j\omega \cdot F(j\omega)$$

Integration:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi \cdot F(j0)\delta(j\omega)$$

Faltung im Zeitbereich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)dt = f_1(t) * f_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

Faltung im Frequenzbereich:

$$F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \underline{2\pi} \cdot f_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$tri\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_0}} rect\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] * \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_0}} rect\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

$$tri\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{T}} rect\left(\frac{t}{T}\right)\right] * \left[\frac{1}{\sqrt{T}} rect\left(\frac{t}{T}\right)\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - T_1) \mapsto \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \cdot e^{-j\omega T_1}$$

Primitive Polynome (primitiv -> irreduzible)

$V+1$

V^2+V+1

$V^3 + V + 1$
$V^3 + V^2 + 1$

$V^4 + V + 1$
$V^4 + V^3 + 1$

$V^5 + V^2 + 1$
$V^5 + V^3 + 1$

$V^5 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^5 + V^4 + V^2 + V + 1$
$V^5 + V^4 + V^3 + V + 1$
$V^5 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$

$V^6 + V + 1$
$V^6 + V^5 + 1$
$V^6 + V^5 + V^2 + V + 1$
$V^6 + V^4 + V^3 + V + 1$
$V^6 + V^5 + V^4 + V + 1$
$V^6 + V^5 + V^3 + V^2 + 1$

$V^7 + V + 1$
$V^7 + V^3 + 1$
$V^7 + V^4 + 1$
$V^7 + V^6 + 1$
$V^7 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^7 + V^5 + V^2 + V + 1$
$V^7 + V^5 + V^3 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^3 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^4 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^4 + V^2 + 1$
$V^7 + V^6 + V^5 + V^2 + 1$
$V^7 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$
$V^7 + V^5 + V^4 + V^3 + 1$
$V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + 1$
$V^7 + V^5 + V^4 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^5 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + V^2 + V + 1$
$V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$

$V^8 + V^7 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^5 + V^3 + V + 1$
$V^8 + V^6 + V^5 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V + 1$
$V^8 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^5 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^6 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^7 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^6 + V^5 + V^2 + 1$
$V^8 + V^6 + V^5 + V^3 + 1$
$V^8 + V^7 + V^5 + V^3 + 1$
$V^8 + V^6 + V^5 + V^4 + 1$
$V^8 + V^6 + V^4 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^5 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + V^2 + 1$

Irreduzible Polynome (aber NICHT primitive)

$V^8 + V^6 + V^5 + V^4 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^5 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^4 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^3 + V + 1$
$V^8 + V^4 + V^3 + V + 1$
$V^8 + V^5 + V^4 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^5 + V^4 + V^3 + 1$
$V^8 + V^5 + V^4 + V^3 + 1$
$V^8 + V^7 + V^5 + V^4 + 1$
$V^8 + V^7 + V^6 + V^4 + V^3 + V^2 + 1$
$V^8 + V^7 + V^5 + V + 1$
$V^8 + V^7 + V^4 + V^3 + V^2 + V + 1$
$V^8 + V^6 + V^5 + V^4 + V^3 + V + 1$

V-transformation

$\{0,1,0,0, \ldots\} \longrightarrow\bullet\ V$
$\{1,0,0,0,\ldots\} \longrightarrow\bullet\ \underline{1}$

Rücktransformation

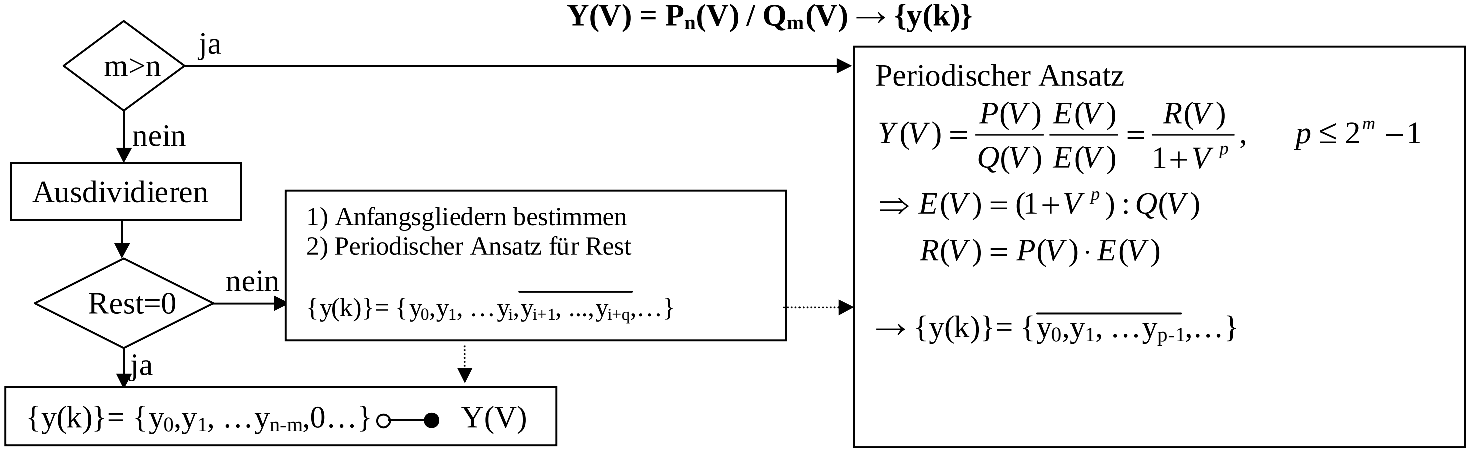
$$F = \frac{B}{A} = \frac{b_0 1 + b_1 V + b_2 V^2 + b_3 V^3 \ldots + b_n V^n + \ldots}{a_0 1 + a_1 V + a_2 V^2 + a_3 V^3 \ldots + a_n V^n + \ldots}$$

$$f_0 = \frac{b_0}{a_0}; \quad f_1 = \frac{b_1}{a_0} - f_0 \frac{a_1}{a_0}; \quad f_2 = \frac{b_2}{a_0} - f_1 \frac{a_1}{a_0} - f_0 \frac{a_2}{a_0};$$

Verschiebungsätze

$F_{-k} \triangleq V^k F$ *-Rechtsverschiebung*
$F_{+k} \triangleq V^{-k} - [f(0)V^{-k} + f(1)V^{-(k-1)} + \ldots + f(k-1)V^{-1}]$ *- Linksverschiebung*

$Y(V) = P_n(V) / Q_m(V) \rightarrow \{y(k)\}$



Mathematik:

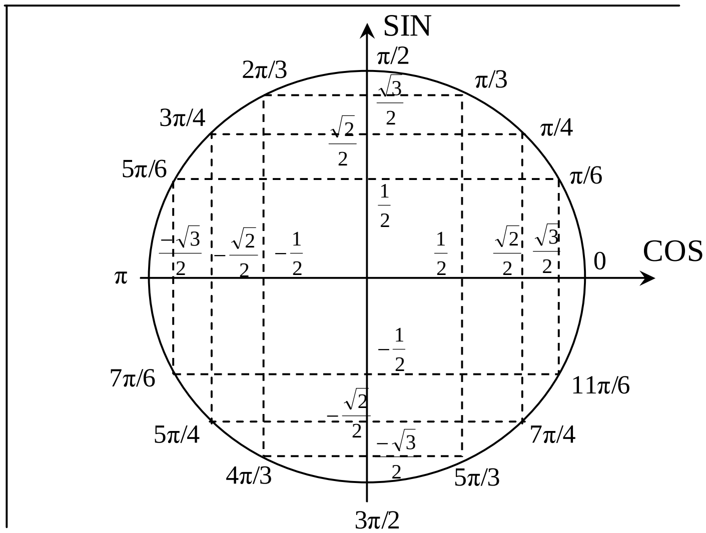
$e^{j\cdot\omega} = \cos(\omega) + j\cdot\sin(\omega)$ -1 = $e^{j\cdot(2\cdot n+1)\pi}$, n = 0,±1, ±2, … $e^{a*\ln(b)} = b^a$

arctan(-x) = -arctan(x)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(z-(a-ja))(z-(a+ja)) = z^2 - 2a\cdot z + 2a^2 \qquad (z-(\pm a - jb))(z-(\pm a + jb)) = z^2 \mp 2a\cdot z + (a^2+b^2)$$

$$(z-(-a-ja))(z-(-a+ja)) = z^2 + 2a\cdot z + 2a^2$$



Abtastung

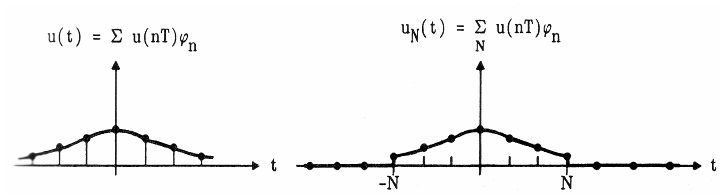
$$f_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{T} = 2B$$

Rekonstruktion aus abtastwerten

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT) \frac{\sin\big(2\pi B(t-nT)\big)}{2\pi B(t-nT)}$$

Approximation durch Abschneiden (Truncation)

$$e_N = \sqrt{T \sum_{|n|>N} |u(nT)|^2}$$



Digitale Simulation

<u>Exakter digitaler Simulator</u> wenn

1) das Eingangssignal bandbegrenzt ist und mit mindestens Nyquistfrequnz abgetastet wird (B≤1/2T)
2) das analoge System ebenfalls die Forderung nach Bandbegrenztheit erfüllt (B≤1/2T)
3) nachfolgende Interpolator ideal ist

Approximation durch einen digitalen Simulator

Approximationsfehler:

$h_a(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_a(\omega)e^{j\omega nT}d\omega$ $h_B(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_a(\omega)e^{j\omega nT}d\omega$	$e_a = \lvert h_a(nT) - h_B(nT)\rvert$ $= \frac{1}{2\pi}\left\lvert \int_{\lvert\frac{\omega}{2\pi}\rvert>B} H_a(\omega)e^{j\omega nT}d\omega \right\rvert$	$e_a \le \frac{1}{2\pi}\int_{\lvert\frac{\omega}{2\pi}\rvert>B} \left\lvert H_a(\omega)e^{j\omega nT}\right\rvert d\omega$ $\le \frac{1}{2\pi}\int_{\lvert\frac{\omega}{2\pi}\rvert>B} \lvert H_a(\omega)\rvert d\omega$

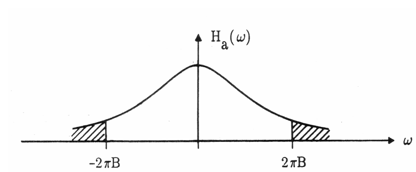


Fig. 12.17 Näherungsweise bandbegrenztes Signal

Zeitdiskretes Modell

$$\overline{g}(m) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s}e^{-sT}\right\}\Bigg|_{t=mT}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

18. Juni 2001

1 Mengenlehre

$$A = A\overline{B} + AB$$
$$A + B = A\overline{B} + B$$

Grundmenge $\mathcal{S}$
leere Menge $\{\emptyset\}$
Teilmenge $\subset$
Vereinigung: $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ oder $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
Schnittmenge: $\mathcal{AB}$ oder $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

2 Wahrscheinlichkeitsraum

$\mathcal{S}$: sicheres Ereignis, Teilmenge: Ereignisse
$\{\emptyset\}$: unmögliches Ereignis
$P(\mathcal{A})$: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathcal{A}$
Axiome:

1. $P(\mathcal{A}) \geq 0$
2. $P(\mathcal{S}) = 1$
3. $\mathcal{AB} = \{\emptyset\} \Rightarrow P(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$

Aus diesen Axiomen folgt alles weitere.
$P\{\emptyset\} = 0$
$P(\mathcal{A}) \leq 1$

Falls $\mathcal{S}$ aus N Ergebnissen besteht und die Wahrscheinlichkeiten P_i der Elementarereignisse gleich sind, folgt

$$P_i = \frac{1}{N} \tag{1}$$

Ereignis $\mathcal{A}$ besteht aus r Elementen:

$$P(\mathcal{A}) = \frac{r}{N} \qquad (\text{falls } P_i = \text{const.}) \tag{2}$$

Beispiel: Urne mit 4 roten und 6 schwarzen Kugeln, eine Kugel wird zufällig gezogen.

$$P(\text{Kugel rot}) = \frac{4}{10} \tag{3}$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(\mathcal{A}|\mathcal{M})$: auf $\mathcal{M}$ bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathcal{A}$ wird definiert als

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{AM})}{P(\mathcal{M})}, \qquad P(\mathcal{M}) \neq 0 \tag{4}$$

Daraus folgen:

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \;\Rightarrow\; P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = 1 \tag{5}$$
$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \;\Rightarrow\; P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{M})} \geq P(\mathcal{A}) \tag{6}$$

Beispiel: Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 2 geworfen wurde, wenn das Ergebnis des Wurfes eine gerade Zahl ist?

$$\mathcal{A} = \{'2'\}, \quad \mathcal{M} = \{'2','4','6'\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{AM} = \{'2'\} \tag{7}$$
$$\Rightarrow P('2'|\text{gerade}) = \frac{P('2')}{P(\text{gerade})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \tag{8}$$

Falls $A = [\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n]$ eine Unterteilung von $\mathcal{S}$ ist und $\mathcal{B}$ ein beliebiges Ereignis, dann ist

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{9}$$

Bayes' Theorem:

$$P(\mathcal{A}_i|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_i)P(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n)} \tag{10}$$

Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen unabhängig, falls

$$P(\mathcal{AB}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}) \tag{11}$$

4 Zufallsvariablen

Zufallsvariable: Zahl, die jedem Ergebnis eines Experiments zugewiesen wird.
Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $\mathbf{x}$ ist die Funktion

$$F_x(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \tag{12}$$

Dabei bezeichnet der Index die Zufallsvariable.
Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

$$F(+\infty) = 1 \qquad F(-\infty) = 0 \tag{13}$$
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; F(x_1) \leq F(x_2) \tag{14}$$
$$P\{\mathbf{x} > x\} = 1 - F(x) \tag{15}$$
$$P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \tag{16}$$

Verteilungsdichtefunktion:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{17}$$

diskrete Verteilung:

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad \text{mit } p_i = P\{\mathbf{x} = x_i\} \tag{18}$$

Eigenschaften der Verteilungsdichtefunktion:

$$p(x) \geq 0 \tag{19}$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\, d\xi \tag{20}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1 \tag{21}$$
$$P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx \tag{22}$$

Normalverteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

Gleichverteilung:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{24}$$

$$F(x) = F(x|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + F(x|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{25}$$
$$p(x) = p(x|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + p(x|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{26}$$

5 Funktionen einer Zufallsvariable

Zufallsvariable $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$
Verteilungsfunktion: $F_y(y) = P\{g(\mathbf{x}) \leq y\}$
Dichte: $p_y(y) =$?

1. Urbilder x_i bestimmen: $y = g(x_1) = \ldots = g(x_n)$
2. Ableitung von g berechnen: $g'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$
3. Gesuchte Dichte ergibt sich zu: $p_y(y) = \frac{p_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \ldots + \frac{p_x(x_n)}{|g'(x_n)|}$

Mittelwert und Varianz:
Erwartungswert oder Mittelwert:

$$E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = m \tag{27}$$

Bedingter Mittelwert:

$$E\{\mathbf{x}|\mathcal{M}\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|\mathcal{M})\, dx \tag{28}$$

Mittelwert einer Funktion von x:
Zufallsvariable $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. Dann gilt:

$$E\{g(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_x(x)\, dx \tag{29}$$

Varianz:

$$\sigma^2 = E\{(\mathbf{x} - m)^2\} = E\{\mathbf{x}^2\} - E^2\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x)\, dx \tag{30}$$

Gleichverteilung:

$$\sigma^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \tag{31}$$

6 Zwei Zufallsvariablen

$$F(x, y) = P\{\mathbf{x} \leq x, \mathbf{y} \leq y\} \tag{32}$$
$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{33}$$
$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, dy \tag{34}$$

Gemeinsame Normalverteilung:
Die Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind *gemeinsam normalverteilt*, falls für ihre gemeinsame Verteilungsdichte gilt:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1 - r^2)}\left[\frac{(x - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x - m_1)(y - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \tag{35}$$

mit $|r| < 1$. m_1 und m_2 sind die Erwartungswerte von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ und σ_1^2 und σ_2^2 ihre Varianzen. r ist der Korrelationskoeffizient.
Zwei Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ seien statistisch unabhängig. Dann gilt:

$$F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y) \tag{36}$$
$$p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y) \tag{37}$$

7 Momente und bedingte Verteilungen mehrerer Zufallsvariablen

Mittelwert einer Funktion von x und y:
Zufallsvariable $\mathbf{z} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Dann gilt:

$$E\{g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)\, dx\, dy \tag{38}$$

Daraus folgt die Linearität des Erwartungswerts:

$$E\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k E\{g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \tag{39}$$

Insbesondere gilt

$$E\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\} = E\{\mathbf{x}\} + E\{\mathbf{y}\} \tag{40}$$

Aber Vorsicht! Im allgemeinen gilt

$$E\{\mathbf{xy}\} \neq E\{\mathbf{x}\}\, E\{\mathbf{y}\} \tag{41}$$

Die Kovarianz C zweier Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert als

$$C = E\{(\mathbf{x} - m_x)(\mathbf{y} - m_y)\} = E\{\mathbf{xy}\} - E\{\mathbf{x}\}\, E\{\mathbf{y}\} \tag{42}$$

Der Korrelationskoeffizient r zweier Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert als

$$r = \frac{C}{\sigma_x \sigma_y} \tag{43}$$

Es gilt

$$|C| \leq \sigma_x \sigma_y \tag{44}$$

und damit

$$|r| \leq 1 \tag{45}$$

Zwei Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ heißen *unkorreliert*, wenn ihre Kovarianz 0 ist. Sie heißen *orthogonal*, wenn $E\{\mathbf{xy}\} = 0$ gilt. Sind zwei Zufallsvariablen statistisch unabhängig, so sind sie unkorreliert.
Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen:
Zufallsvariable $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Dann gilt:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + 2r\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 \tag{46}$$

Bedingte Verteilungsdichte:

$$p_y(y|\mathbf{x} = x) = p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} \tag{47}$$

Bayes' Theorem:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x) \cdot p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) \cdot p(x)\, dx} \tag{48}$$

Bedingter Mittelwert von $\mathbf{y}$ unter der Annahme $\mathbf{x} = x$:

$$m_{y|x} = E\{\mathbf{y}|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y|x)\, dy \tag{49}$$

Bedingte Varianz von $\mathbf{y}$ unter der Annahme $\mathbf{x} = x$:

$$\sigma_{y|x}^2 = E\left\{(\mathbf{y} - m_{y|x})^2 | x\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y|x})^2 p(y|x)\, dy \tag{50}$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x) \cdot p(x)}{p(y)}$$

Var{x} = $E\{x^2\} - E^2\{x\}$
Var{Cx} = C^2Var{x}

Gegeben: $p_x(x)$, $y = f(x,m)$, $p(m)$

1) $p(y|m) = \dfrac{p_x(x = f^{-1}(y,m))}{\left|f'(x)\right|}$
2) $p(y,m) = p(y|m) \cdot p(m)$
3) $p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y,m)\, dm$

c = a + b , a und b – statistisch unabhängig

→ p(c) = p(a) * p(b)
E(c) = E(a) + E(b)
Var(c) = Var(a) + Var (b)