Wahrscheinlichkeitsrechnung

18. Juni 2001

1 Mengenlehre

Grundmenge $\mathcal{S}$
leere Menge $\{\emptyset\}$
Teilmenge $\subset$
Vereinigung: $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ oder $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
Schnittmenge: $\mathcal{A}\mathcal{B}$ oder $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

2 Wahrscheinlichkeitsraum

$\mathcal{S}$: sicheres Ereignis, Teilmenge: Ereignisse
$\{\emptyset\}$: unmögliches Ereignis
$P(\mathcal{A})$: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathcal{A}$
Axiome:

1. $P(\mathcal{A}) \geq 0$
2. $P(\mathcal{S}) = 1$
3. $\mathcal{A}\mathcal{B} = \{\emptyset\} \Rightarrow P(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B})$

Aus diesen Axiomen folgt alles weitere.
$P\{\emptyset\} = 0$
$P(\mathcal{A}) \leq 1$

Falls $\mathcal{S}$ aus N Ergebnissen besteht und die Wahrscheinlichkeiten P_i der Elementarereignisse gleich sind, folgt

$$P_i = \frac{1}{N} \tag{1}$$

Ereignis $\mathcal{A}$ besteht aus r Elementen:

$$P(\mathcal{A}) = \frac{r}{N} \qquad \text{(falls } P_i = \text{const.)} \tag{2}$$

Beispiel: Urne mit 4 roten und 6 schwarzen Kugeln, eine Kugel wird zufällig gezogen.

$$P(\text{Kugel rot}) = \frac{4}{10} \tag{3}$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(\mathcal{A}|\mathcal{M})$: auf $\mathcal{M}$ bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\mathcal{A}$ wird definiert als

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{AM})}{P(\mathcal{M})}, \qquad P(\mathcal{M}) \neq 0 \tag{4}$$

Daraus folgen:

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = 1 \tag{5}$$

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad P(\mathcal{A}|\mathcal{M}) = \frac{P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{M})} \geq P(\mathcal{A}) \tag{6}$$

Beispiel: Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine 2 geworfen wurde, wenn das Ergebnis des Wurfes eine gerade Zahl ist?

$$\mathcal{A} = \{'2'\}, \quad \mathcal{M} = \{'2','4','6'\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{AM} \quad = \quad \{'2'\} \tag{7}$$

$$\Rightarrow P('2'|\text{gerade}) = \frac{P('2')}{P(\text{gerade})} = \frac{1/6}{1/2} \quad = \quad \frac{1}{3} \tag{8}$$

Falls $A = [\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n]$ eine Unterteilung von $\mathcal{S}$ ist und $\mathcal{B}$ ein beliebiges Ereignis, dann ist

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{9}$$

Bayes' Theorem:

$$P(\mathcal{A}_i|\mathcal{B}) = \frac{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_i)P(\mathcal{A}_i)}{P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + P(\mathcal{B}|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n)} \tag{10}$$

Unabhängigkeit: Zwei Ereignisse $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen unabhängig, falls

$$P(\mathcal{AB}) = P(\mathcal{A}) \cdot P(\mathcal{B}) \tag{11}$$

4 Zufallsvariablen

Zufallsvariable: Zahl, die jedem Ergebnis eines Experiments zugewiesen wird. Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable $\mathbf{x}$ ist die Funktion

$$F_x(x) = P\{\mathbf{x} \leq x\} \tag{12}$$

Dabei bezeichnet der Index die Zufallsvariable.
Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
F(+\infty) = 1 & \qquad F(-\infty) = 0 & (13)\\
x_1 < x_2 & \quad \Rightarrow \quad F(x_1) \leq F(x_2) & (14)\\
P\{\mathbf{x} > x\} & \quad = \quad 1 - F(x) & (15)\\
P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} & \quad = \quad F(x_2) - F(x_1) & (16)
\end{aligned}$$

Verteilungsdichtefunktion:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{17}$$

diskrete Verteilung:

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad \text{mit } p_i = P\{\mathbf{x} = x_i\} \tag{18}$$

Eigenschaften der Verteilungsdichtefunktion:

$$\begin{aligned}
p(x) & \geq 0 & (19)\\
F(x) & = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)\, d\xi & (20)\\
\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx & = 1 & (21)\\
P\{x_1 < \mathbf{x} \leq x_2\} & = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx & (22)
\end{aligned}$$

Normalverteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

Gleichverteilung:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{24}$$

$$F(x) = F(x|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + F(x|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{25}$$
$$p(x) = p(x|\mathcal{A}_1)P(\mathcal{A}_1) + \ldots + p(x|\mathcal{A}_n)P(\mathcal{A}_n) \tag{26}$$

5 Funktionen einer Zufallsvariable

Zufallsvariable $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$
Verteilungsfunktion: $F_y(y) = P\{g(\mathbf{x}) \leq y\}$
Dichte: $p_y(y) = \quad ?$

1. Urbilder x_i bestimmen: $y = g(x_1) = \ldots = g(x_n)$
2. Ableitung von g berechnen: $g'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$
3. Gesuchte Dichte ergibt sich zu: $p_y(y) = \frac{p_x(x_1)}{|g'(x_1)|} + \ldots + \frac{p_x(x_n)}{|g'(x_n)|}$

Mittelwert und Varianz:
Erwartungswert oder Mittelwert:

$$E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = m \tag{27}$$

Bedingter Mittelwert:

$$E\{\mathbf{x}|\mathcal{M}\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|\mathcal{M})\,dx \tag{28}$$

Mittelwert einer Funktion von x:
Zufallsvariable $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. Dann gilt:

$$E\{g(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p_x(x)\,dx \tag{29}$$

Varianz:

$$\sigma^2 = E\{(\mathbf{x} - m)^2\} = E\{\mathbf{x}^2\} - E^2\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 p(x)\,dx \tag{30}$$

Gleichverteilung:

$$\sigma^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \tag{31}$$

6 Zwei Zufallsvariablen

$$F(x,y) = P\{\mathbf{x} \le x, \mathbf{y} \le y\} \tag{32}$$

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{33}$$

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, dy \tag{34}$$

Gemeinsame Normalverteilung:
Die Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind *gemeinsam normalverteilt*, falls für ihre gemeinsame Verteilungsdichte gilt:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \tag{35}$$

mit $|r| < 1$. m_1 und m_2 sind die Erwartungswerte von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ und σ_1^2 und σ_2^2 ihre Varianzen. r ist der Korrelationskoeffizient.

Zwei Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ seien statistisch unabhängig. Dann gilt:

$$F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y) \tag{36}$$

$$p(x,y) = p_x(x) \cdot p_y(y) \tag{37}$$

7 Momente und bedingte Verteilungen mehrerer Zufallsvariablen

Mittelwert einer Funktion von x und y:
Zufallsvariable $\mathbf{z} = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Dann gilt:

$$E\{g(\mathbf{x},\mathbf{y})\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy \tag{38}$$

Daraus folgt die Linearität des Erwartungswerts:

$$E\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k E\left\{g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\right\} \tag{39}$$

Insbesondere gilt

$$E\left\{\mathbf{x}+\mathbf{y}\right\} = E\left\{\mathbf{x}\right\} + E\left\{\mathbf{y}\right\} \tag{40}$$

Aber Vorsicht! Im allgemeinen gilt

$$E\{\mathbf{xy}\} \neq E\{\mathbf{x}\}\, E\{\mathbf{y}\} \tag{41}$$

Die Kovarianz C zweier Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert als

$$C = E\{(\mathbf{x} - m_x)(\mathbf{y} - m_y)\} = E\{\mathbf{xy}\} - E\{\mathbf{x}\}\, E\{\mathbf{y}\} \tag{42}$$

Der Korrelationskoeffizient r zweier Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist definiert als

$$r = \frac{C}{\sigma_x \sigma_y} \tag{43}$$

Es gilt

$$|C| \leq \sigma_x \sigma_y \tag{44}$$

und damit

$$|r| \leq 1 \tag{45}$$

Zwei Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ heißen *unkorreliert*, wenn ihre Kovarianz 0 ist. Sie heißen *orthogonal*, wenn $E\{\mathbf{xy}\} = 0$ gilt. Sind zwei Zufallsvariablen statistisch unabhängig, so sind sie unkorreliert.

Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen:
Zufallsvariable $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Dann gilt:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + 2r\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 \tag{46}$$

Bedingte Verteilungsdichte:

$$p_y(y|\mathbf{x} = x) = p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)} \tag{47}$$

Bayes' Theorem:

$$p(x|y) = \frac{p(y|x) \cdot p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) \cdot p(x)\, dx} \tag{48}$$

Bedingter Mittelwert von $\mathbf{y}$ unter der Annahme $\mathbf{x} = x$:

$$m_{y|x} = E\{\mathbf{y}|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y|x)\, dy \tag{49}$$

Bedingte Varianz von $\mathbf{y}$ unter der Annahme $\mathbf{x} = x$:

$$\sigma_{y|x}^2 = E\left\{(\mathbf{y} - m_{y|x})^2 | x\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{y|x})^2 p(y|x)\, dy \tag{50}$$