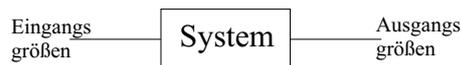


Systemtheorie

Steuerung

Falls man das System vollständig kennt und sofern keine unkontrollierbaren Störungen auftreten, so kann man den zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße so berechnen, dass ein gewünschter Verlauf der Ausgangsgröße eintritt. → Ausgangsgröße muss nicht beobachtet werden. → zeitlicher Verlauf der Eingangsgröße bestimmt das System

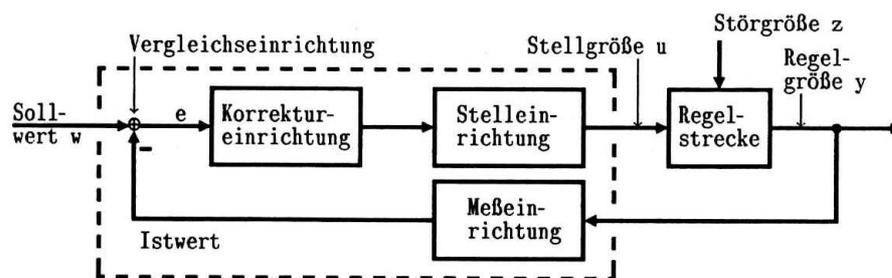


- vollständig bekanntes System
- keine Störungen

Regelung

Ist das System nicht vollständig bekannt oder es treten unkontrollierbare Störungen auf, so müssen die Ausgangsgrößen beobachtet werden und die Eingangsgrößen gezielt verändert werden.

⇒ Regelung bedarf also einer Rückkopplung (im Gegensatz zur Steuerung)



Regelstrecke das gegebene System

Regelgröße die zu beeinflussende Größe

Störgröße unkontrollierbare Störungen

Führungsgröße/Sollwert gewünschter Wert

Korrektur-/Stelleinrichtung In einer Korrektur-einrichtung wird aufgrund der Regelabweichung ein Signal gebildet, das über die Stelleinrichtung auf die Regelstrecke geeignet einwirkt.

Minimalanforderungen für Regelung

- Stabilität: Der Einschwingvorgang, verursacht durch Änderung der Sollgröße oder eine Störung, soll abklingen.
- Die Differenz zwischen Soll- und Istwert soll nach Abklingen der Einschwingvorgänge unter einem vorgegebenen Wert liegen.

Blockschaltbilder

Operation	Originaldiagramm	Äquivalentes Diagramm
1. Serienschaltung		
2. Verschiebung eines Summenpunktes hinter einen Block		
3. Verschiebung eines Abgriffes vor einen Block		
4. Verschiebung eines Abgriffes hinter einen Block		
5. Verschiebung eines Summenpunktes vor einen Block		
6. Elimination eines rückgekoppelten Kreises		

LTI

Ein System heißt linear, wenn gilt:

$$f(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2)$$

allg. Verhalten linearer Übertragungsglieder:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(u)$$

falls die $a_i = \text{const.}$ → zeitinvariantes Übertragungsglied.

ein System heißt zeitinvariant, falls gilt:

$$y(t) = f(u(t)) \Rightarrow f(u(t - t_0)) = y(t - t_0)$$

also die Form des Ausgangssignals unabh. von der Verschiebung des Eingangssignals ist.

Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Die Übertragungsfkt. ist die Laplacetransformierte der Stoßantwort (Antwort des System auf einen Diracimpuls).

Zshg. Stoßantwort ↔ Sprungantwort

Die Stoßantwort ist die Ableitung der Sprungantwort (Antwort des System auf ein Sprung am Eingang).

$$\text{Stoßantwort} = s \cdot \text{Sprungantwort}$$

Polstellen

$$Y(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

$$y(t) = A_1 e^{+p_1 t} + A_2 e^{+p_2 t} + \dots + A_n e^{+p_n t}$$

für $p_i < 0$ und $|p_1| < |p_i|$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_1 e^{+p_1 t}$$

dominanter Pol: Der Pol/das Polpaar, der am weitesten rechts, also am dichtesten an der imaginären Achse liegt. Er ist ausschlaggebend für die Form der Sprungantwort $y(t)$, er bestimmt also maßgeblich das Verhalten. Es handelt sich um dominante Pole wenn:

- andere Pole weit links von den dominanten liegen

oder

- wenn ein anderer Pol in der Nähe der imaginären Achse liegt, dann muss er nahe an einer Nullstelle liegen.

Linearisierung

Sei $f(u)$ im betrachteten Gebiet stetig diff'bar.

1. Schritt:

Arbeitspunkt bestimmen

2. Schritt:

Taylorreihenentwicklung

$$y(t) = f(u(t))$$

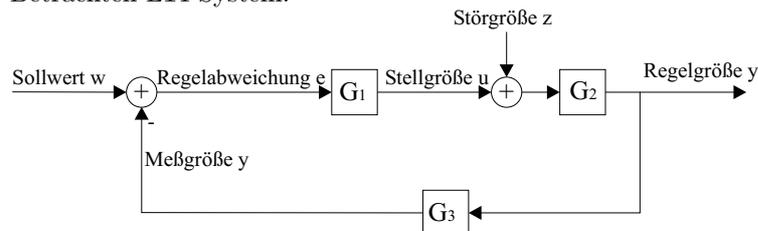
für genügend kleine Abweichungen $u - U_0$ (U_0 : AP) kann man näherungsweise die nichtlinearen Glieder $(u - U_0)^n$ mit $n \geq 2$ vernachlässigen.

$$\Rightarrow y = \underbrace{f(U_0)}_{Y_0} + \underbrace{\frac{df}{du}|_{u=U_0}}_{m: \text{Steigung}} \cdot (u - U_0) = Y_0 + m(u - U_0)$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = m \cdot \Delta u$$

Rückgekoppeltes System

Betrachten LTI-System:



$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_1(s) \cdot G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}}_{\text{Führungsübertragungsfunktion}} \cdot W(s) + \underbrace{\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}}_{\text{Störübertragungsfunktion}} \cdot Z(s)$$

$G_1G_2G_3 = G_0$: Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Kreises

Eigenschaften:

- der Einfluß von Parameteränderungen in der Regelstrecke wird durch Rückkopplung vermindert
- durch geeignete Rückkopplung läßt sich das transiente Verhalten eines System beeinflussen
- Einfluß des Störsignals wird reduziert \oplus
- stat. Fehler wird reduziert \oplus
- Systeme können durch Rückkopplung instabil werden \ominus

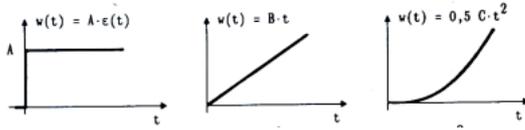
Stationäre Regelabweichung

$$E(s) = \frac{W(s)}{1 + G_0(s)}$$

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot W(s) \frac{1}{1 + G_0(s)} \right]$$

Testsignale

Sprung $W(s) = \frac{A}{s}$ Rampe $W(s) = \frac{B}{s^2}$ Parabel $W(s) = \frac{C}{s^3}$



Transientes Verhalten

System 2. Ordnung

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a \cdot \frac{d}{dt}y(t) + b \cdot y(t) = w(t)$$

↓

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = T(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{b}$
und Dämpfungsgrad $\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$

Dämpfungstypen

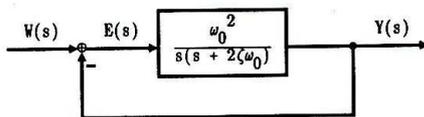
Polstellen: $p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \begin{cases} i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} & \zeta < 1 \\ 0 & \zeta = 1 \\ \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} & \zeta > 1 \end{cases}$	$\zeta < 1$ unterkritische Dämpfung (Überschwingen) $\zeta = 1$ kritische Dämpfung (kein Überschwingen) $\zeta > 1$ überkritische Dämpfung (kein Überschwingen)
---	---

unterkritische Dämpfung: konj. komplexer Pol
kritische Dämpfung: Pol auf reeller Achse
überkritische Dämpfung: doppelter Pol

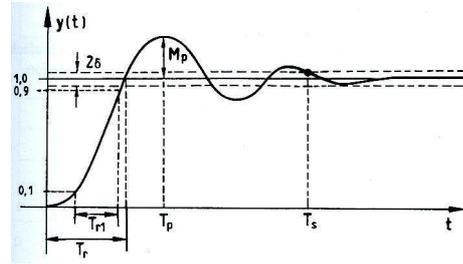
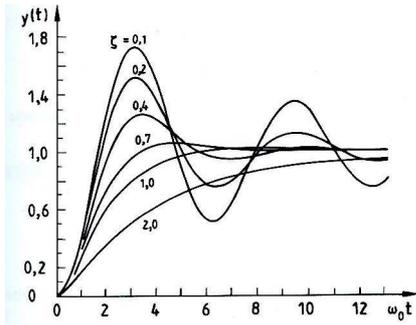
$T(s)$ normieren

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

Differentialgleichung 2. Ordnung



$$G_0(s) = \frac{\omega_0}{s(s + 2\zeta\omega_0)} \quad \text{Übertragungsfkt. des offenen Kreises}$$



Antwort eines Systems 2. Ordnung.

Parameter des transienten Verhalten

Einstellzeit

für ein System 2. O. oder mit dominanten Polpaaren

$$T_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_0}$$

Der genaue Verlauf kann der Grafik (s.u.) $\omega_0 T_s$ entnommen werden.

Überschwingzeit

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Anstiegszeit

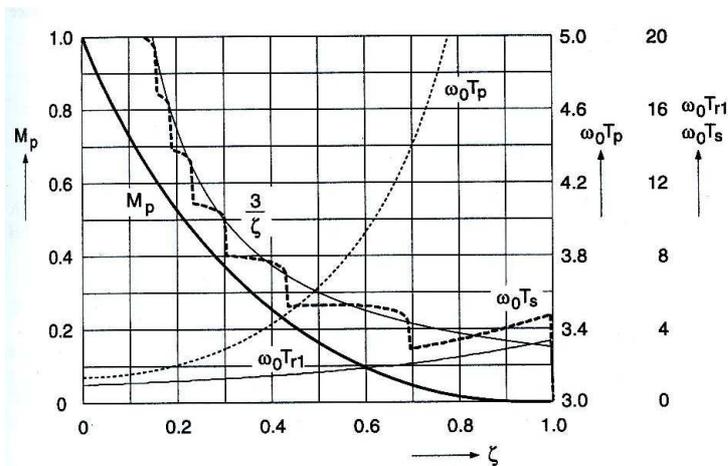
$$T_r = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \left[\pi - \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad (\zeta < 1)$$

Maximale Überschwingung

$$M_p \hat{=} y(T_p) - 1 = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}$$

Dämpfungsgrad

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}$$



Die Forderungen nach **schnellem Ausgleich** ($\omega_0 T_r, \omega_0 T_s \downarrow$) und **minimalem Überschwingen** ($M_p \downarrow$) sind also nicht gleichzeitig erfüllbar.

Frequenzgang

Voraus: Das System ist stabil.

Der Frequenzgang $G(i\omega)$ kann als komplexer Faktor zwischen sinusförmigen Eingangs- und Ausgangssignal betrachtet werden. Physikalisch wird das Eingangssignal $u(t)$ um $|G(i\omega_1)|$ verstärkt und um $\varphi(\omega_1)$ phasenverschoben.

Frequenzgang \leftrightarrow Übertragungsfunktion

Frequenzgang $\hat{=}$ Übertragungsfkt. $|_{s=i\omega}$

falls zusätzlich alle Pole von $G(i\omega)$ in der linken Halbebene liegen ist $G(i\omega)$ gleich der Fouriertransformierten der Stoantwort $g(t)$

$$G(i\omega) \bullet \longleftrightarrow g(t)$$

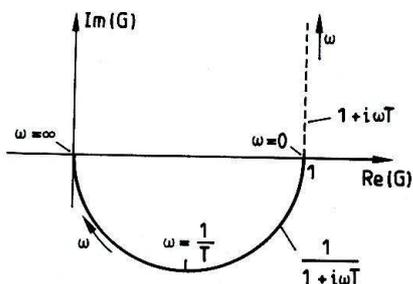
Ortskurven

\rightarrow Aufspalten des Frequenzganges in Real- und Imaginärteil

$$G(i\omega) = \text{Re}\{G\} + i \cdot \text{Im}\{G\}$$

z.B.

$$G(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega T} \quad \text{mit } \omega \text{ als Kurvenparameter}$$



- ⊖ mühsame Berechnung
- ⊖ Einfluss von Polen und Nullstellen nicht erkennbar
- ⊖ vollst. neue Berechnung notwendig, falls ein Element hinzugefügt wird

Bodediagramm

→ Aufspalten des Frequenzganges nach Betrag und Phase

$$G(i\omega) = |G(i\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\ln G(i\omega) = \ln |G(i\omega)| + i\varphi(\omega)$$

- ⊕ Einfluss von Polen und Nullstellen ersichtlich
- ⊕ Hinzufügen neuer Elemente kann durch Addition des Beitrages dieser Elemente berücksichtigt werden.

Amplitudengang

$$A(\omega) = 20 \cdot \log |G(i\omega)| \quad [A(\omega)] = dB$$

Nullstelle: ↑ +20 dB/Dek. (hebt den Amplitudengang an)

Polstelle: ↓ -20 dB/Dek. (senkt den Amplitudengang ab)

→ Pol- und Nullstellen stellen also die Knickpunkte der Asymptoten dar. Der tatsächliche Wert an dieser Stelle liegt allerdings 3 dB darunter.

Phasengang

$$\varphi = \arg G(i\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{G\}}{\text{Re}\{G\}}$$

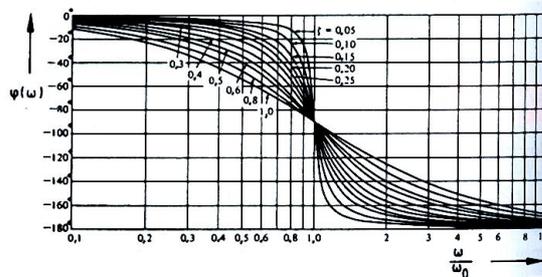
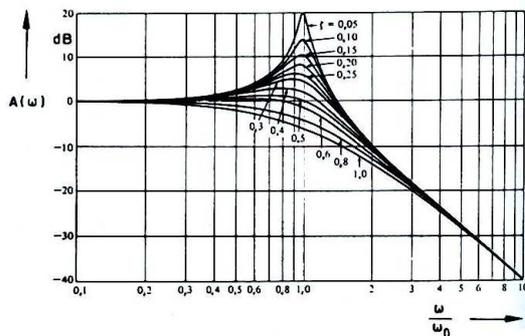
$$\left. \begin{array}{l} \text{Nullstelle} \quad +90^\circ \\ \text{Polstelle} \quad -90^\circ \end{array} \right\} \text{über zwei Dekaden}$$

falls

$$G(i\omega) = \frac{1 - i\omega T}{1 + i\omega T} \Rightarrow \text{Phasengang } -180^\circ \text{ über 2 Dekaden}$$

falls

$$G(i\omega) = \frac{1}{(i\frac{\omega}{\omega_0})^2 + i2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} + 1} \quad \zeta < 1$$



BIBO-Stabil/absolute Stabilität

Ein System heißt stabil, wenn es für jedes beschränkte Eingangssignal $u(t)$ mit einer begrenzten Antwort $y(t)$ reagiert (bounded input - bounded output).

im Frequenzbereich:

Ein lin. System mit rationaler Übertragungsfkt. $G(s)$ ist genau dann stabil, wenn alle Pole der Ü-fkt. einen neg. Realteil haben (Pole auf der Im-Achse \rightarrow instabil).

Ein eingeschwungener Zustand existiert nur, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen.

Relative Stabilität/Stabilitätsgüte

Von zwei Systemen ist dasjenige relativ stabiler, das eine kürzere Einstellzeit T_s hat. Sie wird durch den Realteil der Pole bestimmt, da

$$T_s \simeq \frac{3}{\zeta\omega_0} \text{ und } \zeta\omega_0 = \operatorname{Re}\{\text{kompl. konj. Polpaar}\}$$

rel. Stabilität $\uparrow \Leftrightarrow$ Phasenrand \uparrow

Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Voraussetzung: Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises hat nur Pole in der linken Halbebene oder im Nullpunkt mit der Ordnung ≤ 2 .

Der Regelkreis ist stabil, wenn beim Durchlaufen der Ortskurve $G_0(i\omega)$ für $0 \leq \omega \leq \infty$ der Punkt $(-1, 0)$ immer links liegt.

Phasenrand

Unter der Phasenreserve φ_R versteht man

- in der Ortskurvendarstellung
den Winkel zwischen der negativen reellen Achse und einem Radiusvektor zu dem Punkt $G_0(i\omega_D)$, an dem die Ortskurve den Einheitskreis schneidet.
- im Bodediagramm
die Größe der Phase φ an der Stelle, an der der Amplitudengang die 0 dB-Linie schneidet.

Amplitudenreserve

Unter der Amplitudenreserve A_R versteht man

- in der Ortskuvendarstellung
den Faktor, mit dem $G(i\omega)H(i\omega)$ multipliziert werden müßte, damit die Ortskurve durch den Punkt $(-1, i0)$ geht
- im Bodediagramm
die Größe des Amplitudenganges $A(\omega)$ an der Stelle, an der die Phase -180° beträgt.

Phasenrand \leftrightarrow Dämpfungsgrad

$$\varphi_R = \arctan \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}} \right)$$

bzw. falls ein dominantes Polpaar existiert:

$$\zeta \simeq 0,01 \cdot \varphi_R$$

Gute Systeme: $0,4 < \zeta < 0,8 \hat{=} 40^\circ < \varphi_R < 70^\circ$

konst. Dämpfungsgrad \Leftrightarrow konst. Phasenrand

Stabilität im Bodediagramm

vgl. Nyquist-Kriterium:

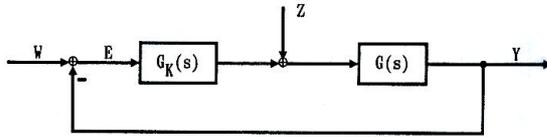
$$(-1, i0) \hat{=} A(\omega) = 0 \text{ dB}$$

$$\varphi(\omega) = -\pi = -180^\circ$$

Ein System ist stabil, wenn bei der Durchtrittsfrequenz ω_D (Amplitudengang schneidet 0 dB Linie) für die Phase gilt: $\phi(\omega_D) > -180^\circ$

!!! Stabilitätsuntersuchung wird mit dem **aufgeschnittenen** Regelkreis gemacht.

Entwurf von Regelkreisen



$$G(s) = G_{St}(s)G_s(s)G_M(s) \quad \text{mit } G_M(s) = 1$$

$G_{St}(s)$ Stelleinrichtung - druch Art der Regelung vorgegeben

$G_s(s)$ Regelstrecke

$G_M(s)$ Meßeinrichtung ohne Verzögerung

$G_K(s)$ Korrekturglied (an Position geringer Leistung)

→ **Ziel:** Dimensionierung von $G_K(s)$

Forderung an Regelung

- **Stabilität**

muss für jeden Regelkreis erfüllt sein

- **Genügend stationäre Genauigkeit**

stat. Fehler darf für vorgeg. Eingangsgröße eine bestimmte Größe nicht überschreiten.

Stabilität \leftrightarrow stat. Genauigkeit

- **Genügend dynamisches Verhalten**

Phasenreserve muss groß genug sein, um ausreichende Dämpfung der Ausgleichsvorgänge zu gewährleisten

$\varphi_R \uparrow \rightarrow$ Dämpfung \uparrow

$\omega_D \uparrow \rightarrow$ Schnelligkeit \uparrow

$$T(s) \simeq \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_D}} \bullet \text{---} \circ \dots \simeq e^{-\omega_D t}$$

Proportionalregler

$G_K(s) = K$ verschiebt den Amplitudengang (nach oben/unten), ändert aber nichts am Phasengang
 $K \uparrow \rightarrow \varphi_R \downarrow$

Minimalphasig

Unter einem minimalphasigen System versteht man ein System, das weder ein Allpass ist noch ein Totzeitglied beinhaltet. Dies ist wichtig, da der Amplituden- und Phasengang nicht von dem eines Proportionalgliedes unterschieden werden können.

PI-Regler

Proportionalregler mit parallelgeschaltetem Integrator

→ wird dort eingesetzt, wo dyn. Verhalten in Ordnung ist, aber das stationäre Verhalten verbessert werden soll

ideal: $G_K(s) = \frac{K_R}{s} \cdot (1 + s\tau)$

$\underbrace{s}_{\text{stat. Fehler = 0}}$ $\underbrace{(1 + s\tau)}_{\substack{\omega_D \text{ nach rechts verschieben,} \\ \text{durch teilweise teilweise} \\ \text{Kompensation der} \\ \text{Phasennacheilung der Glieder} \\ \text{der Regelstrecke}}}$

Zeitkonstante τ in der Größenordnung der größten Zeitkonstanten T_1 der Glieder wählen → ω_D nach rechts verschieben, da die größte Zeitkonst. schon bei tiefen Frequenzen ein Phasenabsenkung bewirkt (→ $\varphi_R \downarrow$)

nicht idealer: $G_K(s) = K_R \frac{1 + s\tau}{1 + s\alpha\tau} \quad \alpha > 1$

Dimensionierungsverfahren mit Hilfe des Bodediagramms (PI-Regler)

1. Aufzeichnen des Bode-Diagramms des unkompensierten Systems $K_R G(s)$. Die Konstante K_R ist so zu bestimmen, daß der geforderte stationäre Fehler innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen liegt.
 Bemerkung: Man kann diesen Schritt so erklären, als ob man $G_K(s) = K_R$ wählen würde (P-Regler).
2. Bestimmung der Durchtrittsfrequenz ω_D (entsprechend dem geforderten Phasenrand φ_R). Zur Berücksichtigung der Phasenverschiebung des Kompensationsnetzwerkes addiere man 5° zum gewünschten Phasenrand.
3. Man setze die Nullstelle z des Kompensators eine Dekade tiefer als die Durchtrittsfrequenz ω_D an

$$z = -0,1 \omega_D$$

Begründung: Nach Kap.6.2 ist ω_D ein Maß für die Schnelligkeit des Regelkreises und ist somit vergleichbar mit dem Realteil von p_1 .

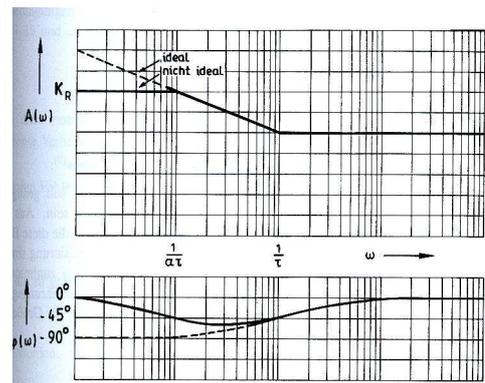
4. Man bestimme die Abschwächung K_α für $\omega = \omega_D$ so, daß der Amplitudengang die 0 dB-Linie schneidet (Definition von ω_D !). Dann gilt

Verschiebung nach unten
 $K_\alpha < 0$
 $K_\alpha = 20 \log \alpha$

$$K_\alpha = -20 \log \alpha \Rightarrow \alpha$$

5. Der Pol p des Kompensationsnetzwerkes ist dann

$$p = -\frac{0,1 \omega_D}{\alpha}$$



PD-Regler

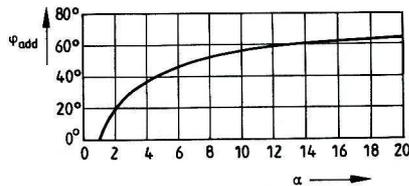
→ Verbesserung des dyn. Verhaltens

$$\text{real: } G_K(s) = K_R \frac{1 + s\alpha T}{1 + sT} \quad \alpha > 1$$

Die maximale Phasenvoreilung erhält man für die Mittenfrequenz des PD-Reglers

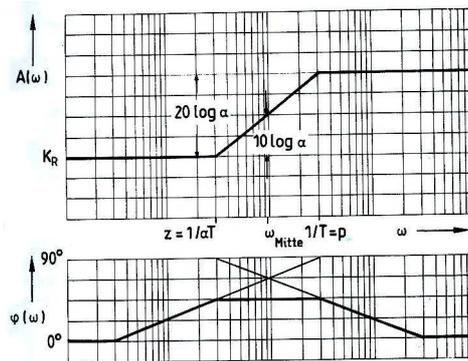
$$\omega_{\text{Mitte}} = \sqrt{z p} = \sqrt{\frac{1}{\alpha T} \frac{1}{T}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

zusätzliche Phasenvoreilung



$$\varphi_{\text{add}} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_{\text{add}}}{1 - \sin \varphi_{\text{add}}}$$



Dimensionierungsverfahren mit Hilfe des Bodediagramms (PD-Regler)

1. Man berechne den Faktor K_R aus den Forderungen an den stationären Fehler und zeichne das Bode-Diagramm für $K_R G(s)$. [$G(s)$ sei die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen unkompenzierten Regelkreises.]
2. Man bestimme den Phasenrand φ_R von $K_R G(s)$ und berechne die zusätzlich notwendige Phasenvoreilung φ_{add} für den geforderten Phasenrand (man addiere ca. 5° Reserve zu φ_{add}).
3. Aus Fig.6.14 bestimme man das zu φ_{add} korrespondierende α .
4. Man berechne $10 \log \alpha$ und bestimme die Frequenz, bei der der unkompenzierte Amplitudengang $-10 \log \alpha$ beträgt. Diese Frequenz ist gleich der neuen Durchtrittsfrequenz ω_D des kompensierten Systems und, nach Konstruktion, ebenfalls gleich der Frequenz ω_{Mitte} , bei der das Kompensationsnetzwerk die größte Phasenvoreilung hat.

Begründung: Nach Fig.6.13 beträgt die Überhöhung des Amplitudenganges des Kompensationsnetzwerkes im Orte maximaler Phasenvoreilung $10 \log \alpha$. Pol und Nullstelle des Kompensationsnetzwerkes sind mit $\omega_D = \omega_{\text{Mitte}}$ und α festgelegt.

$$\text{Polstelle } \sqrt{1/T} = \omega_D \sqrt{\alpha}$$

$$\text{Nullstelle } \sqrt{1/(\alpha T)} = \omega_D / \sqrt{\alpha}$$

5. Man überprüfe den resultierenden Phasenrand φ_R und wiederhole, falls notwendig, die Dimensionierung mit einem geeigneteren Wert für α .

Kopplungen:

$$\underline{G_{12} = G_{21} = 0}$$

Y_1 nur von W_1 abh. ungekoppelter Fall
 Y_2 nur von W_2 abh.

$$\underline{G_{12} = 0}$$

Y_1 nur von W_1 abh.

Y_2 von W_1 und W_2 abh.

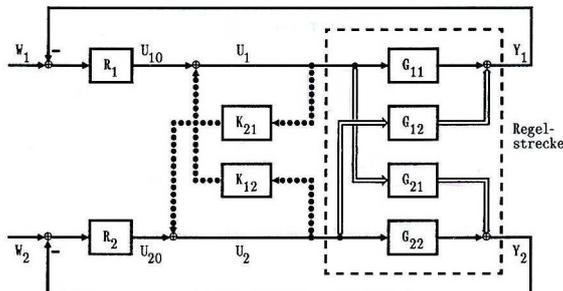
$$\underline{G_{12} \neq 0 \text{ und } G_{21} \neq 0 \text{ (allg. Fall)}}$$

→ asymptotisch entkoppelt

Entkopplungsregler

Ziel: Mehrgrößensystem durch Kopplungen zu entkoppeln
 → Verhalten wie unabh. Eingrößensysteme

$$\begin{aligned} U_1(G_{21} + K_{21}G_{22}) &= 0 & \Rightarrow & K_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}} \\ U_2(G_{12} + K_{12}G_{11}) &= 0 & \Rightarrow & K_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}} \end{aligned}$$



Zeitdiskrete Systeme

Analog - Digitalwandlung

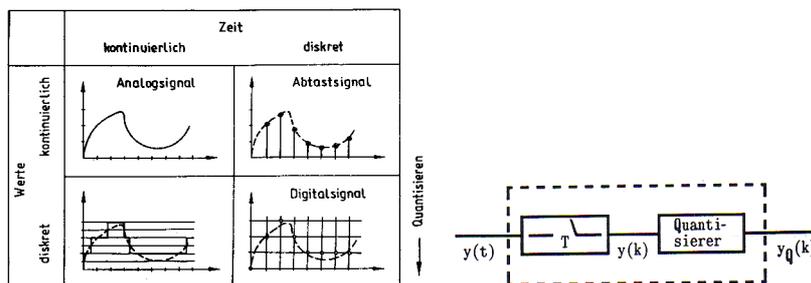
→ **Abtastung** des zeitkontinuierlichen Signals (meist äquidistant) mit Abtastperiode T

$$S_A(\omega) = S(\omega) * \omega_A \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_A) = \omega_A \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_A)$$

mit ω_A : Abtastfrequenz, S_A : abgetastetes Spektrum

→ **Quantisierung** der noch kontinuierlichen Amplitude

⇒ zeit- und wertdiskretes Signal



Quantisierungsfehler

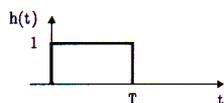
$$e_Q(k) = y(k) - y_Q(k)$$

$$-\frac{Q}{2} \leq e_Q(k) \leq \frac{Q}{2} \quad (\text{ohne Overflow})$$

Halteglied 0-ter Ordnung

Ein Halteglied nullter Ordnung lässt sich mathematisch als Summe zweier Sprungfunktionen darstellen:

$$H(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT})$$



Digital - Analogwandlung

Im Rechner erzeugte Zahlenfolge zur Regelung muss in eine zeitkontinuierliche Stellgröße $u(t)$ umgesetzt werden. Dies lässt sich mathematisch beschreiben durch:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) \cdot h(t - kT)$$

Summandenweise mit Verschiebesatz $x(t - T) \circ \bullet X(s)e^{-sT}$

$$U(s) = H(s) \underbrace{[u(0) + u(1)e^{-sT} + u(2)e^{-2sT} + \dots]}_{=: U^*(s)}$$

Dies kann als System mit Eingang $U^*(s)$, Ü-fkt $H(s)$ und Ausgang $U(s)$ interpretiert werden.

Rücktransformation von $U^*(s)$ liefert den Eingang des Haltegliedes:

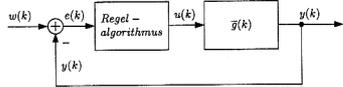
$$\Rightarrow u^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)\delta(t - kT) \quad (u(k) \rightarrow u^*(t))$$

Zusammenfassung:

Die Zahlenfolge $u(k)$ wird zuerst in eine Summe von Diracstößen umgesetzt. Diese gewichtete Summe erzeugt am Ausgang eines Haltegliedes eine treppenförmige, zeitkontinuierliche Funktion.

Zeitdiskreter Regelkreis

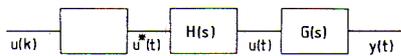
Ziel ist es zu einem zeitkontinuierlichen Regelkreis einen äquivalenten zeitdiskreten zu finden.



$\bar{g}(k)$ muss dabei so sein, dass

$$y(k) = y(t)|_{t=kT}$$

erfüllt ist.



$G(s)$: Stoßantwort/Ü-fkt der zeitkont. Regelstrecke

$$\bar{G}(s) = H(s) \cdot G(s)$$

Das Verhalten von $y(t)$ zu den Abtastzeitpunkten (Vor.: $y(t)$ ändert sich innerhalb einer Abtastperiode kaum) ist somit gleich dem Verhalten des diskreten Ausgangs

$$y(m) = y(t)|_{t=mT}$$

$$\Rightarrow y(m) = \sum_{k=0}^m u(k) \cdot \bar{g}(m-k)$$

Damit ist die Stoßantwort des äquivalenten zeitdiskreten System:

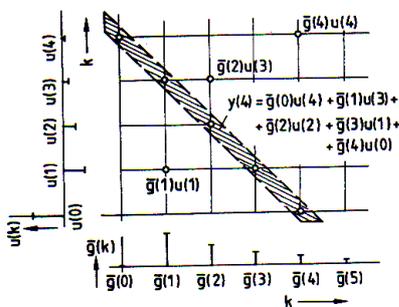
$$\bar{g}(m) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{G}(s)\}|_{t=mT} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s}e^{-sT}\right\} \quad m \geq 1 \text{ (da } t \geq 0)$$

!!! Fallunterscheidung, da bei Laplace-Trafo angenommen wird, dass die Zeitfkt. für neg. Zeiten identisch Null ist.

Nun ist der äquivalente zeitdiskrete Regelkreis vollständig beschrieben bzw. berechenbar.

Diskrete Faltung

$$y(k) = u(k) * \bar{g}(k) = \sum_{i=0}^k u(i)\bar{g}(k-i)$$



Faltungsoperation:

- Bildung aller Produkte im (schraffierten) Diagonalsreifen
- Addition aller Produkte

z.B.

$$y(0) = \bar{g}(0) \cdot u(0)$$

$$y(1) = \bar{g}(1) \cdot u(0) + \bar{g}(0) \cdot u(1)$$

Zeitdiskretes LTI System

Seien $u_1(n), u_2(n)$ beliebige Eingangssequenzen mit den zugehörigen Ausgangsseq. $y_1(n) = T(u_1(n)), y_2(n) = T(u_2(n))$, dann ist das System **linear**, wenn bei der Eingangsseq. $a \cdot u_1(n) + b \cdot u_2(n)$ für die Ausgangsseq.

$$y(n) = T[a \cdot u_1(n) + b \cdot u_2(n)] = a \cdot T[u_1(n)] + b \cdot T[u_2(n)]$$

gilt.

Die Eingangsseq. $u(n)$ erzeuge $y(n)$. Wenn dann die verschobene Sequenz $u(n - n_0)$ die Ausgangsseq. $y(n - n_0)$ erzeugt, dann ist das System auch **zeitinvariant**.

Bei jedem LTI-System sind Ein- und Ausgang durch eine Faltungsoperation verknüpft.

$\Delta(n)$ -Sequenz

$$\Delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die $\Delta(n)$ Sequenz spielt im zeitdiskreten Fall die gleiche Rolle, wie die Diracfunktion $\delta(t)$ im zeitkontinuierlichen.

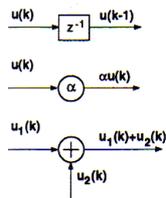
Differenzgleichung

Das dynamische Verhalten zeitkontinuierlicher System wird durch Differentialgleichungen beschrieben. Im zeitdiskreten Fall sind es die sog. Differenzgleichungen. Dies sind iterativer Natur.

$$y(k + m) + a_{m-1}y(k + m - 1) + \dots + a_0y(k) = b_nu(k + n) + \dots + b_0u(k)$$

$u(\cdot)$: Eingangssequenz

$y(\cdot)$: Ausgangssequenz



- Verzögerungselement um einen Taktschritt (Speicher!)
- Multiplikation
- Addition

Dabei muss die Anfangsbelegung der Speicher (Verzögerungselemente) bekannt sein, um eine Differenzgleichung lösen zu können.

Die Lösung besteht aus zwei Teilen:

homogener Teil: a^k nur vom Anfangszustand abh.

erzwungener Anteil: $\sum_{\nu=0}^{k-1} a^{k-1-\nu} u(\nu)$ nur von Eingangsseq. abh.

z-Transformation

Setzt man formal

$$z = e^{sT}$$

so führt dies auf die z-Transformation.

Interpretationen:

Möglichkeit 1: Die z-Trafo beschreibt den Zshg. zwischen einer Zahlenfolge $\{u(kT)\}$ und der Fkt $U(z)$

Möglichkeit 2: Die z-Trafo ist ein Spezialfall der Laplace-Trafo

$$u^*(t) \circ \bullet U^*(s) = U(z)|_{z=e^{sT}}$$

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}$$

Übertragungsfunktion

Die zeitkontinuierliche Ü-fkt $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ entspricht im zeitdiskreten

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Umwandeln der Übertragungsfunktion $G(s) \rightarrow G(z)$

Möglichkeit (1)

$$g(k) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)}{s} e^{-sT} \right\} |_{t=kT}$$

↓

$$G(z) = \dots$$

Möglichkeit(2)

$$G(z) = (1 - z^{-1})G_1(z)$$

mit

$$g_1(k) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} |_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1} \{ G_s(s) \} |_{t=kT}$$

↓

$$G_1(z) = \dots$$

Dieser Weg erfordert meist weniger Rechenaufwand

Faltung

$$Y(z) = U(z)G(z) \bullet \circ y(k) = \sum_{m=0}^{\infty} u(m)g(k-m)$$

Frequenzgang

Der Frequenzgang ergibt sich, wenn man auf ein zeitdiskretes LTI-System die abgetastete Exponentialfunktion (komplexer Sinus) $e^{i\omega T}$ gibt.

$$y(nT) = h(nT) * u(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)h(n-k) = u(nT)H(e^{i\omega T})$$

Dabei wird $H(e^{i\omega T})$ als Frequenzgang bezeichnet. (Gestartet bei $k = -\infty$ um den eingeschwungenen Zustand zu erreichen.)

Man erhält den Frequenzgang $H(e^{i\omega T})$ also aus der Übertragungsfunktion $H(z)$, indem man

$$z = e^{i\omega T}$$

setzt.

Die imaginäre Achse der s -Ebene wird also auf den Einheitskreis der z -Ebene abgebildet und hat bei zeitdiskreten Systemen die gleiche Rolle.

!!! Der Frequenzgang ist periodisch, denn ersetzt man ωT durch $\omega T + 2\pi k$, so erhält man den gleichen Wert für $H(e^{i\omega T})$, da

$$z = e^{i(\omega T + 2\pi k)} = e^{i\omega T}$$

Der Amplitudengang weist dabei gerade Symmetrie, der Phasengang ungerade Symmetrie auf. Da der Frequenzgang periodisch ist, kann

$$H(e^{i\omega T}) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT)H(e^{-im\omega T})$$

als Fourier-Reihendarstellung des Frequenzganges betrachtet werden.

Spektrum

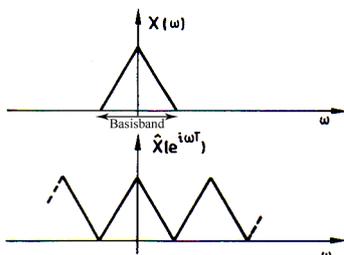
Ziel ist die Berechnung des Spektrums eines zeitkontinuierlichen Signal mit Hilfe der digitalen Signalverarbeitung, also mit abgetasteten Signalen.

Zeitfunktion $x(t)$ und das Spektrum $X(\omega)$ sind durch die Fourier-Trafo miteinander verknüpft. Man kann bei bekanntem Spektrum $X(\omega)$ des zeitkontinuierlichen Signals eindeutig $\hat{X}(e^{i\omega T})$ bestimmen, allerdings aufgrund der Periodizität von $\hat{X}(e^{i\omega T})$ nicht umgekehrt, obwohl man genau dies mithilfe eines Digitalrechners berechnen kann.

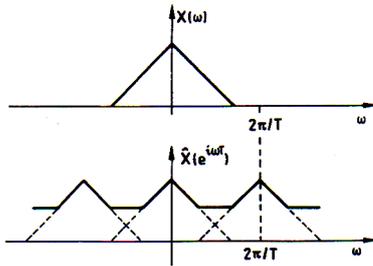
Ein derartiger Zusammenhang besteht im Basisband $|\omega| < \frac{\pi}{T}$, falls $X(\omega)$ bandbegrenzt ist, also $X(\omega) = 0$ für $|\omega| > \frac{\pi}{T}$. Dann gilt im Basisband

$$X(\omega) = T\hat{X}(\omega)$$

$$|\omega| < \frac{\pi}{T}$$



Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so werden Information aus dem höheren Frequenzband in das Basisband verschoben \rightarrow Aliasing



Diese Effekte lassen sich durch genügend große Abtastraten $1/T$ beliebig klein machen.

Diskrete Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte zeitdiskreter Signale ergibt ein frequenzkontinuierliches Spektrum. Daher wird eine Transformation eingeführt, die einem zeitdiskreten Signal direkt ein frequenzdiskretes Signal zuordnet, da nur ein solch diskretes Signal auf dem Digitalrechner verarbeitet werden kann → DFT.

$$\hat{X}_N(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Diese Gleichung ordnet also N Abtastwerten im Zeitbereich N Abtastwerte im Frequenzbereich zu.

Die Rücktransformation (IDFT) erhält man durch

$$x(mT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_N(k\omega_0)e^{+i\frac{2\pi}{N}\cdot km} \quad 0 \leq m \leq N-1$$

Der Diskretisierungsfehler (Aliasing) beim Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich ist proportional zu T .

Interpolation

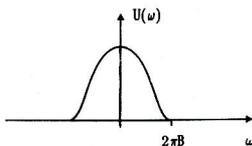
Mit Interpolation wird der Vorgang bezeichnet, aus einer Folge von Stützwerten $\{u(nT)\}$ beliebige Zwischenwerte einer Funktion $y(t)$ zu berechnen.

(Jede D/A Wandlung ist mathematisch also eine Interpolation)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT)p(t-nT) \quad p(t) \text{ Interpolationsfunktion}$$

Bandbegrenzte Signale

Ein Signal oder System heißt bandbegrenzt (band limited), wenn sein Spektrum für $|\omega| \geq 2\pi B$ verschwindet. (B : Bandbreite)



Rekonstruktion von Signalen

Bedingungen an die Abtastfrequenz

- Die Abtastfrequenz $\omega_A = \frac{1}{T}$ muss ein ganzer Teiler der Mittenfrequenz ω_m sein, also

$$\omega_A \cdot n = \omega_m$$

damit eine Wiederholung des Spektrums im Basisband liegt.

- Damit das Signal rekonstruiert werden kann, sollte es mindestens mit Nyquistfrequenz abgetastet werden (s.u.)

Rekonstruktion mit Nyquistfrequenz

Wenn ein Signal durch seine Abtastwerte eindeutig bestimmt ist, so kann $u(t)$ aus seinen Abtastwerten $\{u(nT)\}$ exakt rekonstruiert werden, d.h. $y(t) = u(t)$

Bedingungen:

- $u(t)$ muss bandbegrenzt sein (d.h. $U(\omega) = 0$ für $|\omega| \geq 2\pi B$)
- Abtastung mit Nyquistfreq.

$$T = \frac{1}{f_{Nyquist}} = \frac{1}{2B}$$

damit kein Aliasing (overlap) auftritt.

- idealer Tiefpass als Interpolationfilter

$$P(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| < 2\pi B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann läßt sich das Spektrum des ursprünglichen Signal aus dem periodischen Spektrum $U^*(\omega)$ fehlerfrei zurückgewinnen. (Das Spektrum $U(\omega)$ findet sich im Basisband von $U^*(\omega)$ mit dem Faktor $\frac{1}{T}$ skaliert wieder.)

$$Y(\omega) = U(\omega)$$

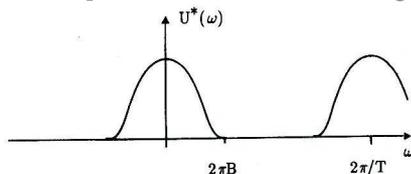
→ Rücktransformation liefert interpoliertes Signal (allerdings ist die Realisierung eines idealen Interpolationsfilters nicht möglich)

Rekonstruktion bei Überabtastung

Um ein Interpolationsfilter zu verwenden, das realisierbar ist, kann man das bandbegrenzte Signal überabtasten

$$f_A = \frac{1}{T} \geq 2B = f_{Nyquist} \quad \text{Abtastfrequenz}$$

⇒ das Spektrum wird auseinandergezogen



Nun kommt das Interpolationsfilter also mit wesentlich geringerer Flankensteilheit aus, da es sich über $2\pi B$ hinaus bis $2\pi(\frac{1}{T} - B)$ erstrecken darf.

Ein solches Filter ist z.B. das Raise-Cosine-Filter

$$P_1(\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| \leq \frac{2\pi(1-\beta)}{2T} \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \left[\frac{T(\omega - \frac{2\pi}{2T})}{2\beta} \right] \right] & \frac{2\pi(1-\beta)}{2T} \leq |\omega| \leq \frac{2\pi(1+\beta)}{2T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekonstruktion durch Halteglied 0-ter Ordnung

$$P(\omega) = \frac{1}{j\omega} [1 - e^{-j\omega T}]$$

Dieses Filter ist nicht mehr bandbegrenzt. Auch fällt der Frequenzgang schon für Frequenzen kleiner B ab. Deshalb kann $u(t)$ auch nicht fehlerfrei rekonstruiert werden

Digitale Simulation

Mit einer digitalen Simulation versucht man ein analoges System möglichst exakt durch ein zeitdiskretes zu beschreiben. Damit dies exakt möglich ist müssen folgende Bedingungen gelten

- Eingangssignal muss bandbegrenzt sein
- mind. mit Nyquistfrequenz abtasten
- das analoge System muss ebenfalls bandbegrenzt sein
- der Interpolator muss ideal sein

Galoiskörper GF(2)

Verknüpfung 'Addition':

a	b	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1 + 0 = 1 (neutrales Element)
'XOR'

Verknüpfung 'Multiplikation'

a	b	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1 ist neutrales Element
'AND'

Alle Körperaxiome (KG, AG, DG, inv. Element) gelten.

Im GF(2) dürfen Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt werden

$$1 + (-1) = 1 + 1 = 0$$

Potenzen müssen nicht berücksichtigt werden

$$a^n = a$$

!!! Die Schaltalgebra besteht auch aus zwei Elementen basiert aber auf ganz anderen Axiomen. Dabei handelt es sich nicht um einen Körper.

Operatorenkörper

Wir wollen für zeitdiskrete Systeme das Analogon zur Laplacetrafo der zeitkontinuierlichen Systeme entwickeln.

$f(n)$ sei eine Fkt. die für alle nicht neg. Zahlen $n = 0, 1, 2, \dots$ definiert ist.

$\{f(n)\}$ sei die zugehörige Folge oder Sequenz. Dabei ist $f(n)$ das n -te Element. Diese müssen einem Körper angehören.

→ Lösen von der Formulierung durch die einzelnen Glieder \Rightarrow 'Trafo'

$$\{f(n)\} \circ \longrightarrow \bullet F$$

(eigentlich keine Trafo, sonder andere Darstellung der Sequenz)

Verknüpfung 'Addition'

gliedweise addierte Sequenz

$$\{c(n)\} = \{f(n)\} + \{g(n)\} = \{f(n) + g(n)\} \circ \longrightarrow \bullet C = F + G$$

inv. Element: $F + (-F) = 0$

Verknüpfung 'Multiplikation'

Produkt zweier Sequenzen ist die diskrete Faltung

$$\{c(n)\} = \{f(n)\} * \{g(m)\} \circ \longrightarrow \bullet C = F \cdot G$$

Nullsequenz: $\{0, 0, 0, \dots\} = \{0\} \circ \longrightarrow \bullet 0$

Einssequenz: $\{1, 0, 0, \dots\} = \{\Delta(n)\} \circ \longrightarrow \bullet 1$

inv. Element muss

$$F \cdot F^{-1} = 1$$

erfüllen.

V-Transformation

$\{u(n)\}$ sei eine Sequenz. Daraus bilden wir ihre mehrfache diskrete Faltung mit sich selber.

$$\{v(n)\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \circ \longrightarrow \bullet V$$

$$\{v(n)\} * \{v(n)\} = \{0, 0, 1, 0, \dots\} \circ \longrightarrow \bullet V^2$$

$$\underbrace{\{v(n)\} * \dots * \{v(n)\}}_k = \underbrace{\{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}}_k \circ \longrightarrow \bullet V^k$$

$$V^0 = 1$$

Eine Sequenz bei der an der entsprechenden Stelle eine beliebige Zahl steht kann man als Vielfaches der Sequenz V^k auffassen, damit lässt sich also jede bel. Sequenz durch eine formale V -Potenzreihe darstellen.

$$\{f(k)\} = \{f(0), f(1), f(2), \dots\} \circ \longrightarrow \bullet F(V) = f(0)1 + f(1)V + f(2)V^2 + \dots$$

→ V-Trafo

Verschiebungssätze

Rechtsverschiebung

$$\left. \begin{array}{l} \{f(n)\} \\ \{f(n-1)\} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \{f(0), f(1), \dots\} \\ \{0, f(0), f(1), \dots\} \end{array} \right\} F_- \stackrel{\Delta}{=} \{f(n-1)\} = VF$$

allgemein: $F_{-k} \stackrel{\Delta}{=} V^k F$

Linksverschiebung

!!! Erstes Glied würde auf neg. Seite der Zeitachse verschoben \rightarrow nicht erlaubt.

$$F = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$$

$$F_+ \stackrel{\Delta}{=} \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$$

allgemein: $F_{+k} = V^{-k} F - [f(0)V^{-k} + f(1)V^{-(k-1)} + \dots + f(k-1)V^{-1}]$

Inverser Operator

V^{-1} ist keine Sequenz, sondern als Operator zu verstehen.

Rücktransformation

Möglichkeit (1)

$$F = \frac{B}{A} = \frac{b_0 1 + b_1 V + b_2 V^2 + \dots}{a_0 1 + a_1 V + a_2 V^2 + \dots} = f_0 1 + f_1 V + f_2 V^2 + \dots$$

1. Multiplikation mit A (ausmultiplizieren)
2. sortieren nach Potenzen in V
3. Vergleich von linker und rechter Seite
 $\Rightarrow f_0, \dots, f_n$

Möglichkeit (2)

Partialbruchzerlegung

\rightarrow einzelne Terme zurücktransformieren

Allgemein:

$$\text{Gegeben: } Y(V) = \frac{P_n(V)}{Q_m(V)} \quad n \text{ Grad Zähler, } m \text{ Grad Nenner}$$

Gesucht: $\{y(k)\}$

Dann gibt es folgende drei Fälle:

1. $m \leq n$ und Q_m Teiler von P_n

$$\{y(k)\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-m}, 0, \dots\} \quad \text{endliche Folge}$$

Lsg: Ausdividieren

$$\Rightarrow Y(V) = y_0 1 + y_1 V + \dots + y_{n-m} V^{n-m}$$

2. $m > n$

$$\{y(k)\} = \{\overline{y_0, y_1, \dots, y_i, \dots}\} \quad \text{periodische Folge mit } i \leq 2^m - 2$$

Lsg: periodischer Ansatz im $GF(2)$

$$\{y(k)\} = \{\overline{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, \dots}\}$$

$$\downarrow$$

$$Y(V) = \frac{a_0 1 + a_1 V + \dots + a_{p-1} V^{p-1}}{1 + V^p}$$

Es ist also ein Erweiterungspolynom $E(V)$ so zu bestimmen, das gilt

$$Y(V) = \frac{P(V) E(V)}{Q(V) E(V)} = \frac{R(V)}{1 + V^p}$$

dann beschreibt $R(V)$ einer Periode der Sequenz $\{y(k)\}$ und hat maximal den Grad $p - 1$; dabei gilt $p \leq 2^m - 1$

3. $m \leq n$ und Q_m kein Teiler von P_n :

$$\{y(k)\} = \{y_0, \dots, y_j, \overline{y_{j+1}, \dots, y_{j+q}, \dots}\} \quad \text{period. Folge mit nicht period. Anfangsgliedern}$$

Lsg: Ausdivdieren

$$\Rightarrow Y(V) = y_0 1 + y_1 V + \dots$$

V-Trafo im GF(2)

$$\begin{aligned} (1+V^2) &= (1+V)(1+V) \\ (1+V^3) &= (1+V)(1+V+V^2) \\ (1+V^4) &= (1+V)(1+V+V^2+V^3) && \text{Gerade Zahlen } \hat{=} 0 \text{ (z.B.2)} \\ (1+V^5) &= (1+V)(1+V+V^2+V^3+V^4) && \text{Ungerade Zahlen } \hat{=} 1 \text{ (z.B.3)} \\ (1+V^6) &= (1+V+V^2)(1+V+V^3+V^4) && -1 \hat{=} 1 \\ (1+V^7) &= (1+V^2+V^3)(1+V^2+V^3+V^4) && V+V \hat{=} 0 \\ &= (1+V+V^2+V^4)(1+V+V^3) && -V = V \\ (1+V^8) &= (1+V^2)(1+V^2+V^4+V^6) \\ (1+V+V^2+V^3) &= (1+V)(1+V)(1+V) \end{aligned}$$

Lineare Schieberegisterlänge $n \Rightarrow$ maximal 2^n Zustände
 Rückgekoppelte Schieberegister ohne Eingang erzeugen periodische Sequenzen. Wenn innerhalb einer Periode alle $2^n - 1$ möglichen Muster (ohne Nullzustand) angenommen werden, ist das Schieberegister maximalperiod. maximalperiodisch : das Nennerpolynom ist primitiv (def!)

primitive (Nenner-) Polynome: sind irreduzibel und erzeugen maximalperiodische Folgen ($n=2^a-1$)

Primitive Polynome :	
$1+V$	$1+V^4+V^9$
$1+V+V^2$	$1+V^3+V^{10}$
$1+V+V^3$	$1+V^2+V^{11}$
$1+V+V^4$	$1+V+V^4+V^6+V^{12}$
$1+V^2+V^5$	$1+V+V^3+V^4+V^{13}$
$1+V+V^6$	$1+V+V^6+V^{10}+V^{14}$
$1+V^3+V^7$	$1+V+V^{15}$
$1+V^2+V^3+V^4+V^8$	$1+V+V^3+V^{12}+V^{16}$

Besondere Darstellung: $X(V) = \frac{Z(V)}{1+V^p}$ Periodenlänge p & Koeff. direkt ablesbar

Bsp.: $Y(V) = V + V^2 + V^3 \frac{1+V+V^2+V^3}{1+V^5} \rightarrow y(k) = \{0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,1,1,\dots\}$

Differenzgleichungen mit Operatorenrechnung

Sei $\{u(k)\}$ die Eingangssequenz mit $u(k) = 0$ für $k < 0$
Die Differenzgleichung 2. Ordnung

$$y(k+2) + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_1u(k+1) + b_0u(k)$$

beschreibt eine Beziehung zwischen Sequenzenb also

$$\begin{aligned}\{y(k+2)\} + a_1\{y(k+1)\} + a_0\{y(k)\} &= b_1\{u(k+1)\} + b_0\{u(k)\} \\ \Leftrightarrow Y_{+2} + a_1Y_+ + a_0Y &= b_1U_+ + b_0U\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes

$$\begin{aligned}\{y(k+2)\} = Y_{+2} &= V^{-2}Y - [V^{-2}y(0) + V^{-1}y(1)] \\ \{y(k+1)\} = Y_+ &= V^{-1}Y - V^{-1}y(0)\end{aligned}$$

und mit V^2 erweitert folgt nach Y aufgelöst:

$$Y = \frac{b_1V + b_0V^2}{1 + a_1V + a_0V^2}U + \frac{y(0) + V[y(1) + a_1y(0) - b_1u(0)]}{1 + a_1V + a_0V^2}$$

Übertragungsfunktion

Wählt man nun die Anfangsbedingungen für $y(0)$ und $y(1)$ so dass $y(k) = 0$ für $k < 0$ so erhält man

$$Y(V) = G(V)U(V)$$

mit der Übertragungsfunktion

$$G(V) = \frac{b_1V + b_0V^2}{1 + a_1V + a_0V^2}$$

!!! Anfangsbedingungen nicht, wie im zeitkontinuierlichen, Null setzen, sondern so dass $y(k) = 0$ für $k < 0$.

Die Übertragungsfunktion lässt sich auch in diesem Fall als Antwort auf die Eingangsfolge $u(k) = \{1, 0, 0, \dots\}$ betrachten.

Die Transformation lässt sich dann allgemein nach $G(V)$ auflösen, also

$$G(V = \dots \Rightarrow V^n G(V) = \dots \Rightarrow \dots$$

z-Transformation \leftrightarrow V-Transformation

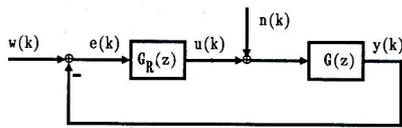
Formal kann man die V -Transformation in die z -Transformation überführen, wenn man

$$V \longrightarrow z^{-1}$$

substituiert. Dieser Zusammenhang ist allerdings rein formal da:

z :	komplexe Zahl
V :	Sequenz
$F(z)$	Potenzreihe
$F(V)$	Summe von Sequenzen

Zeitdiskreter Regelkreis



daraus folgt ähnlich dem zeitkontinuierlichen Fall

$$Y(z) = \frac{G_R(z)G(z)}{1 + G_R(z)G(z)}W(z) + \frac{G(z)}{1 + G_R(z)G(z)}N(z)$$

Wir interessieren uns hier im wesentlichen für das Führungsverhalten.

Quasiskontinuierlicher Regelkreis

Um einen diskreten Regelkreis als quasikontinuierlich zu betrachten muss das Abtastintervall T möglichst klein sein.

→ dann lassen sich die Dimensionierungsverfahren der analogen Regelungstechnik anwenden.

Digitaler PID-Regler

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{q_2 + q_1 z + q_0 z^2}{z(z-1)}$$

mit

$$q_0 = K_R \left(1 + \frac{T_D}{T} \right) \quad T_D \text{ differentiellles Glied}$$

$$q_1 = -K_R \left(1 + 2\frac{T_D}{T} - \frac{T}{T_I} \right) \quad T_I \text{ integrierendes Glied}$$

$$q_2 = K_R \frac{T_D}{T}$$

Stabilität zeitdiskreter Systeme

Ein LTI-System $G(z)$ ist dann und nur dann stabil, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$$

konvergiert. Praktikabler ist aber folgende Definition

Ein zeitdiskretes Regelsystem ist genau dann stabil, wenn alle Pole der Ü-fkt. $G(z)$ im Einheitskreis liegen.

!!! Dies ist aber nur eine notwendige Bedingung für die Stabilität eines Abtastsystems mit kontinuierlicher Regelstrecke.

Dead-Beat Regler

Ein Regler zeigt Dead-Beat-Verhalten, wenn bei einem Sprung der Sollwertfolge

$$\{w(k)\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \quad \bullet \quad W(z) = (1 - z^{-1})^{-1}$$

die Stellgröße $u(k)$ und die Regelgröße $y(k)$ nach n Schritten konstant bleiben.

$$\left. \begin{array}{l} u(k) \text{ const.} \\ y(k) \text{ const.} \\ e(k) = 0 \end{array} \right\} \text{für } k \geq n$$

Übertragungsfunktion eines Dead-Beat Regler:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1 + a_{m-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-m}}{\frac{1}{K} - b_{m-1}z^{-1} - \dots - b_0z^{-m}}$$

Ein Dead-Beat Regler ist strukturoptimal.

Zustandsraum

Zustand eines Systems

Der Zustand eines Systems ist eine Beschreibung der Wirkung der Eingangsgröße in der Vergangenheit ($t < t_0$) so, dass zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_1 > t_0$ der Ausgang des Systems und der neue Zustand bei bekannten Eingangsgrößen $u(t), t \in [t_0, t_1)$ eindeutig berechnet werden kann.

Übergangsfunktion (state transition map)

Der neue Zustand $x(t_1)$ hängt vom alten Zustand $x(t_0)$ und dem Verlauf der Eingangsgröße $u(t)$ im Intervall $[t_0, t_1)$ ab.

$$x(t_1) = \Phi[t_1, t_0, x(t_0), u]$$

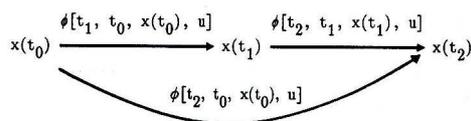
Damit Φ als Zustandsübergang bezeichnet werden kann, müssen folgende Bedingungen gelten:

Bedingung I:

$$\Phi[t_0, t_0, x(t_0), u] = x(t_0)$$

Bedingung II:

$$\Phi\{t_2, t_1, \Phi[t_1, t_0, x(t_0), u], u\} = \Phi[t_2, t_0, x(t_0), u]$$



Bedingung III:

$$u_1(t) = u_2(t) \quad t \in [t_0, t_1)$$

$$\Rightarrow \Phi[t_0, t_0, x(t_0), u_1] = \Phi[t_0, t_0, x(t_0), u_2]$$

Dabei sagt die Kausalitätsbedingung zweierlei aus

- Der Eingang für $t < t_0$ hat keinen Einfluß auf $\Phi(t_1, t_0, x(t_0), u)$, d.h. Kenntnis des gegenwärtigen Zustand $x(t_0)$ genügt für die weiteren Berechnungen ($t_1 \geq t_0$), die Kenntnis der Vergangenheit liefert also keine zusätzlichen Informationen.
- Der Eingang $t \geq t_1$ hat ebenfalls keinen Einfluß. Das System kann nicht in die Zukunft blicken.

Ausgangsfunktion

Es existieren zwei verschiedenen Definitionen für die Ausgangsfunktion

1. $y(t) \hat{=} \bar{\eta}[t, x(t)]$

2. $y(t) = \eta[t, x(t), u(t)]$

Die Wahl des Zustandsvektors ist nicht eindeutig, die richtige Wahl ist oft ein 'trial and error' Verfahren. Dabei müssen

- die drei Bedingungen erfüllt sein
- der Ausgang eine Fkt. des momentanen Zustandes und des Eingangs sein

Lokale Übergangsfunktion zeitdiskreter Systeme

Übergang vom Zustand $x(k)$ in den nächstfolgenden Zustand $x(k+1)$

$$x(k+1) = f[k, x(k), u(k)]$$

↔ glob. Übergangsfunktion beschreibt Übergang von $x(k)$ in beliebigen anderen Zustand $x(k+m)$

Dabei ist die Ausgangsfunktion

$$y(k) = \eta[k, x(k), u(k)]$$

Zeitdiskretes System (im Zustandsraum)

Ein System ist durch drei Funktionen festgelegt

- Startfunktion ($x(0)$): Anfangszustand
- Übergangsfunktion f
- Ausgangsfunktion η

Bei linearen Systemen ergeben sich folgende Zustandsgleichung

$$x(k+1) = A(k) \cdot x(k) + B(k) \cdot u(k)$$

$$y(k) = C(k) \cdot x(k) + D(k) \cdot u(k)$$

wobei x, u, y also Vektoren und A, B, C, D als Matrizen aufgefasst werden

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{Zustandsvektor}$$

$$A = n \times n - \text{Matrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \quad \text{Eingangsvektor}$$

$$B = n \times p - \text{Matrix}$$

$$C = q \times n - \text{Matrix}$$

$$D = q \times p - \text{Matrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \quad \text{Ausgangsvektor}$$

Zeitkontinuierliches System

Da bei zeitkontinuierlichen Systemen kein 'nächster' Zustand existiert, beschreibt die lokale Übergangsfunktion $f[t, x(t), u(t)]$ die Änderungsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ als Funktion von $x(t)$ und $u(t)$

Die Bedingung I – III sind auch hier gültig, da wir keine Einschränkung für diese gemacht haben.

Zusammenhang lokale ↔ globale Übergangsfunktion

$$f[t, x(t), u(t)] = \frac{d\Phi}{dt}[t, t_0, x(t_0), u]$$

Für ein lineares System gilt wieder

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t)$$

allg. Form der Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = f[t, x(t), u(t)]$$

$$y = \eta[t, x(t), u(t)]$$

Diese Darstellung ist für lineare und nichtlineare Systeme gültig, wohingegen nur bei linearen Systemen f und η durch Matrizen beschreibbar sind.

Für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$$

ergeben sich die Zustandsgleichungen zu

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1, 0, \dots, 0)x(k) \quad D = 0$$

Bestimmung von Zustandgleichungen (aus der Übertragungsfunktion)

Regelungsnormalform

hier nur ein Ein-/Ausgang

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z + b_2z^2 \dots + b_{n-1}z^{n-1}}{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n}$$

⇒ Differenzgleichungen

$$a_0y(k) + a_1y(k+1) + \dots + a_{n-1}y(k+n-1) = b_0u(k) + b_1u(k+1) + \dots + b_{n-1}u(k+n-1)$$

- falls $b_0 \neq 0, b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} u(k)$$

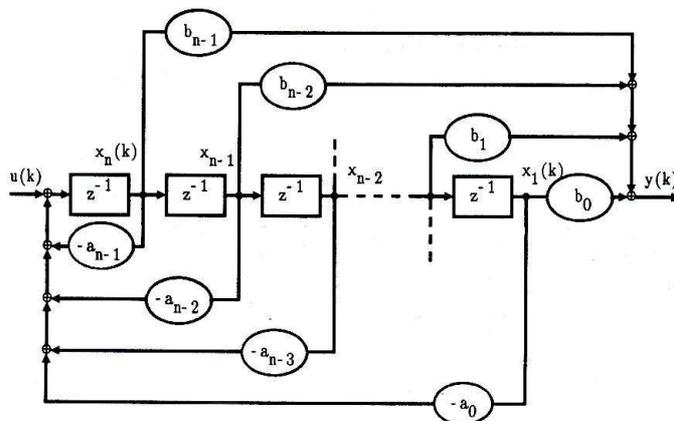
$$y(k) = (1, 0, \dots, 0)x(k) \quad D = 0$$

- sonst über Ansatz $Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot U(z) = \frac{1}{Q(z)} \cdot U(z) \cdot P(z)$

→ Regelungsnormalform (zeitdiskret)

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})x(k) \quad D = 0$$



→ Regelungsnormalform (zeitkontinuierlich)

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})x(t) \quad D = 0$$

Im Strukturbild werden Verzögerungselemente z^{-1} durch Integratoren ersetzt.

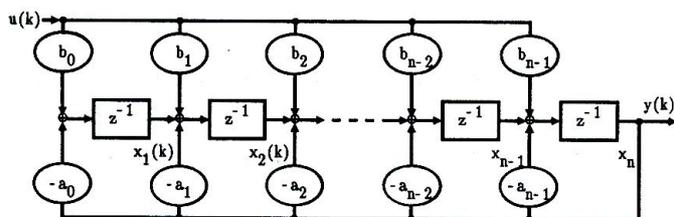
Beobachternormalform

Stellt man die Übertragungsfunktion mit neg. Exponenten in z dar, so kann man auch diese Form direkt ablesen

$$G(z) = \frac{b_0z^{-n} + b_1z^{-n+1} + \dots + b_{n-1}z^{-1}}{a_0z^{-n} + a_1z^{-n+1} + \dots + 1}$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (0, 0, \dots, 1)x(k) \quad D = 0$$



Jorandansche Normalform

für einfache Pole:

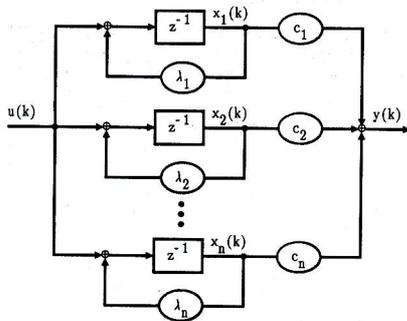
Übertragungsfunktion $G(z)$ in partialbruch-zerlegter Form schreiben

$$G(z) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - \lambda_i}$$

Daraus ergibt sich die JNF zu

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (c_1, c_2, \dots, c_n)x(k) \quad D = 0$$



für mehrfache Pole

Übertragungsfunktion der Form

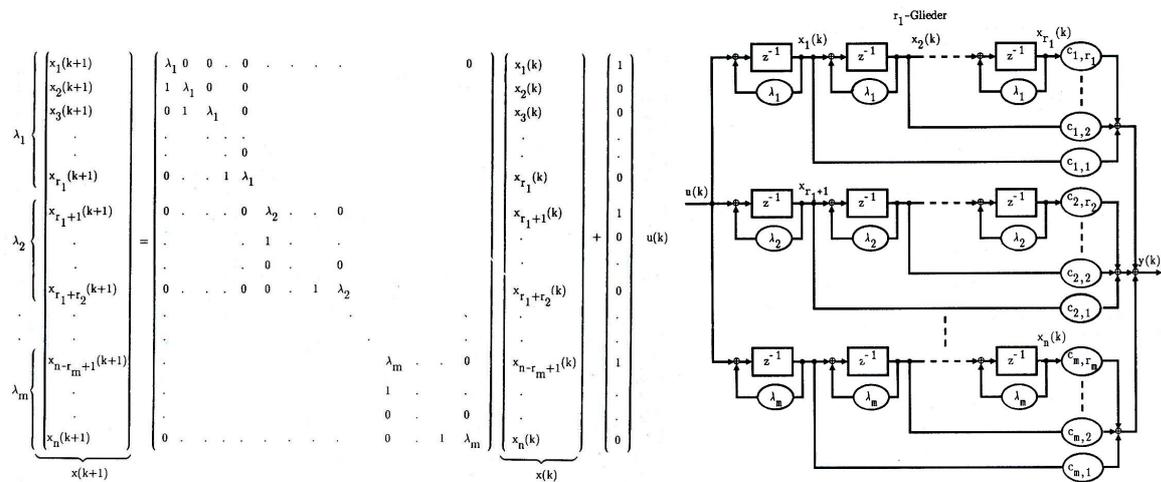
$$G(z) = \frac{c_{1,r_1}}{(z-\lambda_1)^{r_1}} + \frac{c_{1,r_1-1}}{(z-\lambda_1)^{r_1-1}} + \dots + \frac{c_{1,1}}{(z-\lambda_1)} +$$

$$+ \frac{c_{2,r_2}}{(z-\lambda_2)^{r_2}} + \frac{c_{2,r_2-1}}{(z-\lambda_2)^{r_2-1}} + \dots + \frac{c_{2,1}}{(z-\lambda_2)} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{c_{m,r_m}}{(z-\lambda_m)^{r_m}} + \frac{c_{m,r_m-1}}{(z-\lambda_m)^{r_m-1}} + \dots + \frac{c_{m,1}}{(z-\lambda_m)}$$

$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$ Grad des Nennerpolynoms



Zeitkontinuierliches in zeitdiskretes Modell umwandeln

LTI-System

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$y = Hx + Du$$

transformiert ergibt sich

$$sX(s) - x(0) = FX(s) + GU(s)$$

$$[Is - F]X(s) = x(0) + GU(s) \quad I: \text{Einheitsmatrix}$$

Transitionsmatrix

$$\Psi(t) \circ \bullet [Is - F]^{-1}$$

⇒ Matrizen des äquivalenten zeitdiskreten Modells

$$\begin{aligned}
 A &= \Psi(T) \\
 B &= \int_0^T \Psi(t) \cdot G \, dt \\
 C &= H \\
 D &= D
 \end{aligned}$$

Lösung der Zustandsgleichungen

im Zeitbereich

Die Zustandsgleichungen lauten

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Lösung

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$$

$$y(k) = \underbrace{CA^k x(0)}_{\text{autonomer Anteil}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k)}_{\text{erzwungener Anteil}}$$

mit V-Transformation

V-Transformation des Zustandsvektors erhält man durch Transformation seiner Komponenten

$$X(V) = \begin{pmatrix} x_1(V) \\ \vdots \\ x_n(V) \end{pmatrix}$$

Lösung der Zustandsgleichung

$$X(V) = [IV^{-1} - A]^{-1} V^{-1} x(0) + [IV^{-1} - A]^{-1} BU(V)$$

$$Y(V) = C[IV^{-1} - A]^{-1} V^{-1} x(0) + C[IV^{-1} - A]^{-1} BU(V) + DU(V)$$

für $x(0) = 0$

$$Y(V) = \underbrace{[C[IV^{-1} - A]^{-1} B + D]}_{\text{Übertragungsmatrix}} U(V)$$

Übertragungsfunktion aus Zustandsgleichungen

Liegen die Zustandsgleichungen direkt in RNF, BNF oder JNF vor, so kann man daraus direkt die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ableiten.

Sollte man die Ausgangsfolge auf die die Einheitsimpulsfolge kennen, so kann man wie unter \rightarrow Differenzgleichungen verfahren.

Ansonsten stellt man die Differenzgleichungen für $y(k), y(k+1), \dots$ solange aufstellen, bis man diese nur in Abhängigkeit von $y()$ und $u()$ ausdrücken kann.

Diese transformiert man und erhält so die Übertragungsfunktion $G() = \frac{Y()}{U()}$

Systemeigenschaften zeitdiskreter Systeme

Steuerbarkeit

Man nennt ein System vollständig steuerbar, wenn ein beliebiger Zustand $x(t_0)$ durch geeignete Wahl der Eingangsfunktion u in endlicher Zeit in den Endzustand $x(t_1) = 0$ überführt werden kann.

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0, x(t_0), u) = 0 \quad \text{für beliebige } x(t_0) \quad t_1 \geq t_0$$

Mathematisch ist ein System vollst. steuerbar, falls der Rang der Steuerbarkeitsmatrix Q_S gleich der Dimension n des Zustandsvektors ist

$$\text{Rang } Q_S = n \quad (\text{falls } \det Q_S = 0 \Rightarrow \text{Rang } Q_S < n)$$

mit

$$Q_S = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots, AB, B]$$

$$n = \dim X$$

Umgekehrt ist also der Rang der Matrix gleich n , falls das System vollst. steuerbar ist.

Für Systeme mit $\det A \neq 0$ ist die Bed. notwendig und hinreichend, für Systeme mit $\det A = 0$ ist sie hinreichend, aber nicht notwendig.

Es ist also möglich ein steuerbares System der Dimension n in höchstens n Schritten in den Nullzustand zu bringen.

Erreichbarkeit

Ein System ist vollständig erreichbar, wenn es durch geeignete Wahl des Steuervektors im Zeitintervall $(t_1 - t_0)$ vom Nullzustand in jeden beliebigen Zustand überführt werden kann.

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0, 0, u)$$

Mathematisch ist ein System genau dann vollständig erreichbar, wenn

$$\text{Rang } Q_S = n \quad (\text{falls } \det Q_S = 0 \Rightarrow \text{Rang } Q_S < n)$$

$$\dim x = n$$

Bedingung für Steuerbarkeit und Erreichbarkeit ist für $\det A \neq 0$ identisch.

	$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
Rang $Q_S = n$	steuerbar erreichbar	steuerbar erreichbar
Rang $Q_S < n$	nicht steuerbar nicht erreichbar	vielleicht steuerbar (keine Aussage) nicht erreichbar

Beobachtbarkeit

Ein System heißt vollständig beobachtbar, wenn man bei bekannter Steuerfunktion $u(t)$ für $t_0 \leq t < t_1$ aus der Messung von $y(t)$ über ein endliches Zeitintervall $[t_0, t_1)$ eindeutig auf den Zustand $x(t_0)$ schließen kann.

Mathematisch ist ein System vollst. beobachtbar wenn:

$$\text{Rang } Q_B = n \quad (\text{falls } \det Q_B = 0 \Rightarrow \text{Rang } Q_B < n)$$

$$Q_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Duales System

Das zum linearen System (A, B, C) duale System wird durch die Matrizen (A^T, C^T, B^T) beschrieben

Dualitätstheorem Das System (A, B, C) ist vollständig beobachtbar (respektive erreichbar), wenn das duale System (A^T, C^T, B^T) vollst. erreichbar (respektive beobachtbar) ist.

Systemeigenschaften zeitkontinuierlicher System

Steuerbarkeit

Ein System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn

$$\text{Rang } Q_S = n$$

$$Q_S = [G, FG, \dots, F^{n-1}G] \quad n = \dim x$$

Erreichbarkeit

Im zeitkontinuierlichen Fall gibt es zwischen Erreichbarkeit und Steuerbarkeit keinen Unterschied. Es gilt also gleiches wie oben.

Beobachtbarkeit

$$\text{Rang } Q_B = \text{Rang} \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Äquivalentes System

Da die Wahl der Zustandsvariable x nicht eindeutig ist, kann das System

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \right\} \Sigma$$

auch durch die Zustandsvariable x^* ausgedrückt werden

$$\left. \begin{aligned} x^*(k+1) &= A^*x^*(k) + B^*u(k) \\ y(k) &= C^*x^*(k) + D^*u(k) \end{aligned} \right\} \Sigma^*$$

Die beiden Systeme Σ, Σ^* sind äquivalent, falls gilt

Zu jedem Anfangszustand $x(0)$ von Σ existiert ein Zustand $x^*(0)$ von Σ^* , und umgekehrt existiert zu jedem $x^*(0)$ ein $x(0)$ so, dass zu jedem Zeitpunkt $k \geq 0$ für beliebige Eingangssequenzen die beiden System nicht unterschiedliche Ausgangssequenzen erzeugen.

Bei äquivalenten System muss zwischen Zustandsvariable x und x^* ein eindeutiger Zusammenhang existieren.

$$x(k) = Sx^*(k) \quad \text{und} \quad x^*(k) = S^{-1}x(k) \quad k \geq 0$$

Dabei ist S eine reguläre (invertierbare) $[n \times n]$ -Matrix und es gilt insbesondere $x(0) = Sx^*(0)$

Man bezeichnet Systeme bei denen die folgenden Beziehungen gelten

$$A^* = S^{-1}AS$$

$$B^* = S^{-1}B$$

$$C^* = CS$$

$$D^* = D$$

als ähnlich oder algebraisch äquivalent.

Der Zusammenhang

$$A^* = S^{-1}AS$$

zwischen Matrizen bedeutet, dass A^* und A die gleiche Abbildung a des Vektorraumes $X \rightarrow X$ in verschiedene Basen darstellen.

Zero-state equivalent

Ein System Σ heißt zero-state equivalent zu Σ^* für verschwindende Anfangsbedingungen und identische Eingangsfolgen $u(k)$ identische Ausgangsfolgen $y(k)$ erzeugen.

Jedes algebraisch äquivalente System ist zero-state equivalent, aber nicht umgekehrt.

Bestimmung der Basistransformationsmatrix S (auf RNF)

Bei gegebenem System beschrieben durch, A, B, C, D , sehen A^* und B^* in RNF folgendermaßen aus

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wobei a_0, \dots, a_{n-1} die Koeffiziente des charakteristischen Polynoms sind

$$\chi(z) \triangleq \det(zI - A) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n \quad (\text{bei ex. kann } K \text{ bestimmt werden})$$

Es besteht der Zusammenhang

$$SA^* = AS \quad \text{und} \quad B = SB^*$$

Die Basistransformationsmatrix $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ergibt sich zu

$$S = \underbrace{(A^{n-1}B \ \dots \ AB \ B)}_{Q_S} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & & & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

dabei sind die $a_1 \dots a_{n-1}$ die Komponenten der letzten Zeile von A^*

Eine RNF existiert für alle erreichbaren Systeme, existiert diese nicht, so existiert auch keine Basistransformationsmatrix.

Minimaläquivalentes System

Zu jedem Anfangszustand $x(0)$ von Σ existiert ein Zustand $x^*(0)$ von Σ^* so, dass zu jedem Zeitpunkt $k \geq 0$ für bel. Eingangssequenzen $u(k)$ die beiden Systeme nicht unterscheidbare Ausgangssequenzen erzeugen.

Zusätzlich soll der Zustandsraum von Σ^* die kleinstmöglich Dimension haben, d.h.

$$\text{Dim}(x^*) \leq \text{Dim}(x)$$

Äquivalenzgesetze

$$A^*R = RA \quad B^* = RB \quad C = C^*R \quad D^* = D$$

mit

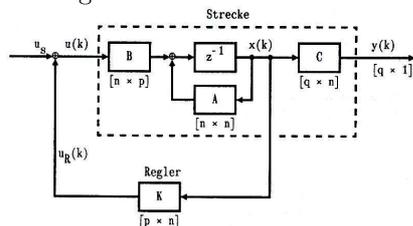
$$R = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix} = Q_B \text{ nur mit linear unabh. Zeilen}$$

(Dabei ist nicht die Invertierbarkeit von R gefordert)

⇒ Damit kann man also ein minimal äquivalentes System Σ^* zu Σ finden.

Zustandsregelung

Die allgemeine Struktur einer Zustandsregelung sieht wie folgt aus



mit

$$x(k+1) = [A + BK]x(k) + Bu_s \quad u_s : \text{ Sollgröße}$$

mit Rückkopplungsmatrix $K : [p \times n]$ -Matrix

$$y(k) = Cx(k)$$

Wir gehen davon aus, dass die Zustandsvariablen meßbar sind, was in der Realität allerdings eher selten der Fall ist. Später werden wir Methoden einführen (\rightarrow Luenberger Beobachter) um den Zustandsvektor zu schätzen.

Asymptotische Stabilität

Ein LTI-System (A, B, C) ist genau dann asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte der Matrix A im Inneren des Einheitskreises liegen.

Ein System kann zwar BIBO-stabil sein, aber nicht asymptotisch stabil, da für BIBO-Stabilität nur Ein- und Ausgang betrachtet werden, bei der asymptotischen Stabilität aber der gesamte Zustandsvektor.

Statische Forderungen

Die statische Bedingung lautet:

$$y_B = Cx_B = w$$

Aus den Voraussetzungen für die stat. Forderung folgt

$$[I - (A + BK)]x_B = 0 \quad \text{nur für } x_B = 0 \text{ erfüllt}$$

\Rightarrow der einzig mögliche Betriebszustand für u_S ist also der Nullzustand

Dynamisches Verhalten

Das dynamische Verhalten der Regelung wird durch die Eigenwerte der Systemmatrix $(A + BK)$ bestimmt

Beim Entwurf mittels Eigenwertvorgabe, muss die Rückkopplungsmatrix K so bestimmt werden, das $(A + BK)$ die geforderten Eigenwerte hat.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Eigenwerte sind Lösungen der char. Gleichung} \\ \chi(\lambda) = \det[I\lambda - A] = 0 \\ \text{Die Pole der Übertragungsfunktion entsprechen immer den Eigenwerten} \end{array} \right)$$

Bestimmung der Rückkopplungsmatrix

Beim Entwurf der Eigenwertvorgabe geht es darum, die Rückkopplungsmatrix K so zu bestimmen, dass $(A + BK)$ die geforderten Eigenwerte hat.

$$K = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$$

- Bestimmung der Koeffizienten (a_i) des char. Polynoms von $A \Rightarrow A^*$ in RNF (dieser Schritt also nur, falls A nicht in RNF vorliegt)

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix A sind Lösungen der char. Gleichung. Diese sind gleich den negativen Koeffizienten der letzten Zeile der Matrix A^*

- Festlegung der gewünschten Eigenwerte $(\tilde{\lambda}_i)$ um mit deren Hilfe K^* zu berechnen

$$\begin{aligned} \chi_{A^*+B^*K^*} &= (z - \tilde{\lambda}_1) \dots (z - \tilde{\lambda}_n) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z + \dots + \tilde{a}_{n-1} z^{n-1} + z^n \\ \Rightarrow \begin{aligned} k_0^* &= a_0 - \tilde{a}_0 \\ k_1^* &= a_1 - \tilde{a}_1 \\ &\vdots \\ k_{n-1}^* &= a_{n-1} - \tilde{a}_{n-1} \end{aligned} \end{aligned}$$

- Bestimmung der Transformationmatrix S mit

$$\begin{aligned} x(k) &= Sx^*(k) \quad x^*(k) \text{ in RNF} \\ \Rightarrow K &= K^* \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

Entwurf auf minimale Einschwingzeit (Dead-Beat Verhalten)

Ziel ist die Einstellzeit $T_S = nT$ zu erreichen. Da die Steuergröße $u(k)$ nur vom momentanen Zustand $x(k)$ abhängt kann man sie durch Zustandsrückführung erzeugen

$$u(k) = K \cdot x(k)$$

mit

$$K = (0, \dots, 1)Q_S^{-1}(-A^n) \quad n = \dim x(k)$$

Falls A direkt in RNF vorliegt gilt folgender Zusammenhang

$$\alpha_i = -a_i + k_i^*$$

$$k_i^* = a_i$$

Die Rückkopplungsmatrix K_{DB}^* ist identisch mit der vorzeicheninvertierten letzten Zeile der Systemmatrix A^*

$$K_{DB}^* = (a_0, \dots, a_{n-1})$$

Die Systemmatrix ist

$$(A^* + B^*K^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

die Einlesematrix

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Auslesematrix

$$C^* = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$$

Schätzung der Zustandsvektors (Luenberger Beobachter)

Da der Zustandsvektor häufig nicht meßbar ist, aber meist die Ein- und Ausgangsgrößen, versucht man einen solchen Vektor zu schätzen.

Ein System wird beschrieben durch

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

wobei A, B, C bekannt sind. Die Anfangszustände $x(0)$ hingegen unbekannt. Versucht man nun einen Systemzustand $\hat{x}(k)$ zu schätzen lautet das System

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$$

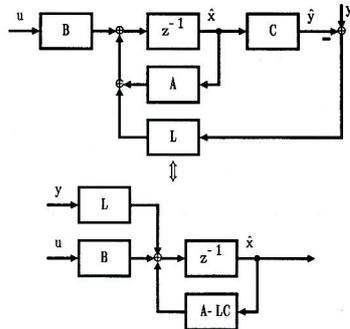
$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k)$$

Der Fehler dabei ist

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Da $y(k)$ und $\hat{y}(k)$ meßbar sind, kann man den Fehler $y(k) - \hat{y}(k)$ in einem geschlossenen Wirkkreis zu Verbesserung des dynamischen Verhaltens von $e(k)$ verwenden

→ Luenberger Beobachter



Der Rückkopplungsweig ist (im Gegensatz zum noch folgenden Kalman-Filter) zeitinvariant.

L ist dabei eine noch zu bestimmende Matrix.

$$\hat{x}(k+1) = (A - LC)\hat{x}(k) + Bu(k) + Ly(k)$$

Unter der Bedingung, dass das System beobachtbar ist kann man den Luenberger Beobachter finden, so dass dieser für beliebige Anfangszustände x_0 eine asymptotisch verschwindende Abweichung $e(k)$ zwischen tatsächlichem Systemzustand und Schätzwert aufweist.

Das zeitliche Verhalten lässt sich durch geeignete Wahl von L beeinflussen, indem man die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ als Lösung des char. Polynoms

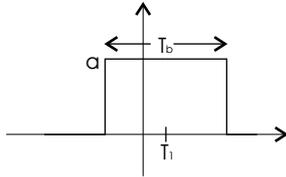
$$\chi_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC)) = (\lambda - \tilde{\lambda}_1) \dots (\lambda - \tilde{\lambda}_n)$$

vorschreibt.

Bei Dead-Beat Verhalten z.B: $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n = 0$ (mit $n = \dim x$)

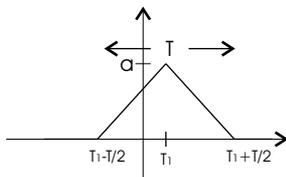
Allgemein

rect-Funktion



$$a \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_1}{T_b}\right)$$

tri-Funktion



$$a \cdot \text{tri}\left(\frac{t - T_1}{T/2}\right)$$

Faltung ↔ Multiplikation

$$F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \bullet \text{---} \circ 2\pi \cdot f_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \circ \text{---} \bullet F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$

Faltung mit Dirac

Funktion $* \delta(\omega - \omega_0) \hat{=} \text{Verschiebung der Fkt. um } \omega_0$

V-Trafo ↔ z-Trafo

$$V \longrightarrow z^{-1}$$

$$\{f(k)\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\} \circ \text{---} \bullet F(z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Totzeitglied

$$z^{-1} \text{ oder } e^{-sT_t} \quad \text{bei niedrigen Frequenzen: } \approx \frac{1}{1 + sT_t}$$

Totzeit T_t sollte min. eine Größenordnung unter der bestimmenden Zeitkonstanten liegen.

Spannung/Strom an Kapazität/Induktivität

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt + u_C(t_0)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt + i_L(t_0)$$

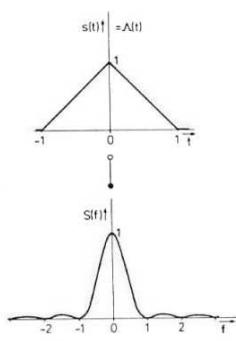
Sinus/Cosinus

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

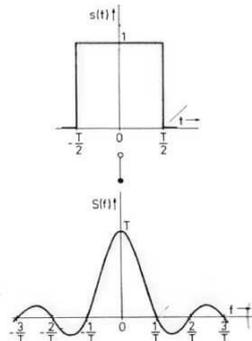
Ersetzungsregel

linksseitig: $-\varepsilon(-t) \cdot f(t) \circ \bullet F(s)$ KVG umgekehrt

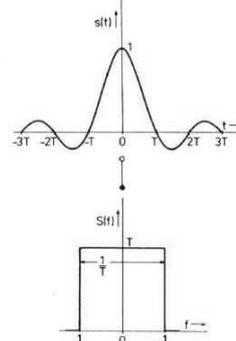
wichtige Funktionen



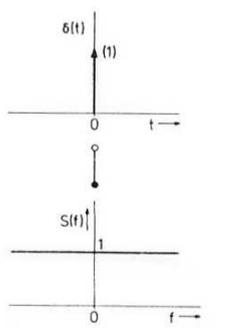
Dreieckimpuls $\Lambda(t)$ und Fourier-Spektrum



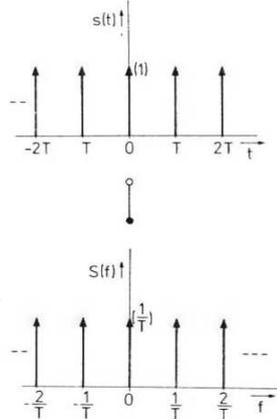
Rechteckimpuls $s(t) = \text{rect}(t/T)$ und Fourier-Transformierte



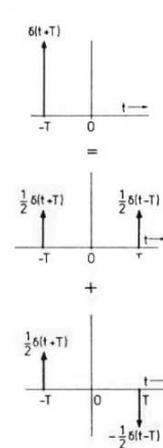
Funktion $s(t) = \text{si}(\pi t/T)$ und ihre Fourier-Transformierte



Dirac-Stoß $\delta(t)$ und zugeordnete Fourier-Transformierte



Funktion $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ und ihre Fourier-Transformierte



Aufspaltung des Dirac-Stoßes $\delta(t+T)$ in eine gerade und ungerade Komponente

Index

- $\Delta(n)$ -Sequenz, 19
- Abtastung, 16
 - Bedingungen, 23
- AD-Wandler, 16
- Äquivalentes System, 41
- Algebraisch äquivalent, 41
- Aliasing, 22
- Amplitudengang, 8
- Amplitudenreserve, 10
- Analog-Digitalwandlung, 16
- Anstiegszeit, 6
- Ausgangsfunktion, 31

- bandbegrenzte Signale, 22
- Basistransformationsmatrix
 - Bestimmung, 42
- Beobachtbarkeit, 40
 - zeitkontinuierlich, 40
- Beobachternormalform, 35
- BIBO Stabil, 9
- Blockschaltbilder, 2
- BNF, 35
- Bodediagramm, 8

- Dämpfungsgrad, 5, 6
- Dämpfungstypen, 5
- DA-Wandler, 16
- Dead-Beat Regler, 29
- Dead-Beat Verhalten, 45
- DFT, 22
- Differenzgleichungen, 19
 - mit Operatorenrechnung, 28
- Digital-Analogwandlung, 16
- Duales System, 40

- Eigenfrequenz, 5
- Einschwingzeit
 - minimale (Dead-Beat), 45
- Einstellzeit, 6
- Entkopplungsregler, 15
- Erreichbarkeit, 39
 - zeitkontinuierlich, 40

- Führungsgröße, 1
- Faltung
 - diskrete, 18, 20
- Fehler
 - stationärer, 4
- Fouriertransformation
 - diskrete, 22
- Frequenzgang, 7
 - diskret, 20

- Galoiskörper, 24
- GF(2), 24

- Halteglied, 16

- Interpolation, 22

- Jordansche Normalform, 36

- Kaskadenregelung, 14
- Kausalitätsbedingung, 31
- Korrekturereinrichtung, 1

- linear, 3
- Linearisierung, 4
- Linksverschiebung, 26
- LTI, 3
 - zeitdiskret, 19
- Luenberger Beobachter, 45

- Minimaläquivalentes System, 42
- minimalphasig, 12

- Nyquist-Kriterium
 - vereinfachtes, 9
- Nyquistfrequenz, 23

- Operatorenkörper, 25

- P-Regler, 12
- PD-Regler, 13
- Phasengang, 8
- Phasenrand, 10
- Phasenreserve, 10
- PI-Regler, 12
- PID-Regler, 14
 - digitaler, 29
- Pol
 - dominanter, 3
- primitive Polynome, 27
- Proportionalglied, 12
- Proportionalregler, 12

- Quantisierung, 16
- Quantisierungsfehler, 16

- Rückkopplungsmatrix

- Bestimmung, 44
- Rechtverschiebung, 26
- Regelabweichung
 - stationäre, 4
- Regelgröße, 1
- Regelkreis
 - entwerfen, 11
 - quasikontinuierlicher, 29
 - zeitdiskreter, 29
- Regelstrecke, 1
- Regelung, 1
 - Forderung an, 11
 - Mehrgrößen, 14
- Regelungsnormalform, 34
- Regler
 - Entkopplungs, 15
 - PD-, 13
 - PI-, 12
 - PID-, 14
- Rekonstruktion
 - mit Nyquistfrequenz, 23
- Rekonstruktion
 - bei Überabtastung, 23
 - durch Halteglied, 24
- RNF, 34
- Simulation
 - digitale, 24
- Sollwert, 1
- Spektrum, 21
- Sprungantwort, 3
- Störgröße, 1
- Störgrößenaufschaltung, 14
- Stabilität
 - absolute, 9
 - asymptotische, 43
 - im Bodediagramm, 10
 - relative, 9
 - zeitdiskreter Systeme, 29
- Stabilitätsgüte, 9
- Stelleinrichtung, 1
- Steuerbarkeit, 39
 - zeitkontinuierlich, 40
- Steuerung, 1
- Stossantwort, 3
- System
 - rückgekoppeltes, 4
- Testsignale, 5
- Transientes Verhalten, 5
- Überabtastung, 23
- Übergangsfunktion
 - globale, 31
 - lokale, zeitdiskrete, 32
- Überschwingung
 - maximale, 6
- Überschwingzeit, 6
- Übertragungsfunktion, 3
 - aus Zustandsgleichungen, 38
 - zeitdiskret, 20
- Umwandlung
 - $G(s) \rightarrow G(z)$, 20
- V-Transformation, 25
 - Übertragungsfunktion, 28
 - Rücktransformation, 26
- z-Transformation, 19
- Zeitdiskretes System
 - im Zustandsraum, 32
- zeitinvariant, 3
- Zeitkontinuierliches System
 - im Zustandsraum, 32
- zero-state equivalent, 41
- Zustand
 - eines Systems, 31
- Zustandsgleichungen
 - aus Übertragungsfunktion, 34
 - diskrete, lineare, 32
 - kontinuierliche, lineare, 32
 - lösen im Zeitbereich, 38
 - lösen mit V-Trafo, 38
 - lösen, 38
- Zustandsraum, 31
 - Umwandlung zeitkont. \leftrightarrow zeitdiskret, 37
- Zustandsregelung, 43
 - statische Forderungen, 43
- Zustandsvektor
 - Schätzung, 45