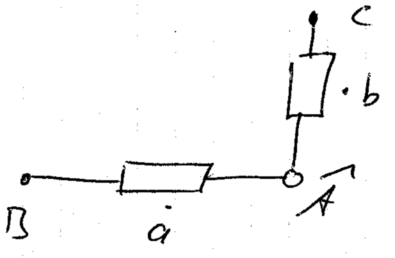
KT GÜ 7 02. DEZ. 2010

A 5.1.)

Geg.: Schwarz-weisse Bildvorlage $x(i,j)$
Ges.: zweidimensionaler Prädiktor



a.) $\hat{x}(i,j) = a \cdot x(i-1,j) + b \cdot x(i,j-1)$

b.) Prädiktionsfehler:

$$d(i,j) = x(i,j) - \hat{x}(i,j)$$
$$= x(i,j) - a(x-i,j) - b\,x(i,j-1)$$

Leistung des Prädiktionsfehlers:

$$E\{d^2\} = E\{x^2(i,j) + a^2x^2(i-1,j) + b^2x^2(i,j-1) - 2a\,x(i,j)x(i-1,j) - 2b\,x(i,j)x(i,j-1) + 2ab\,x(i-1,j)x(i,j-1)\}$$

$$= \varphi_{xx}(0,0)\cdot[1+a^2+b^2] - 2a\,\varphi_{xx}(1,0) - 2b\,\varphi_{xx}(0,1) + 2ab\,\varphi_{xx}(1,1)$$

c.) Normalengleichungen

$E\{d^2\} \rightarrow \min$

partielle Ableitungen von $E\{d^2\}$ nach a und b

$$\frac{\partial E\{d^2\}}{\partial a} = 2a\,\varphi_{xx}(0,0) - 2\cdot\varphi_{xx}(1,0) + 2b\,\varphi_{xx}(1,1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial E\{d^2\}}{\partial b} = 2b\,\varphi_{xx}(0,0) - 2\varphi_{xx}(0,1) + 2a\,\varphi_{xx}(1,1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{xx}(1,0) = a\cdot\varphi_{xx}(0,0) + b\cdot\varphi_{xx}(1,1)$$
$$\varphi_{xx}(0,1) = b\cdot\varphi_{xx}(0,0) + a\cdot\varphi_{xx}(1,1)$$

oder
$$\underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_{xx}(1,0)\\ \varphi_{xx}(0,1)\end{pmatrix}}_{\underline{R}_{xx}} = \underbrace{\begin{pmatrix}\varphi_{xx}(0,0) & \varphi_{xx}(1,1)\\ \varphi_{xx}(1,1) & \varphi_{xx}(0,0)\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{R}}_{xx}} \underbrace{\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}}_{\underline{h}_0}$$

d.) Gegeben: spezielle Bildvorlage mit

$$\varphi_{xx}(0,0) = si(0)\cdot si(0) = 1$$
$$\varphi_{xx}(1,0) = si\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot 1 \cancel{\ldots} = \frac{2}{\pi}$$
$$\varphi_{xx}(0,1) = \cancel{\ldots}\,1\cdot si\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$
$$\varphi_{xx}(1,1) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{\pi}\\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot b = \frac{2}{\pi} \qquad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} + b = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$(1)\quad a = \frac{2}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \quad \text{in } (2)$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3}}{1 - \frac{32}{\pi^4}} \approx 0,7974$$

$a = 0{,}1796$

c.) Prädiktionsgewinn: $G_p = 10 \cdot \log\left(\frac{E\{x^2\}}{E\{d^2\}}\right)$

$$= 10 \cdot \log\left(\frac{\varphi_{xx}(0,0)}{\varphi_{xx}(0)(1+a^2+b^2) - 2a\,\varphi_{xx}(1,0) - 2b\,\varphi_{xx}(0,1) + 2ab\,\varphi_{xx}(1,1)}\right)$$

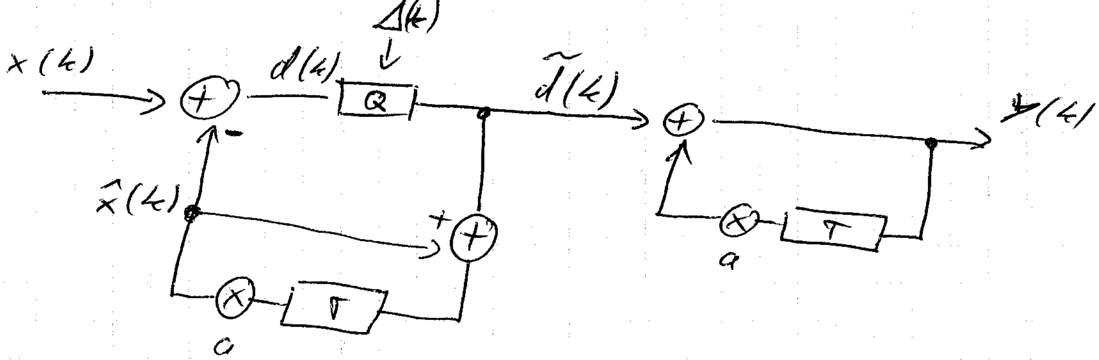
$$= 10 \cdot \log\left(\frac{1}{1\cdot(1+0{,}1796^2+0{,}7974^2) - 2\cdot 0{,}1796\cdot\frac{2}{\pi} - 2\cdot 0{,}7974\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + 2\cdot 0{,}1796\cdot 0{,}7974\cdot\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}}\right)$$

$= 7{,}75\,dB$

4.4.)

e.) Ges: $\varphi_{zz}(0) = N_z$

Gegeben: Rückwärtsprädiktion



Betrachtung von $\Delta(k)$: $x(k) = 0$ $y(k) = \Delta'(k)$

$\tilde{D}(z) = \Delta(z) - \hat{X}(z)$

$\hat{X}(z) = \left(\tilde{D}(z) + \hat{X}(z)\right)\cdot a \cdot z^{-1}$

$\Rightarrow \hat{X}(z) = \frac{a\cdot z^{-1}}{1 - a\cdot z^{-1}} \cdot \tilde{D}(z)$

$$\Rightarrow \hat{D}(z) = \Delta(z) - \frac{a \cdot z^{-1}}{1 - a \cdot z^{-1}} \hat{D}(z)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}(z) = \Delta(z) \cdot (1 - a \cdot z^{-1})$$

Empfänger

$$\Delta'(z) = \hat{D}(z) + \Delta'(z) \cdot a \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta'(z) = \hat{D}(z) \cdot \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \Delta(z) \cdot \frac{\cancel{(1 - a z^{-1})}}{\cancel{(1 - a z^{-1})}}$$

$$= \Delta(z)$$

$\Rightarrow$ Quantisierungsrauschen am Empfänger identisch mit Quantisierungsrauschen im Prädiktor

$$\Rightarrow \varphi_{zz}(0) = N_{q(c)} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$$