

Klausur am 4.3.2011

A.2.1.)

Gegeben: Quelle mit 4 möglichen Symbolen

 S_i $p(S_i)$

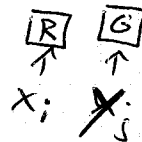
R 0,3

G 0,15

B 0,15

S 0,4

Paare von Bildpunkten:

a.) Gesucht: Verbundwahrscheinlichkeit $P(x, y)$ Die Wahrscheinlichkeit, dass $x = x_i$ und gleichzeitig $y = y_j$.z.B. $P(x = \text{"rot"}, y = \text{"grün"})$ hier: x und y statistisch unabhängig \Rightarrow per Definition $P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$ $\Rightarrow P(x = x_i, y = y_j) = P(x = x_i) \cdot P(y = y_j)$ d.h. $(P(x = \text{"rot"}, y = \text{"grün"}) = P(x = \text{"rot"}) \cdot P(y = \text{"grün"}))$

$$\Rightarrow [P(x_i, y_j)] =$$

x_i/y_j	rot	grün	blau	schwarz
R	0,09	0,045	0,045	0,12
G	0,045	0,0225	0,0225	0,06
B	0,045	0,0225	0,0225	0,06
S	0,12	0,06	0,06	0,16

b.) bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(y|x) = P(y=y_j | x=x_i)$$

Wkt., dass $y=y_j$, wenn bekannt ist,
dass $x=x_i$.

Es gilt immer:

$$\sum_j P(y=y_j | x=x_i) \stackrel{!}{=} 1$$

$[P(y_j | x_i)] =$

y_j/x_i	R	G	B	S
R	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$3/8$
G	$1/3$	0	0	$1/8$
B	$1/3$	$1/3$	0	0
S	$1/6$	$1/3$	$2/3$	$1/2$

c.) Gesucht: $P(x=x_i, y=y_j)$

$$P(x, y) = P(y|x) \cdot P(x)$$

$P(x, y) =$

y_j/x_i	R	G	B	S
R	0,05	0,05	0,05	0,15
G	0,1	0	0	0,05
B	0,1	0,05	0	0
S	0,05	0,05	0,1	0,2

KT Gü 1

d.) Gesucht $P(x=x_i | y=y_j)$

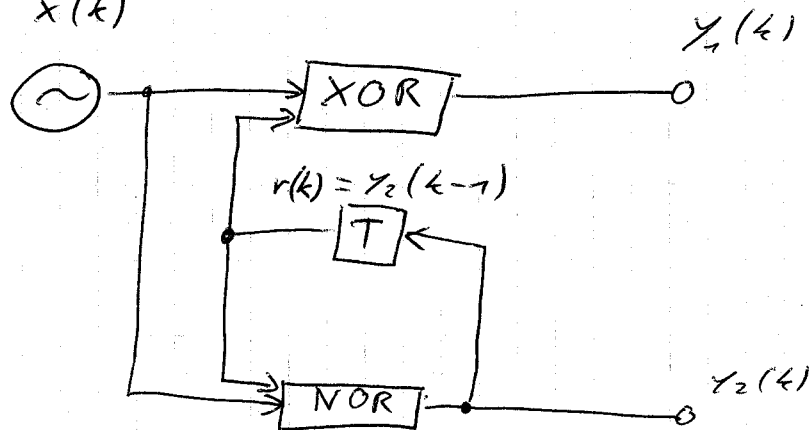
$$P(x, y) = P(y | x) \cdot P(x)$$

$$\Rightarrow P(y | x) = \frac{P(x, y)}{P(x)}$$

$$\text{Satz von Bayes: } P(x | y) = \frac{P(x, y)}{P(y)} = \frac{P(y | x) \cdot P(x)}{P(y)}$$

$[P(x | y)] =$

x_i / y_j	R	G	B	S
R	$1/6$	$2/3$	$2/3$	$1/8$
G	$1/6$	0	$1/3$	$1/8$
B	$1/6$	0	0	$1/4$
S	$1/2$	$1/3$	0	$1/2$
Σ	1	1	1	1

A2.2.)a.) $x(k)$ 

$$y_1(k) = x(k) \oplus y_2(k-1) = x(k) \oplus r(k)$$

$$y_2(k) = \overline{x(k) + y_2(k-1)}$$

\uparrow
 logisches ODER

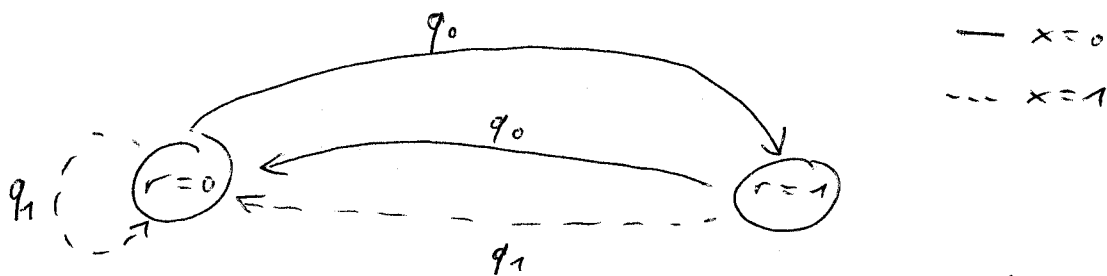
$x(k)$	$r(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

$y = (1, 1)$ kommt auf keinen Fall vor!

b.) 1 Speicherglied \Rightarrow 2 Zustände

$$r = 0$$

$$r = 1$$



$$P(r_{-1}) = P(r)$$

$$P(r=0) = P(r=0 | r_{-1}=0) \cdot P(r_{-1}=0) + P(r=0 | r_{-1}=1) \cdot P(r_{-1}=1)$$

$$\Rightarrow P(r=0) = q_1 \cdot P(r=0) + \underbrace{(q_0 + q_1)}_{=1} \cdot P(r=1)$$

2. Gleichung:

$$\Rightarrow P(r=0) + P(r=1) = 1$$

$$\Rightarrow P(r=1) = 1 - P(r=0)$$

$$\Rightarrow P(r=0) = q_1 \cdot P(r=0) + 1 - P(r=0)$$

$$\Rightarrow P(r=0) = \frac{1}{1+q_0} \Rightarrow P(r=1) = \frac{q_0}{1+q_0}$$

$$P(i=0) = P(y_1=0, y_2=0) = q_1 \cdot P(r=1) = \frac{q_1 q_0}{1+q_0}$$

KT Gü1

$$P(i=1) = q_0 \cdot P(r=0) = \frac{q_0}{1+q_0}$$

$$P(i=3) = 0$$

$$\begin{aligned} P(i=2) &= 1 - P(i=0) - P(i=1) - P(i=3) \\ &= \frac{1 - q_0 \cdot q_1}{1 + q_0} \end{aligned}$$

