KT GÜ 9

A6.2.)

a.) Gegeben: $\underline{G}$: (7,4)-Matrix
Gesucht: # Informationsstellen
Prüfstellen

Aus $\underline{G}$: $n = 4$ Informationsstellen
m: Codewortlänge 7 bit
$k = m - n = 3$ Prüfstellen

b.) Gesucht: systematische Generatormatrix

Ziel: $\underline{G_{sys}} = [\, \underline{E}_n \mid \underline{P} \,]$

mit E_n Einheitsmatrix
P Paritätsmatrix

prinzipiell erlaubte Operationen:
- Vertauschen von Zeilen
- Vertauschen von Spalten
- Addition von Zeilen

<u>hier</u> nur Zeilenoperationen

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Addition der Zeilen 2, 3, 4:

1 0 0 0 1 1 0

Addition von 1, 3, 4:

0 1 0 0 0 1 1

Addition von 2, 4:

0 0 1 0 1 1 1

Addition von 1, 2, 3, 4:

0 0 0 1 1 0 1

Damit erhält man:

$$\underline{G}_{sys} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

c.) Gesucht: Korrekturen eigenschaften, d_{min}

Code-Tabelle

X_i	$y_i = X_i \cdot G_{sys}$	$\|y_i\|$
0000	0000000	0
0001	0001101	3
0010	0010111	4
0011	0011010	3
0100	⋮	
0101		
0110		
0111		
1000		
1001		
1010		
1011		
1100		
1101		
1110		
1111		

$$d_{min} = \min_{i \neq 0} \|y_i\| = 3$$

$\Rightarrow$ 1fache Fehlerkorrektur oder 2fache Fehler erkennen

KT GÜ 3

d.) Gesucht: Syndrome von

$$\underline{z}_1 = [1100100]$$
$$\underline{z}_2 = [1011010]$$

- Bestimmung der Prüfmatrix $\underline{H}^T$

$$\underline{H}^T = \begin{pmatrix} P \\ E_{m-n} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Paritätsmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Geg. Block-Code ist ein Hamming-Code, da $\underline{H}^T$ aus allen $(2^k)-1 = 7$ von Null verschiedenen Dualzahlen besteht.

$\Rightarrow d_{min} = 3$

Bestimmung der Syndrome S_1 und S_2

Für gestörte Eingangsvektoren gilt:

$$\underline{z} = \underline{y} + \underline{E} \leftarrow \text{Fehlervektor}$$
$$\underline{S} = \underline{z} \cdot \underline{H}^T = (\underline{y} + \underline{E}) \cdot \underline{H}^T$$
$$= \underline{E} \cdot \underline{H}^T, \text{ da } \underline{y} \cdot \underline{H}^T = \underline{0}$$

$$\underline{S}_1 = \underline{z}_1 \cdot \underline{H}^T = (1100100) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (001)$$

$$\underline{S}_2 = \underline{z}_2 \cdot \underline{H}^T = (110)$$

Syndromtabelle 1-fache Bitfehler

$\underline{E}$	$s = E \cdot H^T$	
1000000	110	← s_2
0100000	011	
0010000	111	
0001000	101	
0000100	100	
0000010	010	
0000001	001	← s_1

Fehlerkorrektur

$\underline{y}_1 = \underline{z}_1 + (0000001) = (1100101)$

$\Rightarrow \underline{x}_1 = (1100)$

$\underline{y}_2 = \underline{z}_2 + (1000000) = (\underline{0}011010)$

$\Rightarrow \underline{x}_2 = (0011)$

e.)

Korrektur der Störung ist vergleichbar mit Erasure-Korrektur:

z.B. Empfang von

0 1 0 0 0 1 1

immer 0

$\cancel{x}$ 1 0 0 0 1 1

Korrektur: 1. Ersetzen durch 1

$\hat{\underline{y}}_1$ = 1 1 0 0 0 1 1

$\underline{s}_1$ = 1 1 0 $\Rightarrow$ E = 1000000

2. Ersetzen durch 0:

y_0 = 0 1 0 0 0 1 1

s_0 = 0 0 0 ← kein Fehler

$\Rightarrow y$ = 0100011

KT Güg

16. DEZ. 2010

Fehlerkorrektur mit Zusatzinformationen:

$$2e' + \lambda + 1 \le d_{min}$$

Korrektur von e' Fehlern <u>und</u>

λ Erasure-Stellen

hier: $\lambda = 1$ $\quad d_{min} = 3$

$\Rightarrow \quad 2e' \le 1$

$\Rightarrow \quad e' = 0$

Es sind aber <u>keine</u> zusätzlichen Fehler korrigierbar

<u>6.5.)</u> <u>a.)</u> Bestimmung von g_1

Das Generatorpolynom muss ein Teiler des Polynoms $(z^{m}+1)$ sein

Polynomdivision

$$
\begin{aligned}
&(z^7+1) : (z^4 + z^3 + z^2 + g_1 \cdot z + 1) = z^3 + z^2 + (g_1+1) \\
&\underline{-(z^7 + z^6 + z^5 + g_1 z^4 + z^3)} \\
&\quad (z^6 + z^5 + g_1 z^4 + z^3 + 1) \\
&\quad \underline{-(z^6 + z^5 + z^4 + g_1 z^3 + z^2)} \\
&\quad (g_1+1)z^4 + (g_1+1)z^3 + z^2 + 1 \\
&\quad \underline{-((g_1+1)z^4 + (g_1+1)z^3 + (g_1+1)z^2 + g_1 \cdot (g_1+1) \cdot z + g_1 + 1)} \\
&\quad g_1 z^2 + g_1(g_1+1)z + g_1 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow g_1 = 0}}$$