TI 1 GÜ 11

04. FEB. 2011

Klausur 29.3. 14:00

Hörsaal AH IV, FT (Aufteilung folgt)

zugelassene Hilfsmittel:

- nicht programmierbarer TR
- Formelblatt (wird ausgeteilt) -> siehe Website

Zusatzübung: 21.3. 14:00 S1, uSH

Sprechstunde: 24.3. 14:00 uSH, 24A 407 (nur Fragen)

A1.) $\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log(d)} \Leftrightarrow p_j = d^{-n_j}$ $j = 1, \ldots, m$

$p_j > 0$

$\boxed{0 \cdot \log(0) = 0}$

$\Leftarrow$:

$$\boxed{H(X) = \sum_{j=1}^{m} p_j \log(p_j)}$$

sei $p_j = d^{-n_j}$

$$\frac{H(X)}{\log(d)} = -\sum_{j=1}^{m} p_j \log_d(p_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j\left(-\log_d\left(d^{-n_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j n_j = \underline{\underline{\bar{n}(g)}}$$

$\Rightarrow$: sei $\bar{n}(g) = \sum_{j=1}^{m} p_j n_j = \frac{H(X)}{\log(d)}$

$$\Leftrightarrow 0 = H(X) - \sum_{j=1}^{m} n_j p_j \cdot \log(d)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{j=1}^{m} p_j \log(p_j) - \sum_{j=1}^{m} n_j p_j \cdot \log(d)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \log\left(\frac{d^{-n_j}}{p_j}\right)$$

$$\le \log(e) \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\frac{d^{-n_j}}{p_j} - 1\right)$$

$$= \log\Big(\sum_{j=1}^{m} d^{-n_j} - \underbrace{\sum_{j=1}^{m} p_j}_{1}\Big)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x) \le x-1 \\ \text{g.d.w. } x > 0 \\ \quad =, \text{ wenn } x = 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{McMillan} \\ \sum_{j=1}^{m} d^{-n_j} \le 1 \end{array}}$$

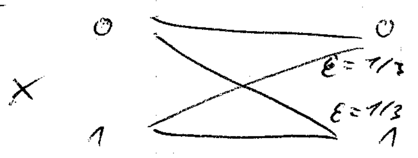
$$= \log(e)\Big(\sum_{j=1}^{m} d^{-n_j} - 1\Big)$$

$$= \log(e)\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} d^{-n_j} - 1}_{\le 0 \text{ (McMillan)}}\Big)$$

Es gilt also: $0 \le 0 \to$ Gleichheit bei der ersten Ungleichung

$$\frac{d^{-n_j}}{p_j} = 1 \Leftrightarrow p_j = d^{-n_j}$$

A2.)



$C_0 = (0,0,0)$

$C_1 = (1,1,1)$

$P(C_0) = 1/4 \qquad P(C_1) = 3/4$

a.) $B = \{0,1\}^3 \qquad b = B$

$$P(y=b) = \frac{1}{4} \cdot P(y = b \mid x = C_0) + \frac{3}{4} P(y = b \mid x = C_1)$$

T1.1 Gü 11

b	$P(y=b)$
000	$\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^3 + \frac{3}{4}(\varepsilon)^3 = \frac{11}{108}$
001	$\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2\varepsilon + \frac{3}{4}\varepsilon^2(1-\varepsilon) = \frac{10}{108}$
010	10/108
100	10/108
011	14/108
101	14/108
110	14/108
111	25/108

$$P_K = P(y=c_0, X=c_0) + P(y=c_1, x=c_1)$$
$$= P(y=c_0 | x=c_0)P(x=c_0) + P(y=c_1 | x=c_1)P(x=c_1)$$
$$= \frac{1}{4}(1-\varepsilon)^3 + \frac{3}{4}(1-\varepsilon)^3 = (1-\varepsilon)^3 = \frac{8}{27}$$

c.) analog zu b.)

$$P_E = \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{3}{4}\varepsilon^3 = \varepsilon^3 = \frac{1}{27}$$

d.)

$$h_{ML}(b) \Rightarrow P(b|c) \geq P(b|a) \quad \forall a \in C$$

$P(b|c)$

b	$c=(0,0,0)$	$c=(1,1,1)$	$h_{ML}(b)$	
$(0,0,0)$	$(1-\varepsilon)^3 = \frac{8}{27}$	$\varepsilon^3 = \frac{1}{27}$	$(0,0,0)$	$\frac{8}{27} > \frac{1}{27}$
$(0,0,1)$	4/27	2/27	$(0,0,0)$	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	
$(1,1,1)$	1/27	8/27	$(1,1,1)$	

e.) $h_{ME}(b) \Rightarrow P(c|b) \geq P(d|b) \quad \forall d \in C$

$$P(c|b) = \frac{P(b|c)\,P(c)}{P(b)}$$

b	$c=(0,0,0)$	$c=(1,1,1)$	$h_{ME}(b)$
$(0,0,0)$	$8/11$	$3/11$	$(0,0,0)$
$(0,0,1)$	$2/5$	$3/5$	$(1,1,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(1,1,1)$	$1/25$	$24/25$	$(1,1,1)$

A3.)

a.) BSC mit $\varepsilon = 0{,}1$ $\quad (M,N)$-Kodes

Anz Kodewörter $\quad$ Länge

Bsp.: 3.3.2.

$$C = 1 + (1-\varepsilon)\log_2(1-\varepsilon) + \varepsilon \log_2(\varepsilon)$$

$$= 0{,}531 \ \frac{\text{Symbole}}{\text{ZE}}$$

b.) $(2^{0{,}6N}, N) \Rightarrow M = 2^{0{,}6N}$

Fundamentalsatz:

$$\frac{\log_2(2^{0{,}6N})}{N} < R \quad \text{mit} \quad R < C$$

$$\frac{\log_2(2^{0{,}6N})}{N} = \frac{0{,}6N}{N} = 0{,}6$$

$$0{,}6 < R \not< C$$

$\lightning$

$\Rightarrow$ also existieren keine solche Kodes, da $C = 0{,}531 < 0{,}6$, siehe a.)

T 1.1 GÜ 11

c) $R \frac{\text{Symbole}}{\text{ZE}}$ $2^k, N$

$$\frac{\log_2(M)}{N} < R$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\log_2(M)}{R}$$

$$\Leftrightarrow N > \frac{\log_2(2^k)}{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{N > \frac{k}{R}}}$$