TI1 - GÜ8

14. JAN. 2011

1.) a.)

$$\underline{x} \sim SCN(\underline{\mu}, Q)$$
$$\underline{y} = A \cdot \underline{x}$$

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{x}) \\ Im(\underline{x}) \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{y}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{y}) \\ Im(\underline{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(A\underline{x}) \\ Im(A\underline{x}) \end{pmatrix} = \hat{A} \cdot \hat{\underline{x}}$$

$$Re(\underline{y}) = Re(A\underline{x}) = Re(A)\,Re(\underline{x}) - Im(A)\,Im(\underline{x})$$

$$Im(\underline{y}) = Im(A\underline{x}) = Im(A)\,Re(\underline{x}) + Re(A) \cdot Im(\underline{x})$$

$\Rightarrow$ Real- und Imaginärteil von $\underline{y}$ beide normalverteilt

Bestimmung von $E[\underline{y}]$ und
$E[(\underline{y} - E(\underline{y}))(\underline{y} - E(\underline{y}))^*]$ mit Proposition 2.4.6.
(hier für komplexe Größen)

$$E(\underline{y}) = E[A \cdot \underline{x}] = A \cdot E[\underline{x}] = A\underline{\mu}$$

$$E[(\underline{y} - E(\underline{y}))(\underline{y} - E(\underline{y}))^*] = E[(A\underline{x} - A\underline{\mu})(A\underline{x} - A\underline{\mu})^*]$$
$$= E[A(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})^* A^*]$$
$$= A\, E[(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})^*]\, A^*$$
$$= A Q A^*$$

Transponiert

$$Cov(\hat{\underline{y}}) = Cov(\hat{A}\hat{\underline{x}}) = Cov\left(\hat{A}\begin{pmatrix} Re(\underline{x}) \\ Im(\underline{x}) \end{pmatrix}\right) \cdot \hat{A}'$$
$$= \hat{A}\, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Re(Q) & -Im(Q) \\ Im(Q) & Re(Q) \end{pmatrix} \hat{A}'$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Re(AQA^*) & -Im(AQA^*) \\ Im(AQA^*) & Re(AQA^*) \end{pmatrix}$$

Damit ist gezeigt, dass $A\underline{x} \sim SCN(A\underline{\mu}, AQA^*)$ gilt. siehe Prop. 2.6.4.

b.)
$\underline{x} \sim SCN(\underline{\mu}_1, Q_1)$
$\underline{y} \sim SCN(\underline{\mu}_2, Q_2)$

$$\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$$

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{x}) \\ Im(\underline{x}) \end{pmatrix} \qquad \hat{\underline{y}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{y}) \\ Im(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{z}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{z}) \\ Im(\underline{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\underline{x}) + Re(\underline{y}) \\ Im(\underline{x}) + Im(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

Theorem 2.4.14.
Summe von zwei unabh. Zufallszahlen
=> Dichte gegeben durch die Faltung der Dichten

Prop 2.4.15
Summe von normalverteilten Zufallszahlen ist selbst auch normalverteilt

=> $Re(\underline{x}) + Re(\underline{y})$
$Im(\underline{x}) + Im(\underline{y})$ beide Normalverteilt

$$\underline{\mu} = E(\underline{z}) = E(\underline{x} + \underline{y}) = E(\underline{x}) + E(\underline{y}) = \underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2$$
$$Q = E[(\underline{z} - E(\underline{z}))(\underline{z} - E(\underline{z}))^*]$$

$$= E\left[(\underline{z}-\underline{\mu})(\underline{z}-\underline{\mu})^* \right]$$
$$= E\left[(\underline{x}-\underline{\mu}_1+\underline{y}-\underline{\mu}_2)(\underline{x}-\underline{\mu}_1+\underline{y}-\underline{\mu}_2)^* \right]$$
$$= E\left[(\underline{x}-\underline{\mu}_1)(\underline{x}-\underline{\mu}_1)^* \right] + \cancel{E\left[(\underline{x}-\underline{\mu}_1)(\underline{y}-\underline{\mu}_2)^* \right]}$$
$$+ \cancel{E\left[(\underline{y}-\underline{\mu}_2)(\underline{x}-\underline{\mu}_1)^* \right]} + E\left[(\underline{y}-\underline{\mu}_2)(\underline{y}-\underline{\mu}_2)^* \right]$$

$$= Q_1 + Q_2$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\underline{z}}) = \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{z}) \\ \mathrm{Im}(\underline{z}) \end{pmatrix} + \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) + \mathrm{Re}(\underline{y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) + \mathrm{Im}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) \end{pmatrix} + \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

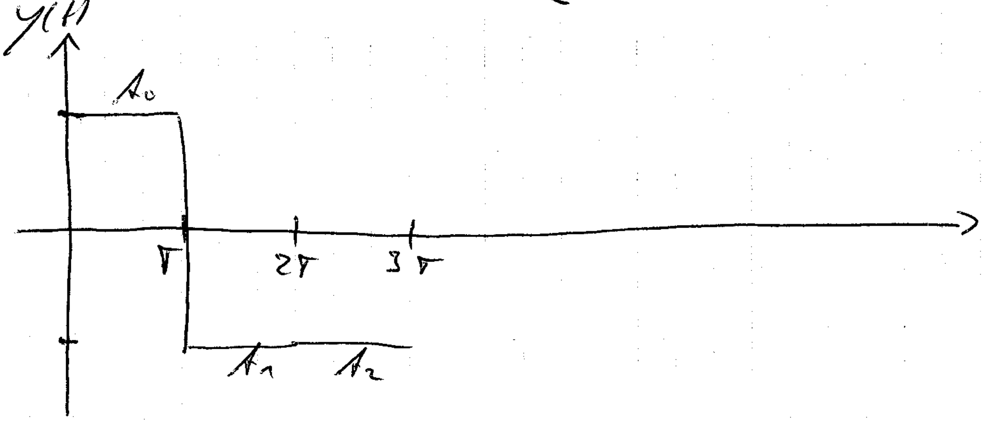
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_1) & -\mathrm{Im}(Q_1) \\ \mathrm{Im}(Q_1) & \mathrm{Re}(Q_1) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_2) & -\mathrm{Im}(Q_2) \\ \mathrm{Im}(Q_2) & \mathrm{Re}(Q_2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_1+Q_2) & -\mathrm{Im}(Q_1+Q_2) \\ \mathrm{Im}(Q_1+Q_2) & \mathrm{Re}(Q_1+Q_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}+\underline{y} \sim SCN(\underline{\mu}_1+\underline{\mu}_2,\ Q_1+Q_2)$$

2.1 a.)

$$x(t) = A_{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} = \begin{cases} A_{-1} & \text{für } -T \le t < 0 \\ A_0 & 0 \le t < T \\ A_1 & T \le t < 2T \\ A_2 & 2T \le t < 3T \end{cases}$$



b.)
Die A_n sind identisch verteilt
=> auch ihre Erwartungswerte sind identisch.

$$E[A_n] = 1 \cdot P(A_n = 1) + (-1) P(A_n = -1)$$
$$= 1 \cdot p + (-1)(1-p)$$
$$= 2p - 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A_{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor}] = 2p - 1$$

unabhängig von t.
=> Erwartungswertfunktion ist konstant.
$p = \frac{1}{2}$ $\mu_X(t) = 0$

c.) wenn $X(t)$ stationär sein soll
dann muss für alle $k \in \mathbb{N}$
und alle $t_1, \dots, t_k$, $s \in \mathbb{R}$
$$F_{(X(t_1), \dots, X(t_k))} = F_{(X(t_1+s), \dots, X(t_k+s))}$$

D. h. alle endlich dimensionalen Randverteilungen müssen invariant gegenüber einer Zeitverschiebung 's' sein.

<u>$X(t)$ ist nicht strikt stationär</u>

dazu Gegenbeispiel

$k = 2$
$t_1 = \frac{T}{4}$ $\quad t_2 = \frac{3T}{4}$ $\quad s = \frac{T}{2}$

TI Gü 8

$\Rightarrow t_1 + s = \frac{3T}{4} \qquad t_2 + s = \frac{5T}{4}$

$(x(t_1), x(t_2)) = (x(\frac{T}{4}), x(\frac{T \cdot 3}{4}))$

$= (A_{\lfloor \frac{1}{4} \rfloor}, A_{\lfloor \frac{3}{4} \rfloor})$

aber $= (A_0, A_0)$

$(x(t_1+s), x(t_2+s)) = (x(\frac{3T}{4}), x(\frac{5T}{4}))$

$= (A_{\lfloor \frac{3}{4} \rfloor}, A_{\lfloor \frac{5}{4} \rfloor}) = (A_0, A_1)$

- Im ersten Fall haben beide Komponenten der Randverteilung stets den selben Wert
- Im zweiten Fall sind beide Werte zwar identisch verteilt, aber stochastisch unabhängig da die A_n s.u.

$F_{(x(t_1), x(t_2))}(-1,-1) = P(x(t_1) \leq -1, x(t_2) \leq -1)$

$= P(A_0 \leq -1)$

$= 1 - p$

$F_{(x(t_1+s), x(t_2+s))} = P(x(t_1+s) \leq -1, x(t_2+s) \leq -1)$

$= P(A_0 \leq -1, A_1 \leq -1)$

$= (1-p)^2$

$\Rightarrow$ außer für $p=0$ und $p=1$ ist die betrachtete Randverteilung nicht invariant gegen eine Zeitverschiebung

$\Rightarrow x(t)$ ist nicht strikt stationär

d.) $R_{xx}(0, t_2) = E[x(0) \cdot x^*(t_2)]$

$= E(A_0 \cdot A_{\lfloor \frac{t_2}{T} \rfloor})$

$$= \begin{cases} E(A_0^2) & \text{für } 0 \leq t < T \\ E(A_0) E[A_{\lfloor \frac{t_2}{T} \rfloor}] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ (2p-1)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$R_{xx}\left(\frac{T}{2}, t_2\right) = E\left[x\left(\frac{T}{2}\right) \cdot x^*(t_2)\right]$$

$$= \begin{cases} E(A_0^2) = 1 & \text{für } 0 \leq t_2 < T \\ E(A_0)\, E(A_{\lfloor \frac{t_2}{T} \rfloor}) = (2p-1)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

e.) - Erwartungswert über Zeit konstant ✓
- aber: Autokorrelationsfkt. ist nicht nur von der Differenz $t_1 - t_2$ abh.

Gegenbeispiel:

$t_1 = 0 \qquad t_2 = \frac{3T}{4} \qquad \Rightarrow t_1 - t_2 = -\frac{3T}{4}$

$R_{xx}(t_1, t_2) = 1 \qquad t_1 = \frac{T}{2} \qquad t_2 = \frac{5T}{4}$

$R_{xx}(t_1, t_2) = (2p-1)^2$

$\Rightarrow$ Autokorrelationsfkt. nicht nur von der Diff. $t_1 - t_2$ abh. und

$\Rightarrow$ der Prozess ist nicht schwach stationär