TI1 GÜ10

Zusatzübung 21.3. 14 Uhr WSH S1

A1) $F(p_1, p_2, p_3, \lambda) = H(X) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1 \right) = *$

Bedeutung: Wir maximieren $H(X)$ unter der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$\frac{\partial}{\partial p_1} F(p_1, p_2, p_3, \lambda)$

$= -\log(p_1) - p_1 \frac{1}{p_1} + \lambda \overset{!}{=} 0$

$* = -\sum_{i=1}^{3} p_i \cdot \log(p_i) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{3} p_i - 1 \right)$

$\frac{\partial}{\partial p_2} F(p_1, p_2, p_3, \lambda) = -\log(p_2) - 1 + \lambda \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial}{\partial p_3} F(\ldots) = -\log(p_3) - 1 + \lambda \overset{!}{=} 0$

$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(\ldots) = \sum_{i=1}^{3} p_i - 1 \overset{!}{=} 0$

$\log(p_i) = \lambda - 1 \Rightarrow p_i = b^{\lambda - 1}$ wenn b die Basis des verw. log ist.

$\Rightarrow$ alle p_i gleich

mit $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$

$\Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

A 2.)

$\rho = 1 - \frac{H(X_2 | X_1)}{H(X_1)} = 1 - \frac{H(X_2) - I(X_1, X_2)}{H(X_1)}$

$= 1 - \frac{H(X_1) - I(X_1, X_2)}{H(X_1)}$

$$= 1 - 1 + \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)} = \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)}$$

b.)

$$\rho = \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)} \geq 0$$

$$I(X_1, X_2) \geq 0 \quad \text{und} \quad H(X_1) \geq 0$$

$$I(X_1, X_2) = H(X_2) - H(X_2 | X_1) \geq 0$$

$$0 \leq H(X_2 | X_1) \leq H(X_2)$$

$$\rho = \frac{I(X_1, X_2)}{H(X_1)} = \frac{H(X_1) - H(X_1 | X_2)}{H(X_1)}$$

$$= 1 - \frac{H(X_1 | X_2)}{H(X_1)} \leq 1$$

c.)

$$\rho = 0 \iff \frac{H(X_1 | X_2)}{H(X_1)} = 1$$

$$\iff H(X_1 | X_2) = H(X_1)$$

$\iff$ X_1, X_2 stochastisch unabhängig

A3)

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \qquad Y = \{y_1, \dots, y_m\}$$

$$g: X \to Y$$

Bel.: $H(g(X)) \leq H(X)$

Bew.: $H(X, g(X)) = H(X) + H(g(X) | X) = *$

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p(X = x_i, Y = y_j) \cdot \log\{p(X = x_i, Y = y_j)\}$$

$$= - \sum_{i,j} p(X = x_i, Y = y_j) \cdot \log\{p(Y = y_j | X = x_i)\}$$

$$+ \log(p(X = x_i))$$

Ti 1 Gü10 28. JAN. 2011

$$= H(y|x) + H(x)$$

$$* = H(x)$$

$$H(x, g(x)) = H(g(x)) + H(x|g(x))$$

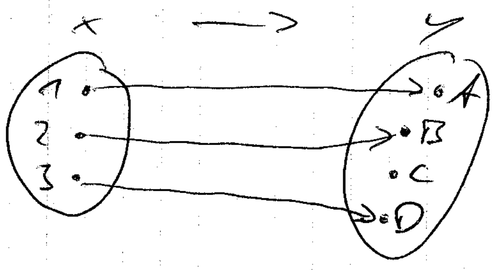
$$\geq H(g(\cancel{x}))$$

$$H(x) \geq H(g(x))$$

Wann gilt Gleichheit?

$$H(x|g(x)) = 0$$

x bedingt auf $g(x)$ einpunktverteilt
dies gilt offensichtlich genau dann wenn $g(x)$ injektiv ist.



Injektive Abbildung

-> Injektiv ist eine Abb. genau dann, wenn jedes Element der Zielmenge ~~von~~ höchstens einmal als Fkt-Wert angenommen wird.

A4.)

a.) Indirekter Beweis

Annahme: $p_i > p_j$ $n_i^* > n_j^*$

Betrachte den Kode g, der sich nur durch den Austausch der Kodewörter x_i und x_j vom optimalen g^* unterscheidet

Dann gilt:

$$\bar{n}(g^*) - \bar{n}(g) = \sum_{k=1}^{m} p_k n_k^* - \sum_{k=1}^{m} p_k \cdot n_k$$

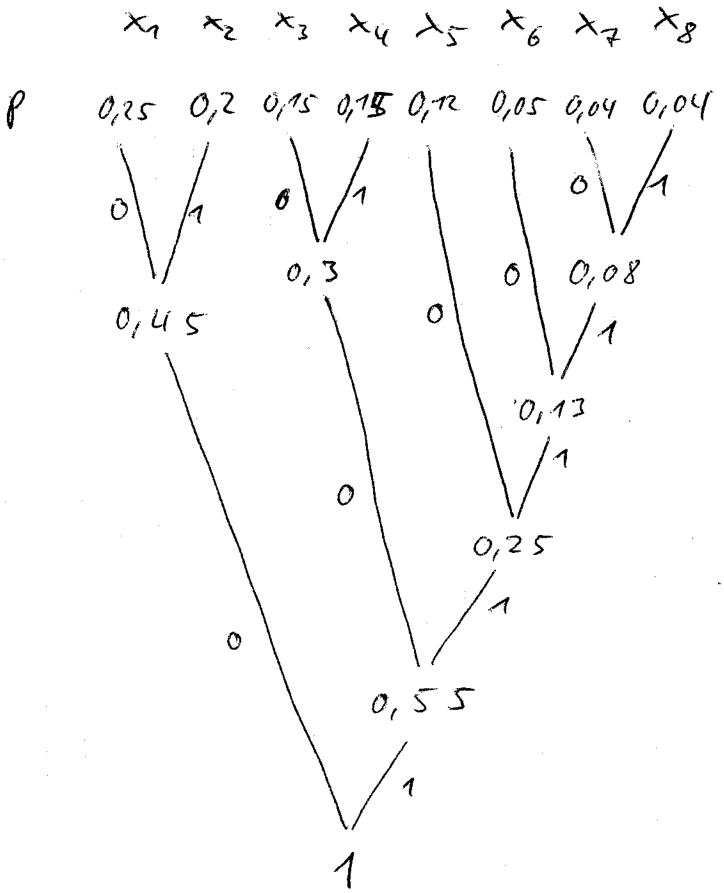
$$= p_i \cdot n_i^* + p_j \cdot n_j^* - p_i n_j^* - p_j n_i^*$$

$$= p_i (n_i^* - n_j^*) - p_j (n_i^* - n_j^*)$$

$$= (p_i - p_j)(n_i^* - n_j^*) > 0$$

$$\Rightarrow \bar{n}(g^*) > \bar{n}(g)$$

das ist ein Widerspruch zur Optimalität



Symbol	Codewort
x_1	00
x_2	01
x_3	100
x_4	101
x_5	110
x_6	1110
x_7	11110
x_8	11111

(i) die erwartete Kodewortlänge

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{8} p_i n_i^* = 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}12 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 4 + 0{,}04 \cdot 5 + 0{,}04 \cdot 5$$

$$\underline{\underline{= 2{,}76}}$$

TI 1 GÜ10 28. JAN. 2011

Entropie von X (zur Basis 2)

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{8} p_i \cdot \log_2(p_i) \approx 2{,}74$$

$H(X)$ stellt eine untere Schranke für $\bar{n}(g^*)$ dar.

Der optimale Kode ist im Allg. nicht eindeutig. Die erwartete Kodewortlänge hingegen ~~schon~~ ist bei einem optimalen Kode immer gleich.