T11 GÜ4

A1.)

a.) X Poissonverteilt $X \sim Poi(\lambda)$ $\lambda > 0$

$$P(X > k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$= \lambda$$

Variant

zunächst

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \underline{\underline{\lambda}}$$

b.)

X sei exponentialverteilt

$$X \sim Exp(\lambda) \qquad \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= [-e^{-\lambda x} \cdot x]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + [-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= [-e^{-\lambda x} x^2]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x\, e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \cdot 2x]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + \left[-\frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^\infty$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{\lambda^2}}}$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}$$

A2.)

a.) x und y seien 2 nicht näher spezifizierte Zufallsvariablen

zeige:

i.) $Var(x) = E[(x - E(x))^2] = E(x^2) - (E(x))^2$

$$E[(x - E(x))^2] = E[x^2 - 2x\,E(x) + (E(x))^2]$$
$$= E[x^2] - E[2x\,E(x)] + E[(E(x))^2]$$
$$= E[x^2] - 2\,E(x)\,E(x) + (E(x))^2$$
$$= E(x^2) - (E(x))^2$$

zeige:

ii.) $Cov(x,y) = E[(x - E(x)) \cdot (y - E(y))]$
$= E(x \cdot y) - E(x)\,E(y)$

$$E[(x - E(x))(y - E(y))] = E(xy - x\,E(y) - y\,E(x) + E(x)\,E(y)]$$

$$= E(xy) - E(x \cdot E(y)) - E(y\,E(x)) + E(E(x) \cdot E(y))$$
$$= E(xy) - E(y)E(x) \cancel{- E(x)E(y)} \cancel{+ E(x)E(y)}$$

b.)

$$\underline{C} = (\operatorname{Cov}(x_i, x_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(x_1,x_1) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1,x_n) \\ \operatorname{Cov}(x_2,x_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_n,x_1) & \cdots & \operatorname{Cov}(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E[(x_1 - E(x_1))^2] & \cancel{} & E[(x_1 - E(x_1))(x_2 - E(x_2))] \\ E[(x_2 - E(x_2))(x_1 - E(x_1))] & & E[(x_2 - E(x_2))^2] \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \ddots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

$\underline{C} = \underline{C}^T$ $\quad$ $\underline{C}$ symmetrisch

$\underline{c}$.) $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$

$$f_{\underline{x}}(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right)\right)$$

gesucht: Erwartungswertvektor μ

Kovarianzmatrix $\underline{C}$

$\det(C) > 0$

T 1.1 Güü

12. NOV. 2010

durch Vergleich mit

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\underline{C}|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^T \underline{C}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})\right)$$

Vorfaktoren

$$\cancel{\pi}\sqrt{3} = (2\pi)\cdot|\underline{C}|^{1/2}$$

$$\Rightarrow |\underline{C}| = 3/4$$

Exponenten

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}\right)^T \underline{C}^{-1}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}\right)\right] \stackrel{!}{=}$$

$$-\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right)$$

kein von x_1 unabhängiger Teil

$$\Rightarrow \underline{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_{11}\end{pmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{2}(x_1, x_2)\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}\sigma_{22} & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3}(x_1, x_2)\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{22}x_1 - \sigma_{12}x_2\\ -\sigma_{12}x_1 + \sigma_{22}x_2\end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

d) $\underline{x} = (x_1, x_2)^T$ normalverteilt

$\Rightarrow$ ein dimensionale Normalverteilung von x_1, x_2

ges.: $f_{x_1}(x_1)$, $f_{x_2}(x_2)$

1-dim. Normalverteilung ist vollständig beschrieben durch Mittelwert μ und Varianz σ^2

$\Rightarrow$ lässt sich aus $\underline{\mu}$ und $\underline{C}$ ablesen

$\Rightarrow$ Randverteilungsdichten

$$f_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)$$

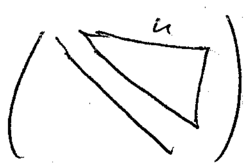
$\Rightarrow x_1, x_2 \sim N_1(0,1)$

Standardnormalverteilung

e) lässt sich aus der Kenntnis der Randverteilungsdichten die n-dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte berechnen.

- Anzahl der Parameter aller Randverteilungen ist $2n$
- n-dimensionale Verteilungsdichte habe

Menge der Covarianz-Einträge $n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$



n - Erwartungswerte

12. NOV. 2010

$\Rightarrow$

$$n + \frac{n(n+1)}{2} > 2n$$

$\Rightarrow$ nicht geltende Anfangsaussage