

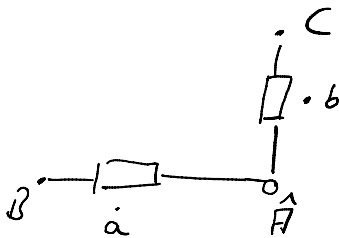
# Übung 7

Donnerstag, 2. Dezember 2010  
10:00

Aufg. 5.1

geg: 2D Bildvorlage  $x(i, j)$

ges.: 2D-Prädiktor



$$a) \quad \hat{x}(i, j) = a \cdot x(i-1, j) + b \cdot x(i, j-1)$$

b) Prädiktionsfehler:

$$d(i, j) = x(i, j) - \hat{x}(i, j)$$

$$= x(i, j) - a \cdot x(i-1, j) - b \cdot x(i, j-1)$$

Leistung des Prädiktionsfehlers

$$E\{d^2\} = E\{x^2(i, j) + a^2 x^2(i-1, j) + b^2 x^2(i, j-1) - 2a x(i, j) x(i-1, j) - 2b x(i, j) x(i, j-1) + 2a \cdot b x(i-1, j) x(i, j-1)\}$$

$$= \varphi_{xx}(0, 0) [1 + a^2 + b^2]$$

$$- 2a \varphi_{xx}(1, 0) - 2b \varphi_{xx}(0, 1) + 2ab \varphi_{xx}(1, 1)$$

c) Normalungsgleichungen

$$E\{d^2\} \rightarrow \min$$

partielle Ableitungen von  $E\{d^2\}$  nach  $a$  u.  $b$

$$\frac{\partial E\{d^2\}}{\partial a} = 2a \varphi_{xx}(0, 0) - 2 \varphi_{xx}(1, 0) + 2b \varphi_{xx}(1, 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\backslash E\{d^2\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = 2\delta \varphi_{xx}(0,0) - 2\varphi_{xx}(0,1) + 2a \varphi_{xx}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(1,0) = a \cdot \varphi_{xx}(0,0) + \delta \varphi_{xx}(1,1)$$

$$\varphi_{xx}(0,1) = \delta \varphi_{xx}(0,0) + a \varphi_{xx}(1,1)$$

oder

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(1,0) \\ \varphi_{xx}(0,1) \end{pmatrix}}_{\underline{R}_{xx}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(0,0) & \varphi_{xx}(1,1) \\ \varphi_{xx}(1,1) & \varphi_{xx}(0,0) \end{pmatrix}}_{\underline{R}_{xx}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ \delta \end{pmatrix}}_{\underline{h}_0}$$

d) geg: spez. Bildvorlage mit

$$\varphi_{xx}(0,0) = \sin(0) \cdot \sin(0) = 1$$

$$\varphi_{xx}(1,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(0) = \frac{2}{\pi}$$

$$\varphi_{xx}(0,1) = \sin(0) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\varphi_{xx}(1,1) = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 2 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} b = \frac{2}{\pi} & (1) \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} a + b = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 0,1796$$

$$b = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}}{1 - \frac{32}{\pi^4}} = 0,7976$$

e) Prädiktionsgewinn:

$$G_p = 10 \cdot \log \frac{E\{x^2\}}{E\{d^2\}}$$

$$= 10 \cdot \log \frac{\varphi_{xx}(0,0)}{\varphi_{xx}(0)[1 + a^2 + b^2] - 2a \varphi_{xx}(1,0) - 2b \varphi_{xx}(0,1) + 2ab \varphi_{xx}(1,1)}$$

$$= \underline{\underline{7,75 \text{ dB}}}$$