Übung 9

Donnerstag, 16. Dezember 2010
10:02

Aufg. 6.2

a) geg: $\underline{G}$: (7,4) - Matrix

ges: # Informationsstellen
Prüfstellen

Aus G: $n = 4$ Informationsstelle
m: Codewortlänge 7 Bit
$k = m - n = 3$ Prüfstelle

b) ges: system. Form von G

Ziel: $\underline{G}_{sys} = [\, \underline{E}_n \mid \underline{P} \,]$

$\underline{E}_n$: Einheitsmatrix

$\underline{P}$: Paritätsmatrix

prinzipiell erlaubte OPs:

- vertauschen von Zeilen
- —"— Spalten
- Addition zweier Zeilen

<u>hier</u> nur Zeilen-OPs

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Addition der Zeilen 2,3,4

1 0 0 0 1 1 0

Addition der Zeilen 1,3,4

0 1 0 0 1 1

Addition der Zeilen 2,4

0 0 1 0 1 1 1

Addition der Zeilen 1,2,3,4

0 0 0 1 1 0 1

Damit erhält man:

$$\underline{G} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

c) ges: Korrektureigenschaften

d_{min}

Code-Tabelle

x_i	$y_i = x_i \cdot \underline{G}$	$\Vert y_i \Vert$
0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 1	0 0 0 1 1 0 1	3
0 0 1 0	0 0 1 0 1 1 1	4
0 0 1 1	0 0 1 1 0 1 0	3
0 1 0 0	⋮	⋮
0 1 0 1		

0 1 1 0
0 1 1 1
1 0 0 0
1 0 0 1
1 0 1 0
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 0 1
1 1 1 0
1 1 1 1

$d_{min} = \min_{i \neq 0} \| y_i \| = 3$

$\Rightarrow$ 1-fache Fehler korrigierbar

2-fache Fehler erkennbar

d) ges: Syndrome von $\underline{e}_1 = (1100\ 100)$

$\underline{e}_2 = (1011\ 010)$

- Bestimmung der Prüfmatrix $\underline{H}^t$

$$\underline{H}^t = \begin{pmatrix} P \\ E_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: geg. Blockcode ist ein Hamming-Code, da $\underline{H}^t$ aus allen $2^{n-1} = 7$ von Null verschiedene Dualzahlen besteht

$\Rightarrow d_{min} = 3$

Bestimmung der Syndrome S_1 und S_2

Für gestörte Eingangsvektoren gilt immer:

$\underline{E} = \underline{Y} + \underline{E}$ ← Fehlervektor

da $\underline{Y} \cdot \underline{H}^t = 0$

$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{H}^t = (\underline{Y} + \underline{E}) \cdot \underline{H}^t = \underline{E} \cdot \underline{H}^t$

$\underline{S}_1 = \underline{E}_1 \cdot \underline{H}^t = (1\,1\,0\,0\,1\,0\,0) \cdot \underline{H}^t = (0\,0\,1)$

$\underline{S}_2 = \underline{E}_2 \cdot \underline{H}^t = (1\,1\,0)$

Syndrom-Tabelle für 1-fache Bitfehler

$\underline{E}$	$\underline{S} = \underline{E} \cdot \underline{H}^t$
1 0 0 0 0 0 0	1 1 0
0 1 0 0 0 0 0	0 1 1
0 0 1 0 0 0 0	1 1 1
0 0 0 1 0 0 0	1 0 1
0 0 0 0 1 0 0	1 0 0
0 0 0 0 0 1 0	0 1 0
0 0 0 0 0 0 1	0 0 1

Fehlerkorrektur:

$\underline{y}_1 = \underline{z}_1 + (000\ 0001) = (110\ 0101)$

$\Rightarrow \underline{x}_1 = (1100)$

$\underline{y}_2 = \underline{z}_2 + (100\ 0000) = (001\ 1010)$

$\Rightarrow \underline{x}_2 = (0011)$

e) Korrektur der Störung ist vergleichbar mit Erasure-Korrektur:

z.B. Empfang von

$0\,1\,000\,11$

↑ immer 0

$\ast\,1\,000\,11$

Korrektur: 1. Ersetzen durch 1

$\underline{y}_1^1 = 110\,0011$

$S_1 = 110 \Rightarrow E = 1\,000000$

2. Ersetzen durch 0

$\underline{y}_0^1 = 01000\,11$

$S_0 = 000 \Leftarrow$ kein Fehler

$\Rightarrow \underline{y} = 01\,000\,11$

Fehlerkorrektur mit Zusatzinformation:

$2e' + l + 1 \leq d_{min}$

Korrektur von e' Fehlern und l Erasure-Stellen

hier: $l = 1$

$d_{min} = 3$

$\Rightarrow 2e' \leq 1$

$\Rightarrow e' = 0$

Es sind also keine zusätzlichen Fehler korrigierbar

Aufg. 6.5

a) Bestimmung von g_1

Das Generatorpolynom muss ein Teiler sein vom Polynom $(z^n + 1)$

Polynomdivision

$$(z^7 + 1) : (z^4 + z^3 + z^2 + g_1 z + 1) = z^3 + z^2 + (g_1 + 1)$$

$$+ (z^7 + z^6 + z^5 + g_1 \cdot z^4 + z^3)$$

$$z^6 + z^5 + g_1 \cdot z^4 + z^3 + 1$$

$$+ (z^6 + z^5 + z^4 + g_1 z^3 + z^2)$$

$$(g_1 + 1) z^4 + (g_1 + 1) z^3 + z^2$$

$$+ (g_1 + 1) z^4 + (g_1 + 1) z^3 + (g_1 + 1) z^2 + g_1 (g_1 + 1) z + g_1 + 1$$

$$g_1 z^2 + g_1 (g_1 + 1) z + g_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow g_1 = 0$