

Übung 2

Donnerstag, 28. Oktober 2010

09:51

Aufg. 2.4

geg: $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = \frac{1}{5}$

$$P(D|C) = 1$$

$$P(E|D) = 1$$

$$P(B|A) = P(B|B) = 0$$

$$P(A|A) = P(C|A) = \infty$$

a) ges: $P(X_j | X_i)$

Es gilt allgemein:

$$\sum_j P(X_j | X_i) = 1 \quad \forall i \quad (= \text{Spaltensumme} = 1)$$

Hier gilt speziell:

da Gleiches trifft

$$P(X_i) = \sum_j P(X_j | X_i) \cdot P(X_i) = P(X_i) = \frac{1}{5} \quad \forall i, j$$

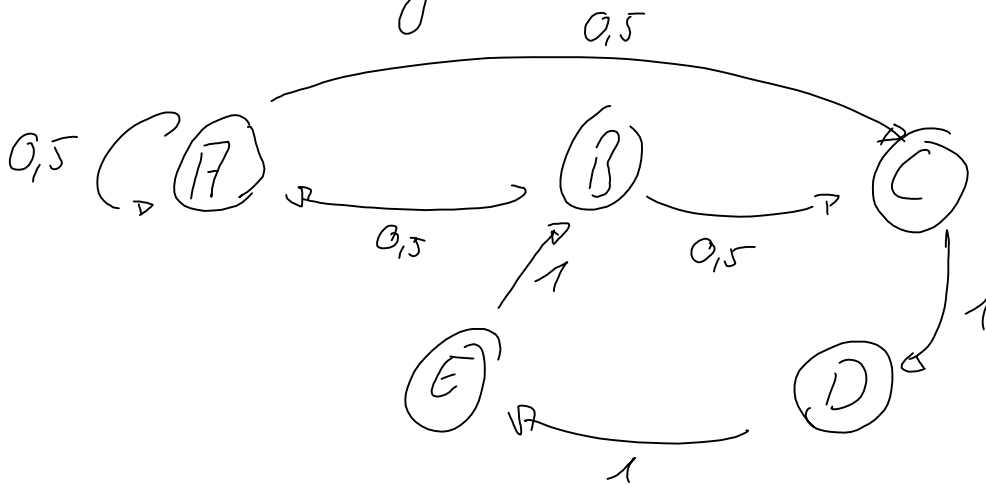
$$\Rightarrow \sum_j P(X_j | X_i) = 1 \quad \forall i \quad (= \text{Zeilensumme} = 1)$$

$X_j / X_i =$	A	B	C	D	E
A	$\boxed{1/2}$	$1/2$	0	0	0
B	0	0	0	0	1
C	$\boxed{1/2}$	$1/2$	0	0	0
D	0	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0

- 1) Gegeben
- 2) Spaltensumme
- 3) Zeilensumme
- 4) Spaltensumme

- 5) $\boxed{\text{Gey + Spaltensumme}}$
- 6) $\boxed{\text{Zeilensumme}}$

b) Zustandsdiagramm



c) Ges: Entscheidungsgewalt $H(x)$
bed. Entropie $H(x(6) | x(1-5))$

$$H(x) = - \sum_i P(x_i) \log[P(x_i)]$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \log\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= \log(5) = 2,32 \frac{\text{bits}}{\text{Zeichen}}$$

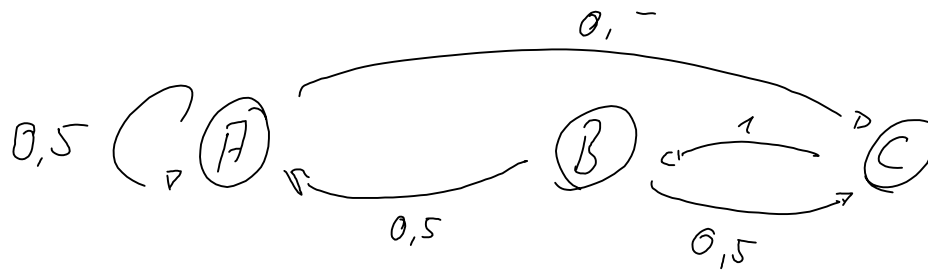
$$H(x(6) | x(1-5)) = - \sum_i \sum_j P(x_i, x_j) \cdot \log[P(x_j | x_i)]$$

$$= - \sum_i \sum_j P(x_i) \cdot P(x_j | x_i) \log[P(x_j | x_i)]$$

$$= -\left(4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \log(1)\right)$$

$$= 0,4 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

d) Ges: Zustandsdiagramm für
 $P(B|C) = 1$



e) Ges: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$
 $H(x)$, $H(x(4) | x(4-1))$

Es gilt

x_i / x_j		\rightarrow		
		A	B	C
$[P(x_j x_i)]$	A	$1/2$	$1/2$	0
	B	0	0	1
	C	$1/2$	$1/2$	0

$$\Rightarrow P(x_j) = \sum_i P(x_j | x_i) \cdot P(x_i)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(B) \Rightarrow P(A) = P(B)$$

$$P(B) = 1 \cdot P(C)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

$$\Rightarrow H(x) = \log(3) = 1,58 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

↑
da Gleichverteilung

$$H(x(L) | x(L-1)) = - \left(4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \log(1) \right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

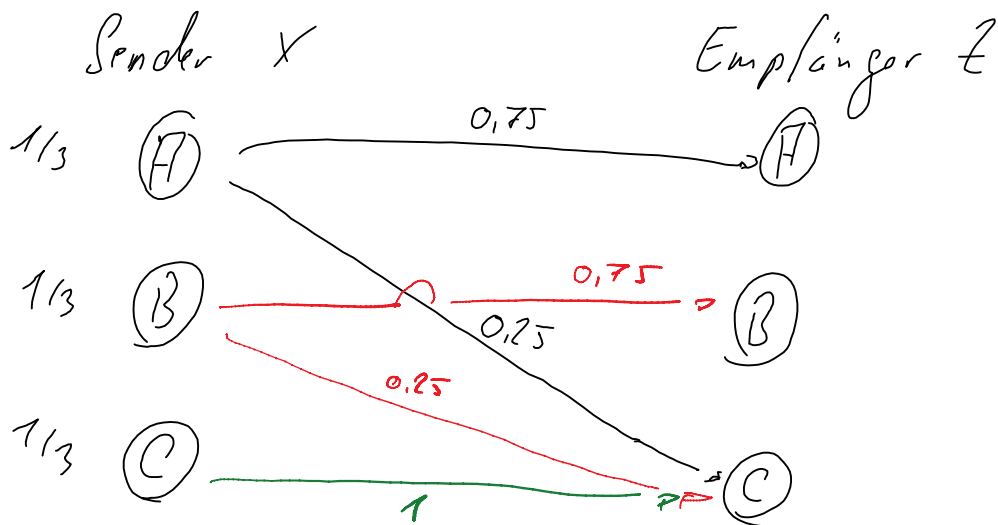
f) Ges: Transitionfunktion

Ges: $P(Z=C | X=A) = 0,25$

$$P(Z=C | X=B) = 0,25$$

"Rest" wird korrekt empfangen

Kanal



$$\Rightarrow P(Z=A) = P(X=A) \cdot P(Z=A | X=A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(Z=B) = P(X=B) \cdot P(Z=B | X=B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(Z=C) = 1 - P(Z=A) - P(Z=B) = 1/2$$

$$\Rightarrow H(Z) = - \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{3}{2} \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

Z_i / x_i	A	B	C
A	3/4	0	0
B	0	3/4	0
C	1/4	1/4	1

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(Z|X) &= - \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \log\left(\frac{3}{4}\right) \right. \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \log\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \log(1) \right) = 0,54 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(Z, X) &= H(Z) - H(Z|X) \\ &= 1,5 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} - 0,54 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \\ &= 0,96 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \end{aligned}$$

Aufg. 2.7

a) Geg: $B = 5 \text{ MHz}$ $\frac{S}{N} = 30 \text{ dB} = 10^{\frac{30}{10}}$

Ges: Kanalkapazität C

$$C = B \cdot \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

$$= 5 \text{ MHz} \cdot \lg(11 \cdot 10^3)$$

$$= 49,84 \text{ Mbit/s}$$

5) Gesucht: Anzahl N_1 paral. Quellen

Entropie der Bildquelle:

$$H(x) = -10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \lg\left(\frac{1}{10}\right) = \lg(10) = 3,32 \frac{\text{bit}}{\text{Bildelement}}$$

Übertragungsrate der Bildelemente:

$$\tilde{R} = 720 \frac{\text{Bildelemente}}{\text{Zeile}} \cdot 576 \frac{\text{Zeilen}}{\text{Bild}} \cdot 25 \frac{\text{Bilder}}{\text{s}}$$

$$= 10368000 \frac{\text{Bildelemente}}{\text{s}}$$

Informationsfluss der Quelle

$$R = \frac{H(x)}{\Delta t} = \tilde{R} \cdot H(x) = 10368000 \frac{\text{Bildelemente}}{\text{s}} \cdot 3,32 \frac{\text{bit}}{\text{Bildelemente}} = 34,42 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

Kapazitätssatz

$$N_1 \cdot R \leq C$$

$$\Rightarrow N_1 \leq \frac{C}{R} = \frac{49,84 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}}{34,42 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}} = 1,44$$

$$\Rightarrow N_1 = 1$$