

# Lösung 1

Donnerstag, 21. Oktober 2010  
09:57

## Aufg. 2.1

Gegeben: Quelle mit 4 mögl. Sg-Symbolen

$S_i$   $P(S_i)$

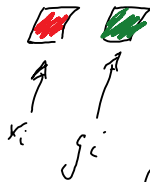
R 0,3

G 0,15

B 0,15

S 0,4

Paare von Bildpunkten



a) Gesucht: Verbundwahrscheinlichkeiten  $p(x, y)$

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $x = x_i$   
und gleichzeitig  $y = y_j$

z.B.  $P(x = \text{"rot"}, y = \text{"grün"})$

hier:  $x$  und  $y$  stat. unabhängig

$\Rightarrow$  per Definition:  $P(x, y) = P(x) \cdot P(y)$

$\Rightarrow P(x = x_i, y = y_j) = P(x = x_i) \cdot P(y = y_j)$

d.h.  $(P(x = \text{"rot"}, y = \text{"grün"}) = P(x = \text{"rot"}) \cdot P(y = \text{"grün"})$

$\Rightarrow$

$x_i \setminus y_j$	rot	grün	blau	schwarz
rot	0,09	0,045	0,045	0,12
grün		0,0225	0,0225	0,06
blau			0,0225	0,06
schwarz				0,16

b) bed. Wahrscheinlichkeit

$$P(y|x) = P(y = y_i | x = x_i)$$

Wkt, dass  $y = y_i$  ist, falls  $x = x_i$  ist

Es gilt immer:

$$\sum_i P(y = y_i | x = x_i) = 1$$

$\{P(y_i | x_i)\} =$

$y_i \setminus x_i$	R	G	B	S
R	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$5/8$
G	$1/3$	0	0	$1/8$
B	$1/3$	$1/3$	0	0
S	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/2$

c) Gesucht:  $P(x = x_i, y = y_i)$

$$P(x, y) = P(y|x) \cdot P(x)$$

$P(x, y) =$

$y_i \setminus x_i$	R	G	B	S
---------------------	---	---	---	---

$P(x, y) =$

$y_i / x_i$	K	G	B	S
K	0,05	0,05	0,05	0,15
G	0,1	0	0	0,05
B	0,1	0,05	0	0
S	0,05	0,05	0,1	0,2

nicht sym., da  
nicht stat. unabh.

d) Gesucht  $P(x = x_i | y = y_j)$

$$P(x, y) = P(y | x) \cdot P(x)$$

$$\Rightarrow P(y | x) = \frac{P(x, y)}{P(x)}$$

Satz von Bayes

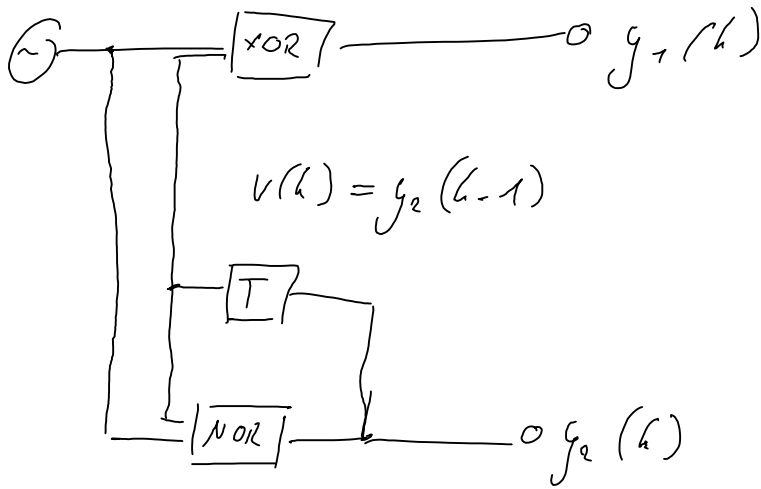
$$P(x | y) = \frac{P(x, y)}{P(y)} = \frac{P(y | x) \cdot P(x)}{P(y)}$$

$[P(x | y)] =$

$x_i / y_i \rightarrow$	K	G	B	S
K	1/6	2/3	2/3	1/8
G	1/6	0	1/3	1/8
B	1/6	0	0	1/4
S	1/2	1/3	0	1/2
$\Sigma$	1	1	1	1

# Aufg. 2.2

a)  $x(k)$



$$y_1(k) = x(k) \oplus y_2(k-1) = x(k) \oplus v(k)$$

$$y_2(k) = \overline{x(k) + y_2(k-1)}$$

mögliche Ausgangssymbole

$x(k)$	$v(k)$	$y_1(k)$	$y_2(k)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

$y = (1, 1)$  kommt nicht vor!

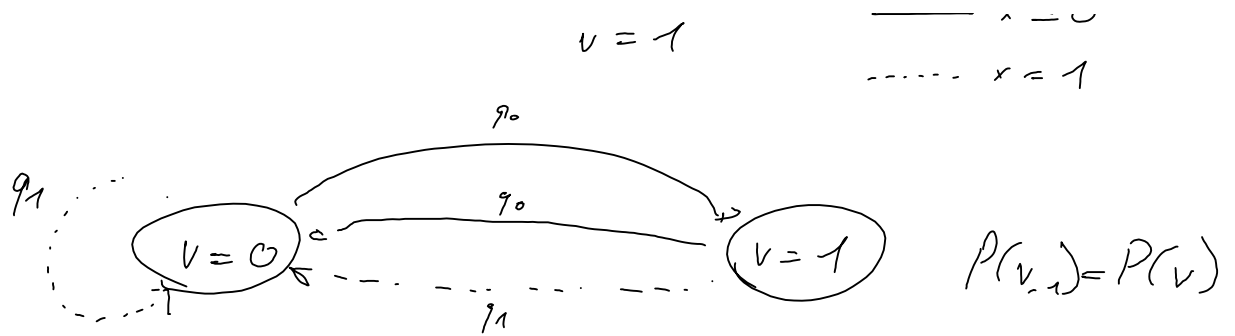
b) 1 Speicherglied  $\Rightarrow$  2 Zustände

$$v = 0$$

$$v = 1$$

$$\text{---} x = 0$$

$$\text{---} x = 1$$



$$c) \quad P(v=0) = P(v=0 \mid v_{-1}=0) \cdot P(v_{-1}=0) + P(v=0 \mid v_{-1}=1) \cdot P(v_{-1}=1)$$

$$\Rightarrow P(v=0) = q_1 \cdot P(v=0) + \underbrace{(q_0 + q_1)}_{=1} \cdot P(v=1)$$

2. Gleichung:

$$\Rightarrow P(v=0) + P(v=1) = 1$$

$$\Rightarrow P(v=1) = 1 - P(v=0)$$

$$\Rightarrow P(v=0) = q_1 \cdot P(v=0) + 1 - P(v=0)$$

$$\Rightarrow P(v=0) = \frac{1}{1 + q_0}$$

$$\Rightarrow P(v=1) = \frac{q_0}{1 + q_0}$$

$$P(i=0) = P(g_1=0, g_2=0) = q_1 \cdot P(v=1) = \frac{q_1 \cdot q_0}{1 + q_0}$$

$$P(i=1) = q_0 \cdot P(v=0) = \frac{q_0}{1 + q_0}$$

$$P(i=3) = 0$$

$$P(i=2) = 1 - P(i=0) - P(i=1) - P(i=3)$$

$$= \frac{1 - q_0 \cdot q_1}{1 + q_0}$$