Übung 10

Dienstag, 7. Dezember 2010
08:16

Aufg. 1

a) $y(k+2) - 0{,}25\, y(k+1) - 0{,}125\, y(k) = 2u(k)$

$y(z) \cdot z^{+2} - 0{,}25\, y(z) \cdot z^{+1} - 0{,}125 \cdot y(z) = 2 \cdot u(z)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{2}{z^{+2} - 0{,}25 z^{+1} - 0{,}125}$$

b) $z^2 - 0{,}25 z - 0{,}125 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow z = \frac{1}{2} \quad \vee \quad z = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ stabil

c1)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ +0{,}125 & +0{,}25 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}125 \\ 1 & 0{,}25 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Aufg. 2</u>

a)

$$\dot{x}_1 = u \qquad y = 3x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + u$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u$$

c)

$$Q_s = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(Q_S) = 3 \Rightarrow$ steuerbar

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(Q_B) = 2 \Rightarrow$ nicht beobachtbar

d) bei x_1 Integrator ohne Rückführung

$\Rightarrow$ nicht asymptotisch stabil!

e) $y = 3x_2 + x_3$

$\dot{x}_1 = u$

$\dot{x}_2 = -x_2 + u$

$\dot{x}_3 = -2x_3 + u$

$y = 3x_2 + x_3$

$x_3 \cdot z = -2x_3 + u$

$\Leftrightarrow x_3 = \dfrac{u}{z+2}$

$x_2 \cdot z = -x_2 + u$

$\Leftrightarrow x_2 = \dfrac{u}{z+1}$

$$\Rightarrow g = \frac{3u}{z+1} + \frac{u}{z+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{u} = \frac{3(z+2) + (z+1)}{z^2 + 3z + 2} = \frac{4z + 7}{z^2 + 3z + 2}$$

f) $z^2 + 3z + 2 \stackrel{!}{=} 0$

$z = -1 \quad \vee \; z = -2$

$\Rightarrow$ nicht BIBO - Stabil

g) - x_1 zu y addieren

- Verbindung von x_1 und u entfernen

Aufg. 3

a) $Q_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{rang}(Q_s) = 2 \Rightarrow$ steuerbar

b) $u(k) = K \cdot x(k) + w(k)$

$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k)$

$= A \cdot x(k) + B\,[K \cdot x(k) + w(k)]$

$= (A + BK)\,x(k) + B \cdot w(k)$

$z_{1,2} = 0{,}5 \pm j\,0{,}5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = (0)$$

Eigenwerte

$$\det(\lambda I - A - B \cdot K)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \overbrace{\begin{pmatrix} k_0 & k_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=B \cdot K} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 - k_0 & 1/6 - k_1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (1 + k_0)\lambda + 1/6 - k_1$$

$$\lambda_{1,2} \stackrel{!}{=} 0{,}5 \pm j0{,}5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + k_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + k_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} + k_1} \stackrel{!}{=} 0{,}5 \pm j\,0{,}5$$

$$\Rightarrow k_0 = 0 \qquad k_1 = -\frac{1}{3}$$

$\hookrightarrow K = (0 \quad -1/3)$

c) S. 117: Dead-Beat-Verhalten

$\hookrightarrow K = (-1 \quad 1/6)$

Aufg. 4

a) $x_2(k) = u(k) \cdot z^{-1}$

$x_1(k) = \left(x_2(k) + x_3(k)\right) \cdot z^{-1}$

$x_3(k) = x_1(k) \cdot z^{-1}$

$\Leftrightarrow \quad x_1(k+1) = x_2(k) + x_3(k)$

$x_2(k+1) = u(k)$

$x_3(k+1) = x_1(k)$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Minimal äquival. Systeme:

Skript S. 105 – 107