## 2.4.4 Bedingte Verteilung

a) $(X,Y)$ diskr. Zufallsvektor mit Träger $T_X \times T_Y$, Zähldichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = P(X=x, Y=y), \; (x,y) \in T_X \times T_Y$$

Bed. Zähldichte von $Y$ unter $Y=y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{falls } f_Y(y) \neq 0 \\ f_X(x), & \text{falls } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

$f_{X,Y}(x,y)$ ist Zähldichte bei festem $y$, d.ar. die Bed. Vert. von $X$ unter $Y=y$

$$P(X \in A \mid Y=y) = \sum_{x \in A} f_{X|Y}(x|y), \; A \subseteq T_X, \; y \in T_Y$$

Mit Satz von tot. W'keit:

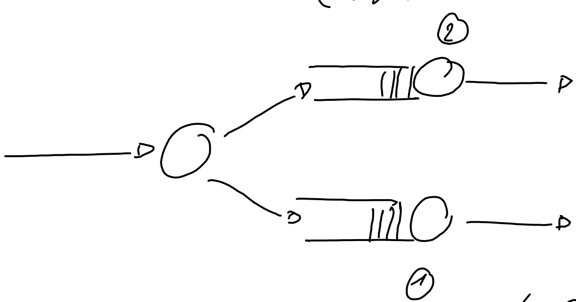
$$f_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in T_Y} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y), \; x \in T_X$$

Bsp. 2.4.11

Z'Vektor $(X,N)$ mit Verteilung

$$P(N=n) = e^{-3}\frac{3^n}{n!}, \; n=0,1,2,\ldots \quad (\sim Poi(3))$$

$$P(X=k \mid N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k=0,1,\ldots,n \quad (\sim Bin(n,p))$$




□ □ □ □ … □ $\quad N$ Stück (zufällig)
1 0 1 1 $\quad$ 0

Wie viele auf Server 1?
Genau: W'keit, dass $k$ Pakete auf Server 1 gehen?

$$P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=k \mid N=n) \cdot P(N=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{\lambda(1-p)}$$

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \quad , k = 0,1,\dots \sim Poi(\lambda p)$$

E-Wert bezgl. bed. Vert.:

$$E(g(X) \mid Y=y) = \sum_{x \in T_X} g(x) f_{X|Y}(x|y) \quad , y \in T_Y$$

bed. E-Wert von $g(X)$ unter $Y=y$

$$E(g(X)) = \sum_{y \in T_Y} E(g(X) \mid Y=y) \cdot f_Y(y)$$

b) $(X,Y)$ abs.-stetig mit Dichte $f_{(X,Y)}(x,y)$ , $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y) \cdot f_Y(y)}{f_Y(y)} & , \text{falls } f_Y(y) \neq 0 \\ f_X(x) & , \text{sonst} \end{cases}$$

$f_{X|Y}(x,y)$ ist eine Dichte bei festem $y$, bzw. die bed. Vert. von $X$ unter $Y=y$

$$P(X \in A \mid Y=y) = \int_A f_{X|Y}(x,y)\, dx$$

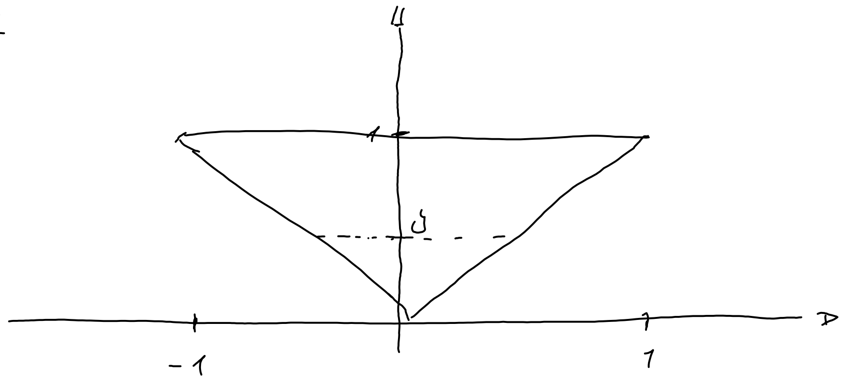
Ferner:

$$f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$E(g(X) \mid Y=y) = \int g(x) \cdot f_{X|Y}(x,y)\, dx \, , \quad y \in \mathbb{R}$$

$$E(g(X)) = \int E(g(X) \mid Y=y) \cdot f_Y(y)\, dy$$

**Bsp.**




$Y \sim R(0,1)$, $f_Y(y) = 1\!\!1_{[0,1]}(y)$

$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{2y} 1\!\!1_{[-y,y]}(x) \sim R(-y,y)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)$$
$$= \frac{1}{2y} 1\!\!1_{[-y,y]}(x)\, 1\!\!1_{[0,1]}(y)$$

$\Rightarrow$ keine Gleichverteilung!

## 2.4.5 Transformation von Z'Vektoren

$$(a,b,c) \longmapsto (a\cdot b\cdot c,\ 2\cdot a\cdot b + 2\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot c,\ 4a+4b+4c)$$

$\underline{X} = (X_1,\dots,X_n)$ mit Dichte $f_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)$

$M = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\underline{X}}(\underline{x}) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$T: M \to \mathbb{R}^n$ injektive Abb. mit

$$\left| \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le n} \right| > 0$$

**Theorem 2.4.12**

$\underline{Y} = T(\underline{X})$ besitzt eine Dichte

$$f_{\underline{Y}}(y_1,\dots,y_n) = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{T^{-1}(y_1,\dots,y_n)}\right|} f_{\underline{X}}(T^{-1}(x_1,\dots,x_n))$$

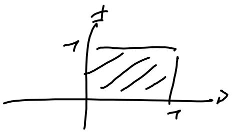
$$= \left|\left(\frac{\partial T_i^{-1}}{\partial y_j}\right)_{i,j}\right| f_{\underline{X}}(T^{-1}(x_1,\dots,x_n)),\ (y_1,\dots,y_n) \in T(M)$$

**Bsp. 2.6.13** Box-Müller-Verfahren (aus Simulation) zur Erzeugung von Normalverteilten Zufallszahlen

Seien $X_1, X_2$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. Dann:

$$Y_1 = \sqrt{-2 \ln X_1}\,\cos(2\pi X_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\ln X_1}\,\sin(2\pi X_2)$$

s.u. je $N(0,1)$-verteilt.




Denn: $f_{\underline{X}}(x_1,x_2) = 1\!\!1_{(0,1)^2}(x_1,x_2)$

Transf.: $T(x_1,x_2) = \left(\sqrt{-2\ln(x_1)}\cos(2\pi x_2), \sqrt{-2\ln(x_1)}\sin(2\pi x_2)\right)$

$$J = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(2\pi x_2)}{x_1\sqrt{-2\ln x_1}} & -2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\,\sin(2\pi x_2) \\ -\frac{\sin(2\pi x_2)}{x_1\sqrt{-2\ln x_1}} & 2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\,\cos(2\pi x_2) \end{pmatrix}$$

$$|\det J| = \left|-\frac{2\pi}{x_1}\cos^2(2\pi x_2) - \frac{2\pi}{x_1}\cdot\sin^2(2\pi x_2)\right| = \frac{2\pi}{x_1}, \quad x_1 > 0$$

Berechne $T^{-1}$:

$$\left.\begin{aligned} -\ln x_1 \cdot \cos^2(2\pi x_2) &= \frac{y_1^2}{2} \\ -\ln x_1 \cdot \sin^2(2\pi x_2) &= \frac{y_2^2}{2} \end{aligned}\right\} (+)$$

also: $x_1 = e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}}$

Insgesamt:

$$f_Y(y_1,y_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{2}}, \quad y_1,y_2 \in \mathbb{R}$$

**Theorem 2.4.14** Summen von Zufallsvars

$\underline{X} = (X_1,X_2)'$ 2-Vektor mit Dichte $f_{\underline{X}}(x_1,x_2)$. Dann besitzt $Y = X_1 + X_2$ die Dichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(t, y-t)\,dt$$

Denn:

$$T(x_1,x_2) = (x_1, x_1+x_2)$$

$$\left|\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right| = 1$$

$$f_{T(\underline{X})}(y_1, y_2) = f_{\underline{X}}(y_1, y_2 - y_1)$$

$$f_Y(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(y_1, y_2 - y_1)\, dy_1$$

Insbesondere, wenn $X_1, X_2$ s.u. mit Dichten $f_{X_2}(x_2)$, $f_{X_1}(x_1)$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(y-t)\, dt$$

$f_Y(y)$ heißt Faltung der Dichten $f_{X_1}$ und $f_{X_2}$

Anwendung:

PuS 2.6.15

a) $X_1, X_2$ s.u., $X_1 \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $X_1 \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, $\alpha, \beta, \lambda > 0$

Dann: $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$

b) $X_1, X_2$ s.u., $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Dann: $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$