Übung 8

Freitag, 14. Januar 2011
15:01

Aufgabe 1

a) $\underline{X} \sim SCN(\underline{\mu}, Q)$

$\underline{Y} = A \cdot \underline{x}$

$$\tilde{\underline{X}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{X}) \\ Im(\underline{X}) \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} Re(A) & -Im(A) \\ Im(A) & Re(A) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} Re(\underline{Y}) \\ Im(\underline{Y}) \end{pmatrix} = Re \begin{pmatrix} Re(A\underline{x}) \\ Im(A\underline{x}) \end{pmatrix}$$

$$Re(\underline{Y}) = Re(A\underline{X}) = Re(A) \cdot Re(\underline{X}) - Im(A)\, Im(\underline{X})$$
$$Im(\underline{Y}) = Im(A\underline{X}) = Im(A)\, Re(\underline{x}) - Re(A) \cdot Im(\underline{x})$$

=> Real- und der Imaginärteil von $\underline{Y}$ beide normalverteilt sind

Bestimmung von $E[\underline{Y}]$ und $E[(\underline{Y}-E(\underline{Y}))(\underline{Y}-E(\underline{Y}))^*]$ mit Proposition 2.4.6 (hier für komplexe Größen)

$$E(\underline{Y}) = E(A\underline{X}) = A \cdot E(\underline{X}) = A \cdot \underline{\mu}$$

$$E[(\underline{Y}-E(\underline{Y}))(\underline{Y}-\underline{E}(\underline{Y}))^*]$$
$$= E[(A\underline{X} - A\underline{\mu})(A\underline{X} - A\underline{\mu})^*]$$
$$= E[A(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})^* A^*]$$
$$= A \cdot E[(\underline{x} - \underline{\mu})(\underline{x} - \underline{\mu})^*]\, A^*$$
$$= A\, Q A^*$$

$$\mathrm{Cov}(\vec{\varphi}) = \mathrm{Cov}(\vec{A}\vec{\underline{x}})$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\vec{A}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \vec{A} \cdot \mathrm{cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) \end{pmatrix} \cdot \vec{A}'$$

$$= \vec{A} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, Q & -\mathrm{Im}\, Q \\ \mathrm{Im}\, Q & \mathrm{Re}\, Q \end{pmatrix} \vec{A}'$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(AQA^*) & -\mathrm{Im}(AQA^*) \\ \mathrm{Im}(AQA^*) & \mathrm{Re}(AQA^*) \end{pmatrix}$$

Damit ist gezeigt, dass $Ax \sim SCN(A\mu, AQA^*)$ gilt (siehe Prop. 2.6.4)

b) $\underline{X} \sim SCN(\underline{\mu}_1, Q_1)$; $\underline{Y} \sim SCN(\underline{\mu}_2, Q_2)$

$\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$

$$\vec{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{X}) \\ \mathrm{Im}(\underline{X}) \end{pmatrix} \qquad \vec{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{Y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{Y}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{X}) + \mathrm{Re}(\underline{Y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{X}) + \mathrm{Im}(\underline{Y}) \end{pmatrix}$$

Theorem 2.4.14 (Summe von 2 unabh. ZV)
$\Rightarrow$ Dichte geg. durch Faltung der Dichten

Prop 2.4.15

Summe von Normalverteilten ZVs ist selbst auch Normalverteilt

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathrm{Re}(\underline{X}) + \mathrm{Re}(\underline{Y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{Y}) + \mathrm{Im}(\underline{X}) \end{matrix}\right\} \text{ beide normalverteilt}$$

$$\underline{\mu} = E(\underline{z}) = E(\underline{x} + \underline{y}) = E(\underline{x}) + E(\underline{y}) = \underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2$$

$$\begin{aligned} Q &= E\left[(\underline{z} - E(\underline{z}))(\underline{z} - E(\underline{z}))^*\right] \\ &= E\left[(\underline{z} - \underline{\mu})(\underline{z} - \underline{\mu})^*\right] \\ &= E\left[(\underline{x} - \underline{\mu}_1 + \underline{y} - \underline{\mu}_2)(\underline{x} - \underline{\mu}_1 + \underline{y} - \underline{\mu}_2)^*\right] \\ &= E\left[(\underline{x} - \underline{\mu}_1)(\underline{x} - \underline{\mu}_1)^*\right] + \overset{\text{s.u.}}{\cancel{E\left[(\underline{x} - \underline{\mu}_1)(\underline{y} - \underline{\mu}_2)^*\right]}} \\ &\quad + \overset{\text{s.u.}}{\cancel{E\left[(\underline{y} - \underline{\mu}_2)(\underline{x} - \underline{\mu}_1)^*\right]}} + E\left[(\underline{y} - \underline{\mu}_2)(\underline{y} - \underline{\mu}_2)^*\right] \\ &= Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\underline{z}}) = \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) + \mathrm{Re}(\underline{y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) + \mathrm{Im}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{s.u.}}{=} \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{x}) \\ \mathrm{Im}(\underline{x}) \end{pmatrix} + \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\underline{y}) \\ \mathrm{Im}(\underline{y}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_1) & -\mathrm{Im}(Q_1) \\ \mathrm{Im}(Q_1) & \mathrm{Re}(Q_1) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_2) & -\mathrm{Im}(Q_2) \\ \mathrm{Im}(Q_2) & \mathrm{Re}(Q_2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(Q_1 + Q_2) & -\mathrm{Im}(Q_1 + Q_2) \\ \mathrm{Im}(Q_1 + Q_2) & \mathrm{Re}(Q_1 + Q_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \sim SCN(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2, \; Q_1 + Q_2)$$

<u>Aufg. 2</u>

(siehe MaLo')