Vorlesung 2

Freitag, 29. Oktober 2010
13:27

c) Poissonverteilung mit Par. $\lambda > 0$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$X \sim Poi(\lambda)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

2.3.2 Absolut stetige Verteilung

Def. 2.3.5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrierbar

mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

ZV X heißt abs. stetig, wenn

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f heißt (Vert.-) Dichte (pdf)

Es gilt: $f_X(x) = F_X'(x)$ in Stetigkeitspunkten von f

Bsp. 2.3.6

a) X heißt normalverteilt (Gauß-verteilt), wenn

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

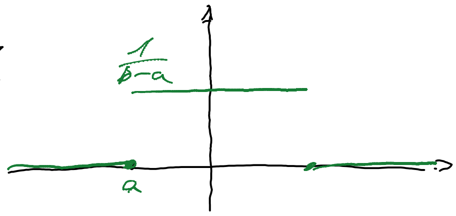
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

$$= \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ wobei}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

b) X heißt Gleichverteilt auf $[a,b]$, wenn

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$



$$= \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$\text{mit } \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$X \sim R(a,b)$

c) X heißt exponentialverteilt, $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \; x \in \mathbb{R}$$

d) X heißt Γ-Verteilt, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $\alpha, \lambda > 0$, wenn

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx, \text{ insb. } \Gamma(n) = (n-1)!, \; n \in \mathbb{N}$$

Spezialfälle: $\alpha = 1 \longrightarrow Exp(\lambda)$

$a = n \in \mathbb{N} \longrightarrow$ Erlang-Verteilung, $Erl(n, \lambda)$

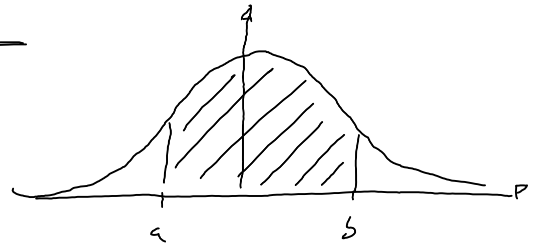
e) X heißt Rayleigh-Verteilt, wenn

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

f) X heißt Nakagami-Verteilt, wenn

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m x^{2m-1} e^{-m\frac{x^2}{\alpha}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Lösung: $B(\alpha,\beta)$, Rice, χ^2, t, F, Laplace



$X \sim f_X(x)$

$$\begin{aligned} P(a < X \le b) &= P(X \in (a,b]) \\ &= P(X \le b) - P(X < a) \\ &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Integrationsgrenzen dabei oder nicht, egal)

2.3.3 Erwartungswerte und Momente

$X \sim U(\{1,\dots,6\})$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \dots + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5$$

$Y = X^2$, $g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} E(Y) = E(X^2) &= E(g(X)) \\ &= 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + \dots + 6^2\cdot\frac{1}{6} = 15{,}1\overline{6} \end{aligned}$$

Def. 2.3.7 g Fkt

a) X diskr. ZV mit Träger $\{x_1, x_2, \dots\}$
und Zähldichte f, d.h. $f(x_i) = P(X = x_i)$

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f(x_i)$$

falls $\sum_i |g(x_i)| \cdot f(x_i) < \infty$

heißt E-Wert von $g(x)$

$$E(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f(x_i), & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, & \text{stetig} \end{cases}$$

Def. 2.3.8 X, Y ZV

a) $E(X^k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, heißt k-tes Moment

$E((X - E(X))^k)$, k-tes zentrales Moment

b) $V(x) = E((X - E(X))^2)$ Variance von X

c) $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ heißt Kovarianz von X und Y

$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$, Korrelation von X, Y

Prop. 2.3.9 (Eigenschaften)

a) $E(aX + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$, $a, b \in \mathbb{R}$ (Linearität)

b) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (Monotonie)

c) $P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$, $\forall c > 0$ (Markov-Ungl.)

$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{V(X)}{c^2}$, $\forall c > 0$ (Chebyshev-Ungl.)

d) $Cov(X, X) = V(X)$, $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$= E(X^2) - (E(X))^2$

e) $Var(aX + b) = a^2 V(X)$

f) $V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$

g) $Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + c, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j + d)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \, Cov(X_i, Y_j)$$

h) $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X) \cdot V(Y)}$

also $|Corr(X, Y)| \leq 1$