22.10.10

2.2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Mot. Bsp Menge von PT : Ω

Menge D: defekte I: intakte

A: von Firma A B: von Firma B

W'keit, dass zufäll. gez. PT defekt ist, wenn von Fa. A.

$$P(D|A) = \frac{|D \cap A|}{|A|} = \frac{|D \cap A| / |\Omega|}{|A| / |\Omega|} = \frac{P(D \cap A)}{P(A)}$$

Def. 2.2.1 A, B Ereignisse, $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ heißt bed. W'keit von A unter B

Theorem 2.2.2 (Ω, σ, P), $B_n \in \sigma$, Partition von Ω, d.h.

$\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$

a) Satz von der totalen W'keit

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n) \quad (0 \cdot \overset{\text{undef.}}{*} = 0)$$

b) Bayes Formel falls $P(A) > 0$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= P(A)}}$$

Bsp. I-Verkehr von AC nach MUC

W'keit, ~~dass~~ Paket über HH-Burg zu routen: $\frac{1}{10}$

W'keit, Paket fällt aus : $\frac{1}{2}$

andernfalls : $\frac{1}{4}$

22.10.10

$P(A|H) = \frac{1}{2}$

$P(A|H^c) = \frac{1}{4}$

$$P(A) = P(A|H)\cdot P(H) + P(A|H^c)\cdot P(H^c)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{10} = \frac{11}{40} \approx \frac{1}{4}$$

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)\cdot P(H)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{11}{40}} \approx \frac{1}{5}$$

Wichtiger Fall

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Def. 2.3 A, B Ereignisse

a) A und B heißen stoch. unabh. (s.u.), wenn $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

b) $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse heißen s.u. (gem.), wenn

$$P(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\dots P(A_{i_k})$$
$$\forall\, 1 \le i_1 \dots \le i_k \quad \forall\, k \le n$$

2.3 Zufallsvariable und Verteilung

$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{5000}) \mid x_i \in \{0,1\}\}$, $|\Omega| = 2^{5000}$

$\Omega' = \{0, \dots, 5000\}$, $|\Omega'| = 5001$

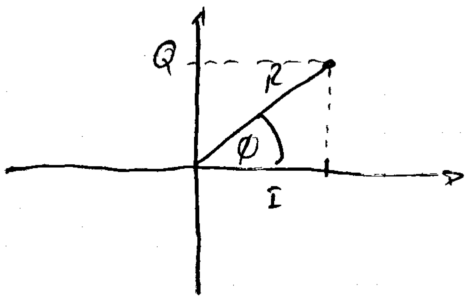
$$X(x_1, \dots, x_{5000}) = \sum_{i=1}^{5000} x_i$$

(R, ϕ) Amplitude, Phase eines kompl. Signals

Wie lauten Inphase I, Quadraturkomponente Q

$I = R\cdot\cos(\phi)$

$Q = R\cdot\sin(\phi)$



Def. 2.3.1 (Ω, σ, P) Eine Abb. $X : \Omega \to \mathbb{R}$
heißt Zufallsvariable (r.v.), wenn

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \quad (*)$$

Damit

$$P(X \leq x) = P(X^{-1}(-\infty, x]) = P(\{\omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

vernünftig def. ist, brauche ich $(*)$

Def. 2.3.2 Die Fkt

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

heißt Verteilungsfkt. von X.

$F(x) = P(X \leq x)$ hat folg. Eigenschaften

(i) F ist mon. steigend

(ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(iii) F ist rechtsseitig stetig

2.3.1 Diskrete Zufallsvariable

Def. 2.3.3 Eine ZV X heißt diskret, wenn eine höchstens abz. ∞ Menge $T = \{t_1, t_2, \ldots\} \in \mathbb{R}$ ex. mit

$$P(X^{-1}(T)) = P(\{\omega \mid X(\omega) \in T\}) = P(X \in T) = 1$$

T heißt Träger. Die Fkt.

$$f_X(t_i) : T \to [0, 1] : t_i \mapsto P(X = t_i)$$

$(f_X(t_i) = P(X = t_i))$ heißt Zähldichte

22.10.10

Bsp. 2.3.4

a) Diskrete Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$:

$P(X=i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$

b) Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in [0,1]$, $T = \{0,1\}$

$P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$ $\quad X \sim Bin(1,p)$

c) Binomialverteilung mit Parameter $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad k \in 0, 1, \dots, n$

$X \sim Bin(n,p)$

d) Geometrische Verteilung, $X \sim Geo(p)$, $0 < p \leq 1$

$P(X=k) = (1-p)^k p$, $k = 0, 1, \dots$

$T = \mathbb{N}_0$