Vorlesung 3

Freitag, 5. November 2010
13:26

S. 14 im Skript vorletzte Zeile:

$\Omega = \{(x_1, \dots, x_{5000}) \mid x_i \in \{0,1\}\}$

2.4 Zufallsvektoren und Transformation

$\underline{A}$: Vektor

$\underline{A}'$: Transponierte von A

Def. 2.4.1 Zufallsvektor

W'keitsraum (Ω, σ, P)

$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)' : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

heißt Zufallsvektor, $x_1, \dots x_n$ Zufallsvariablen

Ein Zufallsvektor aus n Zufallsvars auf denselben W'keitsraum zusammengesetzt.

Das Ziel ist die Beschreibung von gemeinsamen zufälligen Ausgängen

zufälliges Signal $R \cdot e^{i\phi}$

R: Amplitude

ϕ: Phase

$\underline{X} = (R, \phi)'$ ist ein 2-D Zufallsvektor

Von Interesse ist hier die Beschreibung der gem. Verteilung

2.4.1 Gemeinsame Verteilung

Def 2.4.2 Sei $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)'$ ein Zufallsvektor

Die Funktion

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots x_n) = P(\{\omega \mid X_1(\omega) \le x_1, \dots, x_n(\omega) \le x_n\})$$

$$= P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$$

heißt gem. Verteilungsfkt von $(X_1, \dots, x_n)'$

oder Verteilungsfkt von $\underline{X}$

Bezeichnung: $\underline{X} \sim F_{\underline{X}}$

gem. Verteilungsfkt beschreibt die Verteilung des

Zufallsvektors $\underline{X}$ eindeutig
d.h. die W'keiten $P(\underline{X} \in A)$ für alle messbaren Ereignisse $A \subset \mathbb{R}^n$

<u>Def. 2.4.3</u> Eine (uneigentlich) Riemann-integrierbare Funktion

$$f_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

heißt Dichte von $\underline{X}$, wenn

$$F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\underline{X}}(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n \quad \forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$\underline{X}$ heißt dann absolut-stetig mit Dichte $f_{\underline{X}}$
$\to \underline{X} \sim f_{\underline{X}}$

<u>Beispiel</u> 2.4.4 (n-dim Normalverteilung $N_n(\underline{\mu}, \underline{C})$)

Sei $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d.
(d.h. $\underline{x}' \underline{C}\, \underline{x} > 0 \quad \forall\, \underline{x} \neq 0$)
dann ist die Dichte der n-dim Normalverteilung

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \, |\underline{C}|^{1/2}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})' \underline{C}^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right\}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$|\underline{C}| = |\det(\underline{C})|$ (Absolutbetrag der Det. von C)

Spezialfall $n = 1$ $\quad \underline{C} = c = \sigma^2 > 0$
$\mu \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Sei $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ absolut-stetig mit Dichte $f_{\underline{X}}$
so können W'keiten von bel. (messbaren) Mengen B des $\mathbb{R}^n$ durch Integration berechnet werden

$$P(\underline{X} \in B) = \int \cdots \int_B f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

<u>Bsp.</u> $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

$$P(a_1 \le X_1 \le b_1,\ a_2 \le X_2 \le b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (Einheitskreis)

$$P(\underline{X} \in B) = P(X_1^2 + X_2^2 \leq 1)$$

$$= \iint_{t_1^2 + t_2^2 \leq 1} f_{\underline{X}}(x_1, x_2)\, dt_1\, dt_2$$

2.4.2 Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix

Def. 2.3.7 und 2.3.8 werden komponentenweise
Anwendung auf Zufallsvektoren übertragen

Def. 2.4.5 Für ein Zufallsvektor $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$

heißt

a) $E(\underline{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Erwartungswertvektor von $\underline{X}$

b) die sym. Matrix $Cov(\underline{X}) = \left(Cov(X_i, X_j)\right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

heißt Kovarianzmatrix von $\underline{X}$

(Matrix der paarweisen Kovarianzen von X_i und X_j)

Prop. 2.4.6. (Erwartungswert und Kovarianz unter lin. Trafos)

Sei $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Zufallsvektor mit

$E(\underline{X}) = \underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$

$Cov(\underline{X}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

Dann gilt:

a) $E(\underline{A}\underline{X} + \underline{b}) = \underline{A} \cdot E(\underline{X}) + \underline{b} \in \mathbb{R}^m$

b) $Cov(\underline{A}\underline{X} + \underline{b}) = \underline{A} \cdot Cov(\underline{X}) \cdot \underline{A}' \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Beweis

$\underline{Y} = \underline{A}\underline{X} + \underline{b}$

komponentenweise

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot X_k + b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

wegen der Linearität des E-Wertes folgt

$$E(Y_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, E(X_k) + b_i \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow E(\underline{Y}) = \underline{A}\, E(\underline{X}) + \underline{b}$.

b) mit Prop 2.3.9 g)

$$Cov(Y_i, Y_j) = Cov\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k + b_i, \sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l + b_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} \cdot Cov(X_k, X_l)$$
$$= (A \cdot Cov(\underline{X})\, A')_{i,j} \quad \forall\, 1 \le i,j \le n$$

$$Cov(\underline{A}x + \underline{b}) = \underline{A}\, Cov(\underline{X}) \cdot A^T$$

2.4.3 Stochastische Unabhängigkeit

Für die Modellierung von stoch. Effekten ist die stoch. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen ein wichtiger Fall.

Def. 2.4.7 Sei $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ ein Zufallsvektor

$X_1, \dots, X_n$ heißen s.u., wenn

$$F_{(X_1 \dots X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad \forall\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Prop 2.4.8 Ist $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ absolut-stetig, so gilt:

a) $f_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) \quad \forall\, (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ sind stoch. unabhängig

b) $X_1, \dots, X_n$ seien s.u.

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$ ist eine gem. Dichte von $\underline{X}$

Bsp. 2.4.9

Seien $X_1, \dots, X_n$ s.u., $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i = 1, \dots, n$

dann ist

$$f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma_i} \cdot \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

mit $\underline{C} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$

$\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})' C^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

ist eine gem. Dichte von $(X_1, \dots, X_n)'$

$\Rightarrow$ s.u. normalverteilte Zufallsvars mit $\underline{\mu}$ und $\underline{C}$ einen $N_n(\underline{\mu}, \underline{C})$-verteilten Zufallsvektor bilden

Allgemein gilt:

$X_1, \dots, X_n$ s.u. $\Rightarrow$ $\text{Cov}(\underline{X}) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ mit $\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$

Dies sieht man wie folgt:

sind X_i und X_j s.u. Zufallsvars, so gilt:

$$E(X_i \cdot X_j) = E(X_i) \cdot E(X_j)$$

mit Darstellung 2.3.9. d)

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i) \cdot E(X_j) = 0$$

Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgem. falsch. Sie gilt jedoch bei Normalverteilten Zufallsvektoren.

d.h.

$\underline{X} \sim N_n(\underline{\mu}, \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)) \Rightarrow X_1, \dots, X_n$ s.u. und $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

Analog zu Prop 2.6.8 gilt bei disketen ZVs:

<u>Prop 2.6.10</u> Seien $X_1, \dots, X_n$ diskrete ZVs mit Träger $T_1, \dots, T_n$, dann gilt:

$X_1, \dots, X_n$ sind (s.u.)

$$\Leftrightarrow P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) \quad \forall x_i \in T_i, i = 1, \dots, n$$