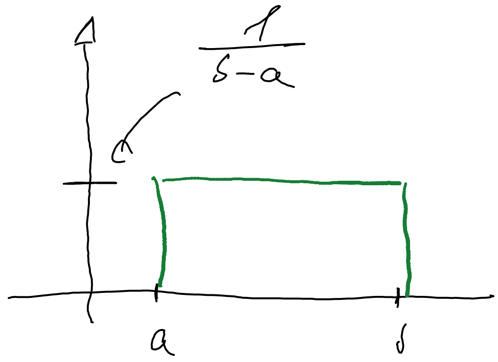
Übung 3 - MuLö

Freitag, 5. November 2010
15:06

Aufg. 1

a) X heißt Gleichverteilt, wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Unterscheide 3 Fälle: $x < a$, $a \leq x \leq b$, $x > b$

$x < a$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$$

$a \leq x \leq b$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{a} 0\, dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{b-a}(x-a)$$

$$= \frac{x-a}{b-a}$$

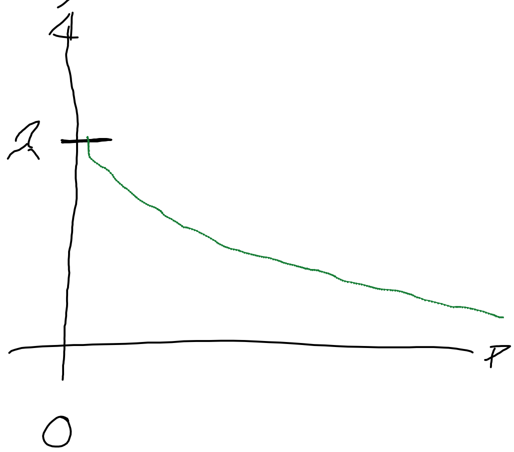
$x > b$:

$\underline{x > b}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{b-a}{b-a} = 1$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x > b \end{cases}$$

b) X heißt Exponentialverteilt, wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$



$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Unterscheide zwei Fälle: $x < 0$ und $x \geq 0$

$\underline{x < 0}$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

$\underline{x \geq 0}$:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,dt$$

$$= \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda t} \Big|_0^x$$

$$= \lambda \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left[e^{-\lambda x} - 1\right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

Aufg. 2

Leistung eines Signals

$X \sim Exp(\lambda)$ mit $\frac{1}{\lambda} = 10^{-11}$

Erwartungswert $E(X) = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow$ Mittlere (erwartete) Leistung ist $\frac{1}{\lambda}$

Leistung des Rauschens: $n = 10^{-13}$ (konst.)

Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR)

$$SNR = \frac{X}{n}$$

Gesucht: $P(SNR > 3) = P\left(\frac{X}{n} > 3\right) = P(X > 3 \cdot n)$

$$= 1 - P(X \leq 3 \cdot n) = 1 - F_X(3n)$$

$= 1 - (1 - e^{-10^{\dots} \cdot 3 \cdot 10^{-\dots}}) = 0{,}97$

Aufg. 3 (Klausuraufg.)

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^2 (1-x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

a) 2 Bedingungen

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

zu 1) $x^2 > 0$, $(1-x) > 0$

$\Rightarrow \alpha \geq 0$

zu 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \alpha x^2 (1-x)\,dx$

$= \alpha \int_0^1 x^2 - x^3 \,dx$

$= \alpha \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1$

$= \alpha \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] - 0$

$= \frac{1}{12} \cdot \alpha \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow \alpha = 12$ $\quad (\geq 0)$ 1. Bedingung

b) $0 \leq x \leq 1$

b) $0 \leq x \leq 1$

$$F_X(x) = 12 \int_0^x t^2(1-t)\,dt$$

$$= \left[4 \cdot t^3 - 3 \cdot t^4\right]_0^x = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^4$$

$x \geq 1$

$$F_X(x) = 0 + \left[4t^3 - 3t^4\right]_0^1 = 1$$

c) ges.: $P(X \leq 1/2) = F_X(1/2) = \frac{4}{8} - \frac{3}{16}$

$$= \frac{5}{16} \approx 0{,}3125$$

$E(X) = 3/5$

$P(X \leq 3/5) = 0{,}4752$