Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
maier@instmath.rwth-aachen.de

Telefon:	+49(0)241-8094925
Fax:	+49(0)241-8092323
Sekr.:	+49(0)241-8094921
	+49(0)241-8094922
Hausadr.:	Templergraben 55
	1. Etage, Raum 109
Postadr.:	D-52062 Aachen
	Germany

Probe–/Übungsklausur Höhere Mathematik III (Bachelor / Vordiplom)
WS 2010/2011
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

$\boxed{\text{A}}$

Tragen Sie die Ergebnisse in die zugehörigen Kästen nur auf dem **Deckblatt** ein bzw. Kreuzen Sie genau **eine** der möglichen Antworten nur auf dem **Deckblatt** an.

1. Aufgabe *(10 Punkte)*

i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x, y) := (x + y)^2 - 8\arctan(xy)\,.$$

ii) Bestimmen Sie für den kritischen Punkt mit positiver x-Komponente die Eigenwerte der Hessematrix.

iii) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

a) f besitzt ein lokales Maximum.
b) f besitzt kein globales Maximum.
c) f besitzt genau ein lokales Minimum.
d) f besitzt zwei Sattelpunkte.

2. Aufgabe *(7 Punkte)*

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\Gamma \operatorname{grad}(x^3 y + \sin(xy)) \cdot d\gamma$$

über die ebene Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, parametrisiert durch $\gamma : [0, 4\pi^2] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) := \left(\pi \cos\left(\sqrt{t}\right), \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{t}\right)\right).$$

3. Aufgabe *(5 Punkte)*

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

a) f_n konvergiert nicht punktweise.
b) f_n konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig.
c) f_n konvergiert punktweise und gleichmäßig.
d) f_n konvergiert gleichmäßig aber nicht punktweise.

4. Aufgabe *(8 Punkte)*

Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, x^2 + y^2 > 1\right\}.$$

5. Aufgabe *(5 Punkte)*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, offen & abgeschlossen oder nichts von beidem sind:

$$M_1 := \left\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$M_2 := \{\gamma(t) : t \in [0, 1]\}\,,\ \gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \text{ reguläre Kurve.}$$

$$M_3 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi(x) < y < \psi(x)\right\}, \phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig mit } \phi(x) < \psi(x)\,.$$

$$M_4 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||^2 \geq 2xy\right\}.$$

6. Aufgabe *(5 Punkte)*
Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(2x^2 - 4y^2 + z, -8xy + \frac{1}{4}yz^2 - 1, x + \frac{1}{4}y^2 z\right).$$

Das Kurvenintegral $\int_\Gamma f \cdot d\gamma$ ist wegunabhängig in $\mathbb{R}^3$. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

a) Es existiert ein h mit $h(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
b) Unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes und weil rot $f = 0$.
c) Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.
d) Mit Hilfe des Transformationssatzes im $\mathbb{R}^3$, da $|\det(Df(x,y,z))| = 0\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
e) Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^3$ sind generell wegunabhängig.
f) Mit Hilfe der Leibnizregel.

7. Aufgabe *(5 Punkte)*
Der Beweis des Stokesschen Integralsatzes (für den Fall, dass die Fläche ein Graph ist) aus der Vorlesung benutzt:

a) den 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale.
b) den 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale.
c) den Integralsatz von Gauß in der Ebene.
d) den Integralsatz von Gauß im Dreidimensionalen.
e) den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
f) den Mittelwersatz der Integralrechnung.

8. Aufgabe *(5 Punkte)*
Unter welchen Voraussetzungen ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

stetig differenzierbar?

a) Die Funktionen $f, \frac{\partial}{\partial y} f$ sind stetig auf $[a,b] \times [c,\infty)$,

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{ist konvergent für jedes } x \in [a,b] \text{ und}$$

$$\int_c^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy \quad \text{ist gleichmäßig konvergent auf } [a,b].$$

b) Die Funktionen $f, \frac{\partial}{\partial x} f$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$,

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{ist gleichmäßig konvergent auf } [a,b] \text{ und}$$

$$\int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \quad \text{ist konvergent für jedes } x \in [a,b].$$

c) Die Funktionen $f, \frac{\partial}{\partial x} f$ sind stetig auf $[a,b] \times [c,\infty)$,

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{ist konvergent für jedes } x \in [a,b] \text{ und}$$

$$\int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \quad \text{ist gleichmäßig konvergent auf } [a,b].$$

d) Die Funktionen $f, \frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f$ sind stetig auf $[a,b] \times [c,\infty)$,

$$\int_c^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{ist gleichmäßig konvergent auf } [a,b] \text{ und}$$

$$\int_c^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_c^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dy \quad \text{sind konvergent für alle } x \in [a,b].$$

e) Unter keiner der genannten Aussagen.