

# GGÜ 9

Donnerstag, 16. Dezember 2010

09:45

G.2) a) Gegeben:  $\underline{G} : (7,4)$ -Matrix

Gesucht: # Informationsstellen  
# Prüfstellen

Aus  $\underline{G}$ :  $n = 4$  Informationsstellen

$m$ : Codewortlänge 7bit

$k = m - n = 3$  Prüfstellen

b) Gesucht: Systematische Form von  $\underline{G}$

Ziel:  $\underline{G}_{\text{sys}} = [\underline{E} | \underline{P}]$

mit  $\underline{E}$  Einheitsmatrix

$\underline{P}$  Prüfmatrix

prinzipielle erlaubte Operationen:

- vertauschen zweier Zeilen
- vertauschen zweier Spalten
- Addition zweier Zeilen

hier nur Zeilenoperationen

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Addition der Zeilen 2, 3, 4:

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

Addition von 1,3,4

$$0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

Addition von 2,4

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1$$

Addition von 1,2,3,4

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

Damit erhält man:

$$G_{sys} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Besucht: Korrektoreigenschaften, damit

Code-Tabelle:

$x_i$

$$y_i = x_i \cdot G_{sys}$$

$\|y_i\|$

---

0000	0000	000	0
0001	0001	101	3
0010	0010	111	4
0011	0011	010	3
0100	0100		
0101	0101		
0110	0110		
0111	0111		
1000	1000		
1001	1001		
1010	1010		
1011	1011		
1100	1100		
1101	1101		
1110	1110		
1111	1111		

$$d_{\min} = \min_{i \neq 0} \|y_i\| = 3$$

$\Rightarrow$  1 Fehler korrigierbar  
oder bis zu 2-fache Fehler erkennen

d) Gesucht: Syndrome von  $\underline{z}_1 = (1100100)$   
 $\underline{z}_2 = (1011010)$

Bestimmung der Prüfmatrix  $\underline{H}^t$

$$\underline{H}^t = \begin{pmatrix} P \\ E_{m-n} \end{pmatrix} \text{ Prüfmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Gej: Block-Code ist ein Hamming-Code  
da  $\underline{H}^t$  aus allen  $z^{k+1} - 1 = \mathbb{F}$  von Null  
verschiedenen Dualzahlen besteht  
 $\Rightarrow d_{\min} = 3$

Bestimmung der Syndroms  $\underline{s}_1$  und  $\underline{s}_2$

Für gestörte Vektoren gilt:

$$\underline{z} = \underline{y} + \underline{e} \text{ - Fehlervektor}$$

$$\underline{s} = \underline{z} \cdot \underline{H}^t = (\underline{y} + \underline{e}) \cdot \underline{H}^t \\ = \underline{e} \cdot \underline{H}^t \text{ da } \underline{y} \cdot \underline{H}^t = 0$$

$$\underline{s}_1 = \underline{z}_1 \cdot \underline{H}^t = (1100100) \begin{pmatrix} 110 \\ 011 \\ 110 \\ 101 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix} = (001)$$

$$\underline{s}_2 = \underline{z}_2 \cdot \underline{H}^t = (110)$$

Syndromtabelle 1-felder Bitfehler

$\underline{e}$	$\underline{s} = \underline{e} \cdot \underline{H}^t$
1000000	110
0100000	011
0010000	111
0001000	101
0000100	100
0000010	010
0000001	001

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 011 \\
 111 \\
 101 \\
 100 \\
 010 \\
 001
 \end{array}
 \end{array}$$

Fehlerkorrektur:

$$\underline{y}_1 = \underline{z}_1 + (0000001) = (1100101)$$

$$\Rightarrow \underline{x}_1 = (1100)$$

$$\underline{y}_2 = \underline{z}_2 + (1000000) = (0011010)$$

$$\Rightarrow \underline{x}_2 = (0011)$$

e) Korrektur der Störung ist vergleichbar mit Erasure-Korrektur:

z.B.: Empfang von

$$\begin{array}{c}
 0100011 \\
 \uparrow \\
 \text{immer 0}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow *100011$$

Korrektur: 1. Ersetzen durch 1:

$$\hat{y}_1 = 1100011$$

$$S_1 = 110 \Rightarrow E = (1000000)$$

2. Ersetzen durch 0:

$$\hat{y}_0 = 0100011$$

$$S_0 = 000 \Leftarrow \text{kein Fehler}$$

$$\Rightarrow y = 0100011$$

Fehlerkorrektur mit Zusatzinformationen:

$$ze' + \lambda + 1 \leq d_{\min}$$

Korrektur von  $e'$  Fehlern und  $\lambda$  Erasure-Stellen

hier:  $\lambda = 1$

$$d_{\min} = 5$$

$$\Rightarrow ze' \leq 1$$

$$\Rightarrow e' = 0$$

Es sind also keine zusätzlichen Fehler korrigierbar

6.5)

a) Bestimmung von  $g_1$

Das Generatorpolynom muss ein Teiler des Polynoms  $(z^m + 1)$

Polynomdivision

$$\begin{aligned} (z^7 + 1) : (z^4 + z^3 + z^2 + g_1 z + 1) &= z^3 + z^2 + (g_1 + 1) \\ - (z^7 + z^6 + z^5 + g_1 z^4 + z^3) & \\ \hline z^6 + z^5 + g_1 z^4 + z^3 + 1 & \\ - (z^6 + z^5 + g_1 z^4 + z^3) & \\ \hline (g_1 + 1) z^4 + (g_1 + 1) z^3 + z^2 + 1 & \\ (g_1 + 1) z^4 + (g_1 + 1) z^3 + (g_1 + 1) z^2 + (g_1 + 1) z + g_1 + 1 & \\ \hline g_1 z^2 + g_1(g_1 + 1) z + g_1 & \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow g_1 = 0 & \end{aligned}$$