

a) Gebiet 2: $-t \leq x \leq 0$

$$\text{Helmholtz-Gleichung: } (\nabla^2 + \underline{k}_z^2) \vec{H}_2 = \vec{0}$$

$$\text{mit } \underline{k}_z^2 = \omega^2 \mu_0 \underline{\epsilon}_z$$

$$\text{und } \underline{\epsilon}_z = \epsilon - j \frac{\sigma_u}{\omega}$$

$$\sigma_u \gg \omega \epsilon : \underline{k}_z^2 \approx -j \omega \mu_0 \sigma_u$$

$$\omega \mu_0 \sigma_u \gg |y|^2 : \underline{k}_z^2 + y^2 \approx \underline{k}_z^2 \approx -j \omega \mu_0 \sigma_u$$

DGL für $h_z(x)$ mit Eindringtiefe $a = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_u}}$

$h_z(x)$ muss abklingen mit zunehmendem $|x|$

Grenzbedg für $\vec{H}$ bei $x=0$: $\vec{H}_{\text{tan}}$ stetig

$$(\vec{J}_f = \vec{0}, \text{ da } \sigma_u \text{ endlich})$$

$$b) \text{ rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\sigma_u + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$\sigma_u \gg \omega \epsilon$

$$\text{rot}(\underline{H}_{y2} \vec{e}_y) = - \frac{\partial \underline{H}_{y2}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{H}_{y2}}{\partial x} \vec{e}_z$$

$$\text{mittlere Verlustleistungsdichte } \bar{P}_{\text{verl.}} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \vec{J}^* \}$$

$$\text{Verlustleistung pro Länge: } \bar{P}_{\text{verl.}} = \int_{-t}^0 \int_0^{\omega} dx dy \bar{P}_{\text{verl.}}$$

c) Gebiet 1:

mittlere transportierte Leistung:

$$\vec{P}_1(z) = \iint_{\text{Gebiet 1}} d\vec{A} \frac{1}{z} \operatorname{Re} \{ \vec{J}_1 \}$$

$$d) \frac{d\vec{P}_1(z)}{dz} = \vec{P}_1^{\text{verl}} \Rightarrow \Delta$$

$$a) \vec{H}_2 = h_2(x) \vec{e}_y \exp(-\gamma z)$$

$$(\Delta + k_2^2) \vec{H}_2 = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} h_2(x) \exp(-\gamma z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h_2(x) \exp(-\gamma z) \right] \vec{e}_y + k_2^2 \vec{H}_2 = 0$$

$$h_2''(x) \exp(-\gamma z) \vec{e}_y + h_2(x) \gamma^2 \exp(-\gamma z) \vec{e}_y + k_2^2 h_2(x) \vec{e}_y \exp(-\gamma z) = 0$$

$$e^{-\gamma z} \vec{e}_y (h_2'' + h_2(x) (\cancel{\gamma^2} + k_2^2)) = 0$$

$$\cancel{e^{-\gamma z} \vec{e}_y} (h_2'' + k_2^2 h_2(x)) = 0$$

$$h_2''(x) + k_2^2 h_2(x) = 0$$

$$k_2 = -j\omega\mu_0 G_M$$

$$\lambda^2 = -k_2^2$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-k_2^2} = \pm jk_2 = \pm \omega\mu_0 G_M$$

$$h_2(x) = A e^{j\lambda x} + B e^{-j\lambda x}$$

$$= A e^{j\omega\mu_0 G_M x} + B e^{-j\omega\mu_0 G_M x}$$

$$= A e^{j \dots} + B e^{j \dots}$$

$$h_2''(x) - \frac{2j}{a^2} h_2(x) = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{2j}{a^2} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j) = \frac{1+j}{a}$$

$$h_2(x) = A e^{j \frac{1+j}{a} x} + B e^{-j \frac{1+j}{a} x}$$

h_{ten} stetig:

$$a) \text{ DGL: } \frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} - \frac{2j}{a^2} h_2(x) = 0$$

$$h_2 = A e^{\sqrt{2j} \frac{x}{a}} + B e^{-\sqrt{2j} \frac{x}{a}}$$

$$\sqrt{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j)$$

$$h_2(x) = A e^{(1+j) \frac{x}{a}} + B e^{-(1+j) \frac{x}{a}}$$

$$x \leq 0: x = -|x|$$

$$B e^{-\frac{1}{a}(-|x|)} = B e^{\frac{1}{a}|x|}$$

steigt an mit zunehmendem $|x|$

$$\Rightarrow B = 0$$

Grenzbedingung für $\vec{H}$ bei $x=0$:

$$\underbrace{\vec{H}_1(x=0)}_{\vec{H}_x} = \underbrace{\vec{H}_2(x=0)}_{\vec{H}_y}$$

$\vec{H}_{\text{ten}}$ stetig

$$\Rightarrow A = H_{10}$$

$$b) \vec{J} = \text{rot } \vec{H} \Rightarrow J_{z2} = \frac{dh_2(x)}{dx} e^{-\delta x}$$

$$\underline{J}_{z2} = \underline{H}_{10} \frac{1+j}{a} e^{(1+j)\frac{z}{a}} e^{-\gamma z}$$

Verlustleistung / Länge: $\overline{P}_{\text{verl}} \approx |\underline{H}_{10}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_u a} e^{-2\alpha z}$

$$c) \underline{S}_1 = |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} e^{-2\alpha z} \underline{e}_z$$

zeitgemittelte transportierte Leistung:

$$\overline{P}_1(z) = \frac{1}{2} |\underline{H}_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \omega e^{-2\alpha z}$$

$$d) \frac{d\overline{P}_1(z)}{dz} = - |\underline{H}_{10}|^2 \alpha \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \omega e^{-2\alpha z}$$

$$\overline{P}_{\text{verl}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\sigma_u a} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}}$$