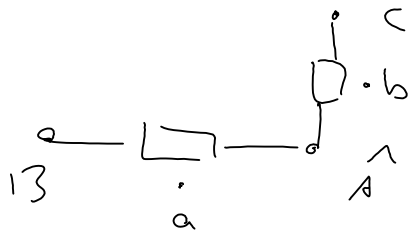


A.5.1

Geg: Schwarz-weiße Bildvorlage $x(i,j)$

Ges: zweidimensionale Prädiktor



$$a) \hat{x}(i,j) = a x(i-1,j) + b x(i,j-1)$$

b) Prädiktionsfehler:

$$\begin{aligned} d(i,j) &= x(i,j) - \hat{x}(i,j) \\ &= x(i,j) - a x(i-1,j) - b x(i,j-1) \end{aligned}$$

Leistung des Prädiktionsfehlers:

$$\begin{aligned} E\{d^2\} &= E\{x^2(i,j) + a^2 x^2(i-1,j) + b^2 x^2(i,j-1) \\ &\quad - 2a x(i,j) x(i-1,j) - 2b x(i,j) x(i,j-1) \\ &\quad + 2ab x(i-1,j) x(i,j-1)\} \\ &= \varphi_{xx}(0,0) [1 + a^2 + b^2] \\ &\quad - 2a \varphi_{xx}(1,0) - 2b \varphi_{xx}(0,1) + 2ab \varphi_{xx}(1,1) \end{aligned}$$

c) Normalengleichungen:

$$E\{d^2\} \rightarrow \min$$

partielle Ableitungen von $E\{d^2\}$ nach a und b

$$\frac{\partial E\{d^2\}}{\partial a} = 2a \varphi_{xx}(0,0) - 2 \varphi_{xx}(1,0) + 2b \varphi_{xx}(1,1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \{a\}}{\partial b} = 2b \varphi_{xx}(0,0) - 2\varphi_{xx}(0,1) + 2a \varphi_{xx}(1,1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(1,0) = a \varphi_{xx}(0,0) + b \varphi_{xx}(1,1)$$

$$\varphi_{xx}(0,1) = b \varphi_{xx}(0,0) + a \varphi_{xx}(1,1)$$

$$\text{oder } \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(1,0) \\ \varphi_{xx}(0,1) \end{pmatrix}}_{\underline{R_{xx}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{xx}(0,0) & \varphi_{xx}(1,1) \\ \varphi_{xx}(1,1) & \varphi_{xx}(0,0) \end{pmatrix}}_{\underline{R_{xx}}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\underline{I_0}}$$

d) Gegeben: spezielle Bildvorlage mit

$$\varphi_{xx}(0,0) = \sin(0) - \sin(0) = 1$$

$$\varphi_{xx}(1,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$$

$$\varphi_{xx}(0,1) = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\varphi_{xx}(1,1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a + \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} b = \frac{2}{\pi} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} + b = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$(1) \quad a = \frac{2}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} \quad \text{in (2)}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} \approx 0,7974$$

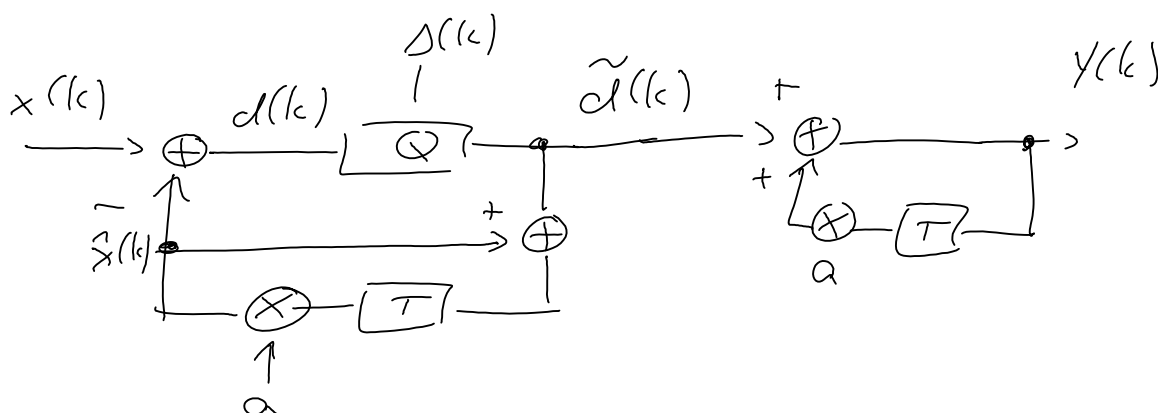
$$a = 0,1796$$

$$\begin{aligned}
 c) \text{ Prädiktionsgewinn: } G_p &= 10 \log \frac{E\{x^2\}}{E\{d^2\}} \\
 &= 10 \log \frac{\varphi_{xx}(0,0)}{\varphi_{xx}(0,0)(1+a^2+b^2) - 2a\varphi_{xx}(1,0) - 2b\varphi_{xx}(0,1) + 2ab\varphi_{xx}(1,1)} \\
 &= 10 \log \frac{1}{1(1+0,1796^2 + 0,7974^2) - 2 \cdot 0,1796 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 \cdot 0,7974 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + 2 \cdot 0,1796 \cdot 0,7974 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{2}} \\
 &= 7,75 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

1.4.6 e)

Gesucht: $\varphi_{zz}(0) = \sigma_z^2$

Gegeben: Rückwärtsprädiktion



Betrachtung von $\Delta(k)$: $x(k) = 0$

$y(k) = \Delta'(k)$

$$\tilde{D}(z) = \Delta(z) - \hat{x}(z)$$

$$\hat{x}(z) = (\tilde{D}(z) + \hat{x}(z)) \cdot a \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow \hat{x}(z) = \frac{a z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \cdot \tilde{D}(z)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}(z) = \Delta(z) - \frac{a z^{-1}}{1 - a z^{-1}} \tilde{D}(z)$$

$$\frac{1}{1 - a z^{-1}} \quad N(z)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}(z) = D(z) \cdot (1 - a z^{-1})$$

Empfänger: $D'(z) = \tilde{D}(z) + D'(z) a z^{-1}$

$$\Rightarrow D'(z) = \tilde{D}(z) \cdot \frac{1}{1 - a z^{-1}} = D(z) \cdot \frac{(1 - a z^{-1})}{(1 - a z^{-1})}$$

$$= D(z)$$

$\Rightarrow$ Quant.-Rauschen am Empfänger ist identisch mit Q.-Rauschen im Prädiktor

$$\Rightarrow \sigma_{\tilde{e}}^2(0) = N_{q,c} = 1,33 \cdot 10^{-4}$$