GGÜ 6

Freitag, 26. November 2010
14:57

6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

26.11.2010

Aufgabe 1. Ein typisches stochastisches Modell zur Modellierung eines Funkkanals ohne direkte Sichtverbindung ist der Rayleigh-Fading Kanal. Wie aus der Vorlesung bekannt, kann ein zeitdiskreter Rayleigh-Fading Kanal durch

$$h_k = |h_k| \exp(i\phi_k)$$

beschrieben werden, wobei

- $|h_k|$ die Amplitude mit der Verteilungsdichte

$$f_{|h_k|}(|h_k|) = \frac{2|h_k|}{\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{|h_k|^2}{\sigma_h^2}\right) \mathbb{I}_{[0,\infty)}(|h_k|)$$

- und ϕ_k die Phase mit der Verteilungsdichte

$$f_{\phi_k}(\phi_k) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{I}_{[0,2\pi)}(\phi_k)$$

  ist. Hier bezeichnet der Index k einen beliebigen Zeitpunkt.

Die Zufallsvariablen $|h_k|$ und ϕ_k sind stochastisch unabhängig.

a) Berechnen Sie die Verteilungsdichtefunktion von $|h_k|^2$. Um welche Art von Verteilung handelt es sich?

$$f_{|h_k|}(|h_k|) = \frac{2|h_k|}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{|h_k|^2}{\sigma_k^2}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(|h_k|)$$

ges: $f_{|h_k|^2}(|h_k|^2)$ $\quad x = |h_k|$

$|h_k|^2 = T(|h_k|)$ $\quad T(x) = x^2 = y$

$x = T^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = 2x$

$$f_{|h_k|^2}(x) = \frac{1}{\left|\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=T^{-1}(y)}\right|} f_{|h_k|}(T^{-1}(y)) = \frac{1}{|2x|_{x=\sqrt{y}}|} f_{|h_k|}(\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{(\sqrt{y})^2}{\sigma_h^2}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\sigma_h^2} \exp\left(-\frac{y}{\sigma_h^2}\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$$

Exponentialverteilung $\quad$ Parameter $\frac{1}{\sigma_h^2}$

Durch folgende Beziehung sei der Ausgang y_k eines Funkkanals im komplexen Basisband beschrieben:

$$y_k = h_k \cdot x_k + n_k.$$

Hierbei ist n_k additives Rauschen. Wie auch der Kanal h_k ist n_k eine komplexe Größe, d.h.,

$$n_k = n_{R_k} + i \cdot n_{I_k}$$

mit dem Realteil n_{R_k} und dem Imaginärteil n_{I_k}. Die Zufallsvariablen n_{R_k} und n_{I_k} seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsdichtefunktion

$$f_{n_{R_k}}(z) = f_{n_{I_k}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_n^2}\right).$$

Des Weiteren ist x_k das Signal am Kanaleingang. Es hat die mittlere Leistung σ_x^2.

b) Berechnen Sie die den Erwartungswert des Signal-zu-Rauschverhältnisses, welches folgendermassen definiert ist:

$$\text{SNR} = \frac{\text{E}\left[|h_k \cdot x_k|^2\right]}{\text{E}\left[|n_k|^2\right]}.$$

$$E[|n_k|^2] = E[(n_{R_k} + i n_{I_k}) \cdot (n_{R_k} - i n_{I_k})]$$

$$= E[n_{R_k}^2] + E[n_{I_k}^2]$$

$$f_{n_{R_k}}(z) = f_{n_{I_k}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_n^2}\right)$$

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma_n^2}\right) \right.$$

$$\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E(|n_k|^2) = \frac{\sigma_n^2}{2} + \frac{\sigma_n^2}{2} = \sigma_n^2$$

$$E[|h_k x_k|^2] = E[|h_k|^2 |x_k|^2] = E[|h_k|^2]\, E[|x_k|^2]$$

s.u. h_k, n_k

$$E[|h_k|^2] = \sigma_h^2$$

$$\Rightarrow E[(h_k x_k)^2] = \sigma_h^2 \underbrace{E[|x_k|^2]}_{=\sigma_x^2} = \sigma_h^2 \sigma_x^2$$

$= \sigma_x^2$ da die mittlere Leistung von x_k σ_x^2 ist

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_h^2 \sigma_x^2}{\sigma_n^2}$$

σ_n^2

c) Nehmen Sie nun an, dass die verwendeten Sendesymbole eine konstante Amplitude haben (PSK-Modulation, *Phase-Shift-Keying*), d.h. $|x_k|^2 = \sigma_x^2$. Gilt folgende Gleichung?

$$\frac{\mathrm{E}\left[|h_k \cdot x_k|^2\right]}{\mathrm{E}\left[|n_k|^2\right]} = \mathrm{E}\left[\frac{|h_k \cdot x_k|^2}{|n_k|^2}\right]$$

Weitere Annahme: $|x_k|^2 = \sigma_x^2$ Sendesymbole haben konstante Leistung

$$E\left[\frac{|h_k x_k|^2}{|n_k|^2}\right] \doteq E\left[|h_k x_k|^2\right] \cdot E\left[\frac{1}{|n_k|^2}\right]$$

$$= \sigma_k^2 \sigma_x^2 E\left[\frac{1}{|n_k|^2}\right]$$

Analogie zwischen $|n_k|^2$ und $|h_k|^2$: $f_{|n_k|^2}(z) = \frac{1}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{z}{\sigma_n^2}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)$

$$E\left[\frac{1}{|n_k|^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} f_{|n_k|^2}(z)\, dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{z}{\sigma_n^2}\right) dz$$

$y = \frac{z}{\sigma_n^2}$ $\quad z = y \cdot \sigma_n^2$

$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sigma_n^2}$

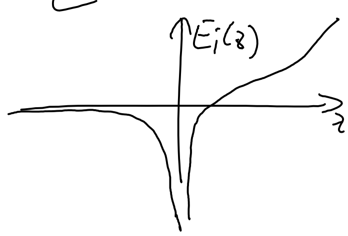
$dz = \sigma_n^2\, dy$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{y \cancel{\sigma_n^2}} \frac{1}{\sigma_n^2} \exp(-y) \cancel{\sigma_n^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \exp(-y)\, dy = \frac{1}{\sigma_n^2} \lim_{x \to 0} \int_x^{\infty} \frac{1}{y} \exp(-y)\, dy$$

$$= -\frac{1}{\sigma_n^2} \lim_{x \to 0} E_i(-x) = \infty$$

$$\left[\text{Def } E_i(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt\right]$$



$$\Rightarrow E\left[\frac{|h_k x_k|^2}{|n_k|^2}\right] = \infty \neq \frac{E\left[|h_k x_k|^2\right]}{E\left[|h_k|^2\right]}$$

d) Typischerweise ändert sich die Realisierung des Fadings nicht unabhängig von einem Zeitpunkt zum nächsten. Somit sind zwei aufeinanderfolgende Kanalrealisierungen h_k und h_{k+1} korreliert. Wir nehmen an, dass sowohl für den Realteil h_{R_k}, als auch für den Imaginärteil h_{I_k} von h_k, d.h.

$$h_k = h_{R_k} + i \cdot h_{I_k}$$

die Zeitpunkte k und $k+1$ wie folgt korreliert sind:

$$\mathrm{E}\left[h_{R_k} h_{R_{k+1}}\right] = \mathrm{E}\left[h_{I_k} h_{I_{k+1}}\right] = c.$$

Darüberhinaus nehmen wir an, dass die Eingangssymbole eine konstante Amplitude σ_x und eine unabhängige Phase von Symbol zu Symbol haben. Ist in diesem Fall die der Zufallsvektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{R_1} \\ y_{I_1} \\ y_{R_2} \\ y_{I_2} \end{pmatrix}$$

gemeinsam normalverteilt?

$h_k = h_{RK} + i h_{IK}$

$E[h_{RK} \cdot h_{RK+1}] = E[h_{IK} \cdot h_{IK+1}] = c$

$|x_k| = \sigma_x$

Eingangssymbole x_k

unabhängige Phasen haben

$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_{R1} \\ y_{I1} \\ y_{R2} \\ y_{I2} \end{pmatrix}$ sind die Elemente von $\underline{y}$ gemeinsam normalverteilt

$y_k = x_k h_k + n_k = (x_{RK} + i x_{IK}) \cdot (h_{RK} + i h_{IK}) + n_{RK} + i n_{IK}$

$= x_{RK} h_{RK} + i x_{RK} h_{IK} + i x_{IK} h_{RK} - x_{IK} \cdot h_{IK} + n_{RK} + i n_{IK}$

$= \underbrace{x_{RK} h_{RK} - x_{IK} h_{IK} + n_{RK}}_{Re(y_k) = y_{RK}} + i \underbrace{(x_{RK} h_{IK} + x_{IK} h_{RK} + n_{IK})}_{Im(y_k) = y_{IK}}$