GGÜ 4

Freitag, 12. November 2010
15:14

A. 1

a) X Poissonverteilt $\qquad X \sim Poi(\delta) \quad \delta > 0$

$$P(X=k) = e^{-\delta} \cdot \frac{\delta^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!}$$

$$= \delta \sum_{k-1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!} \qquad\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \delta \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^i}{i!} = \delta$$

Varianz

zunächst: $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\, e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{(k-1)!} = \delta^2 \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^{k-2}}{(k-2)!} + \delta \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!} + \delta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta} \frac{\delta^k}{k!} = \delta^2 + \delta$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

b) X sei exponentialverteilt

$$X \sim Exp(\lambda) \qquad \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x} x]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 0 + [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x} x^2\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\, e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{\cdot} \cdot 2x\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2 \cdot \frac{1}{\lambda} e^{\cdot} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var[X] = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

A.2

a) X und Y seien 2 nicht näher spezifizierte Zufallsvariablen

zeige: i) $Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$

$$E[(X - E(X^2))^2] = E[X^2 - 2X E(X) + E(X)^2]$$

$$= E(X) - E[2X E(X)] + E[E(X)^2]$$

$$= E[X^2] - 2E(X) E(X) + E(X)^2$$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

zeige ii) $cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

$$= E(XY) - E(X) E(Y)$$

$$E((X - E(X))(Y - E(Y))) - E[XY - X E(Y) - Y E(X) + E(X) E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X E(Y)) + E(Y E(X)) + E(E(X) E(Y))$$

$$= E(XY) - E(Y) E(X) - \cancel{E(X) E(Y)} + \cancel{E(X)} E(Y)$$

b) $\underline{C} = (cov(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\underline{C} \begin{pmatrix} cov(X_1, X_n) & cov(X_1, X_2) \dots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & - \quad \searrow \quad - & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ cov(X_n, X_n) & - \quad - \quad - & cov(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E[(X_1 - E(X_1))^2] & E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))] \\ E[(X_2 - E(X_2))(X_1 - E(X_1))] & E[(X_2 - E(X_2))^2] \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \dots \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \dots \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} \quad \sigma_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{C} = \underline{C}' \qquad \underline{C} \text{ symmetrisch}$$

c) $\underline{X} = (X_1, X_2)'$

$$f_{\underline{x}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right)\right)$$

gesucht Erwartungswertvektor $\underline{\mu}$

Kovarianzmatrix $\underline{C}$

$\det(C) > 0$

durch Vergleich mit

$$f_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\underline{C}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})' \underline{C}^{-1} (\underline{x}-\underline{\mu})\right)$$

Vorfaktoren: $\pi\sqrt{3} = (2\pi)\ (\underline{C})^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow |\underline{C}| = \frac{3}{4}$

Exponenten: $-\frac{1}{2}\left[\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right)' \cdot C^{-1} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right)\right] \overset{!}{=} -\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right)$

kein von x_i unabhängiger Teil

$\Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{2}(x_1\ x_2)\ \frac{4}{3} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2}{3}(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{22} x_1 - \sigma_{12} x_2 \\ -\sigma_{12} x_1 - \sigma_{11} x_2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\left(\sigma_{22} x_1^2 - 2\sigma_{12} x_1 x_2 + \sigma_{11} x_2^2\right)$$

$$\overset{!}{=} -\frac{2}{3}\left(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\underline{x} = (x_1, x_2)'$ normalverteilt

$\Rightarrow$ eindimensionale Normalverteilung von x_1, x_2

ges: $f_{x_1}(x_1)$ $\quad f_{x_2}(x_2)$

1-dim Normalverteilung ist vollstd. beschrieben durch

Mittelwert μ

Varianz σ^2 $\Rightarrow$ lässt sich aus $\underline{\mu}$, $\underline{C}$ ablesen

$\Rightarrow$ Randverteilungsdichten

$$f_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right)$$

$\Rightarrow x_1, x_2 \sim \mathcal{N}_1(0,1)$ Standardnormalverteilung

e) Lässt sich aus der Kenntnis der Randverteilungsdichten die n-dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte berechnen?

nein !

- Anzahl der Parameter aller Randverteilungen ist $2n$
- n-dimensionale Verteilungsdichte habe

Menge der Varianzen + Einträge $n\frac{(n+1)}{2}$

$n(\overset{n}{\nabla})$

n-Erwartungswerte

$\Rightarrow n + \frac{n(n+1)}{2} > 2n$

$\Rightarrow$ gilt nicht