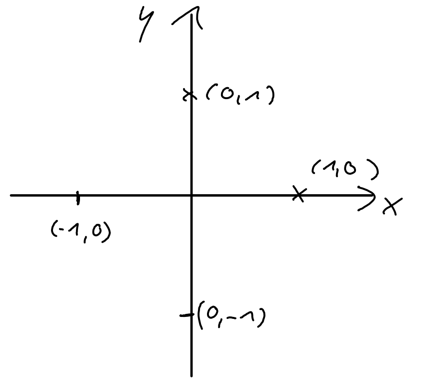
GGÜ 5

Freitag, 19. November 2010
15:00

A.1a)

	$k=-1$	$k=0$	$k=+1$	$P(X=l)$
$l=-1$	0	1/4	0	1/4
$l=0$	1/4	0	1/4	1/2
$l=1$	0	1/4	0	1/4
$P(Y=k)$	1/4	1/2	1/4	



Geg. $f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

gesucht: Randdichten zB für X: $P(X=l) = \sum_{y \in T_Y} P(X=l, Y=y)$

b) z.z.: X, Y sind unkorreliert:

d.h. $Cov(X,Y) \overset{!}{=} 0$

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - \underbrace{E(X)}_{=0}\underbrace{E(Y)}_{=0}$$

$$E(X) = E(Y) = (-1)\tfrac{1}{4} + 0\cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow E(X\cdot Y) \overset{!}{=} 0$$

$$E(X\cdot Y) = \sum_{k=-1}^{1}\sum_{l=-1}^{1} k\, l\, P(X=k, Y=l) = -1\,(-1)\,0 + (-1)\cdot 0 \cdot \tfrac{1}{4} + \dots + 1\cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ X, Y sind unkorreliert

c) X, Y sind s.u. falls $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\cdot P(Y=y) \quad \forall x \in T_X$ u. $y \in T_Y$

Gegenbeispiel: $x=-1$, $y=-1$

$$P(X=-1, Y=-1) = 0$$

$$P(X=-1) = \tfrac{1}{4} = P(Y=-1)$$

$$\Rightarrow P(X=-1, Y=-1) \neq P(X=-1)\cdot P(X=-1)$$

$\Rightarrow$ X, Y <u>nicht</u> s.u. aber unkorreliert

$$\left[\text{s.u.} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{unkorreliert}\right]$$

Aufgabe 2:

a) Es gilt: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

analog für f_Y.

D. $(x|y) = f_{X,Y}(x,y)$ $\quad f_{X,Y}(x|y)$

analog für fy.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx}$$

analog für $f_{Y|X}$

b) Es gilt: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \leftarrow$ gegeben

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^x 2e^{-(x+y)}\,dy = 2e^{-x}\int_0^x e^{-y}\,dy = 2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^x$$

$$= 2e^{-x}(1-e^{-x})$$

$$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2e^{-(x+y)}}{2e^{-x}(1-e^{-x})} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-x}} & 0 \le y \le x \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A 3) $\lambda = \lambda_x(1+\alpha x)$

a) $\frac{1}{\lambda}$ bedingte mittlere Zeit zum Ausfall der Ersatzkomponente

$$f_{Y|X}(y|x) = \lambda_x(1+\alpha x)\,e^{(-\lambda_x(1+\alpha x)y)}\;\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$$

b) ZV y: Nutzungsdauer der Ersatzkomponente

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda_x(1+\alpha x)\,e^{(-\lambda_x(1+\alpha x)y)}\cdot\lambda_x e^{(-\lambda_x\cdot x)}\,dx$$

$$= \lambda_x^2\int_0^{\infty}(1+\alpha x)\cdot\exp(-\lambda_x y - \lambda_x\alpha x y - \lambda_x x)\,dx$$

$$= \lambda_x^2\,e^{(-\lambda_x y)}\cdot\int_0^{\infty}(1+\alpha x)\exp(-x\underbrace{\lambda_x(\alpha y+1)}_{a})\,dx$$

$$= \lambda_x^2\,e^{(-\lambda_x y)}\left(\int_0^{\infty}\exp(-ax)\,dx + \alpha\int_0^{\infty} x\exp(-ax)\,dx\right)$$

... mit partieller Integration...

$$= \lambda_x^2\exp(-\lambda_x y)\left[\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{a^2}\right]\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$$