

3.2

$$H_0 = \log(2) = 1 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$H(x_t | x_{t-1}) = - \sum_{x_t} \sum_{x_{t-1}} p(x_{t-1}) \cdot p(x_t | x_{t-1}) \log(p(x_t | x_{t-1}))$$

$$p(A) = p(A|A)p(A) + p(A|B) \underbrace{p(B)}_{=1-p(A)}$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{p(A|B)}{1 - p(A|A) + p(A|B)} = \frac{0,2}{1 - 0,3 + 0,2} = 0,222$$

$$\Rightarrow p(B) = 1 - p(A) = 0,778$$

$$H(x) = 0,764 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$H(x_t | x_{t-1}) = - [0,222 \cdot 0,3 \cdot \log(0,3) + 0,222 \cdot 0,7 \log(0,7) + 0,778 \cdot 0,2 \log(0,2) + 0,778 \cdot 0,8 \log(0,8)]$$

$$= 0,757 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$R_0 = H_0 - H(x_t | x_{t-1}) = 0,243 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$r_0 = \frac{R_0}{H_0} \cdot 100\% = 24,3\%$$

b) Gesucht: minimale Gruppengröße m , sodass
 $r_c < 1,5\%$

$$\underline{m=1}: \text{minimale Wortlänge: } l_1 = 1 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$\text{Coderedundanz: } r_{c1} = \frac{L_1 - H(x_t | x_{t-1})}{H(x_t | x_{t-1})} = 32,1\% > 1,5\%$$

$$\underline{m=2}: p(x_t, x_{t-1}) = \underbrace{p(x_t)}_{=p(x_{t-1})} p(x_{t-1})$$

S	$p(S)$	S^1	S^2
BB	0,6224	BB 0,6224	BB } $\frac{1}{0}$
AB	0,1556	I 0,222	I } $\frac{1}{0}$
BA	0,1556	AB 0,1556	II } $\frac{1}{0}$
AA	0,0666		

S	Y_i	W_i	$p(x_t, x_{t-1}) \cdot W_i$
BB	1	1	0,6224
AB	01	2	0,3112
BA	011	3	0,4662
AA	110	3	0,1998

$$L_2 = 1,16 \frac{\text{bit}}{\text{Gruppe}} = 0,8 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$r_{c2} = \frac{L_2}{m} - H(x_t | x_{t-1}) = 5,68\% > 1,5\%$$

m=3: Hoffmann-Code mit $p(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}) = p(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}) \cdot p(x_{t-1} | x_{t-2})$
 $= p(x_t | x_{t-1}) \cdot p(x_{t-1}, x_{t-2})$

S					
BBB	0,5	BBB	0,5	BBB	0,5
ABB	0,125	ABB	0,125	ABB	0,125
BBA	0,125	BBA	0,125	BBA	0,125
BAB	0,11	BAB	0,11	BAB	0,11
AAB	0,047	I	0,051	I	0,051
BAA	0,047	AAB	0,047	AAB	0,047
ABA	0,0311	BAA	0,047	BAA	0,047
AAA	0,02				

VI muss bei gleicher W'ert nach oben!
 (Konvention)

BBB	0,5	<u>VI</u>	0,5
<u>V</u>	0,27	BBB	0,5
<u>IV</u>	0,23		

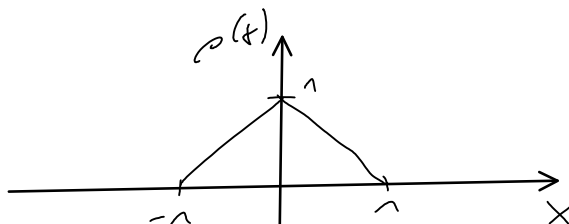
	W _i
BBB	0
ABB	110
BBA	101
BAB	100
AAB	11111
BAA	11110
ABA	11101
AAA	11100

$$\Rightarrow L_3 = \sum p_i w_i = 2,293 \frac{\text{bit}}{\text{Gruppe}} = 0,764 \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

$$r_{L3} = \frac{2,293}{3} - 0,767 = 0,97\% < 1,5\%$$

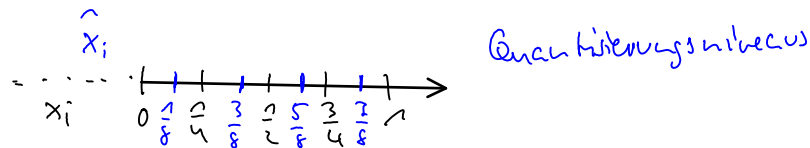
$\Rightarrow$ minimale Gruppengröße: $m=3$

A.4.2



$w=3 \Rightarrow 2^3 = 8$ Quantisierungsstufen

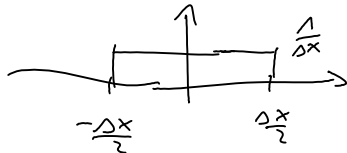
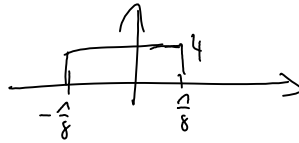
$w=3 \Rightarrow 2^3 = 8$ Quantisierungsstufen



N_q : zunächst Näherung:

q gleichverteilt

$$q = x - \hat{x}$$



$$N_q = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} e^2 \frac{1}{\Delta x} dx = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^3 \right) = \frac{\Delta x^2}{12}$$

$$N_q = \frac{\Delta x^2}{12} = \left(\frac{2x_{\max}}{2^w} \right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{192}$$

Exakte Lösung:

Teilausschnitte für $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$

Intervall i: $q = x - \hat{x} \in [-\frac{\Delta x}{2}; \frac{\Delta x}{2}]$

$$\Rightarrow x = q + \hat{x}$$

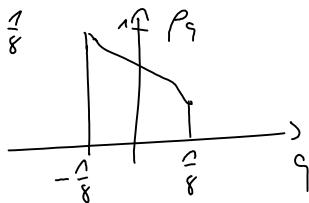
$$p_q(q) = p_x(q + \hat{x})$$

$$-\frac{\Delta x}{2} \leq q \leq \frac{\Delta x}{2}$$

$$\Rightarrow N_{q_i} = \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} p_x(q + \hat{x}) q^2 dq$$



z.B: $\hat{x}_0 = \frac{1}{8}$



$$N_{q_0} = \int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} (1 - q - \frac{1}{8}) dq = \int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} \frac{7}{8} q^2 - q^3 dq = \frac{1}{8} q^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} q^4 \Big|_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{1}{8} \right)^3 = \frac{2}{8^4}$$

...

$$N = \sum_i N_{q_i} = \frac{1}{192}$$

hier exakt wie Näherung