

A3FO2

$$a) \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} \sin(m\varphi) = -m^2 \sin(m\varphi)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \sinh(kz) = +k^2 \sinh(kz)$$

b) Rotationsymmetrie

$$\varphi_{km}(\rho=\rho_0, \varphi, z=+b) = k_1 = \text{konst.}$$

z beliebig

 $\Rightarrow (m=0)$ keine φ -Abhängigkeit $\varphi(\rho)$ nicht singulär für $\rho \rightarrow 0$ $(E = -\text{grad } \varphi \text{ physikalische Größe} \rightarrow \text{endl.})$

$$c) \quad \varphi_1 = \sum_{L=1}^{\infty} a_L J_0(k_L \rho) \quad \text{Fourier-Bessel-Reihe}$$

Randbedingung bei $\rho=a$: $\varphi(\rho=a)=0$ $\Rightarrow J_0(k_L a) = 0$ mit $u_L = k_L a$ ist L -te Nullstelle von J_0

$$a) \quad s_m = \sin(m\varphi)$$

$$h_k = \sinh(kz) \quad h_k(z-b) = \sinh(k(z+b))$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varphi_{km}(\rho)}{d\rho} \right) + (k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}) \varphi_{km}(\rho) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \frac{d\varphi_{km}(\rho)}{d\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \varphi_{km}(\rho) + \frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \frac{d^2}{d\rho^2} \varphi_{km}(\rho)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\rho^2} \varphi_{km}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \varphi_{km}(\rho) + (k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}) \varphi_{km}(\rho) = 0$$

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad k_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\rho) = \varphi_{mkz}(\rho) = E_{mkz} J_m(k_2 \rho) + F_{mkz} U_m(k_2 \rho)$$

$$b) \quad \varphi_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{km}(\rho, \varphi, z)$$

$$= \sum_m \sum_k \varphi_{km}(\rho) s_m(\varphi) h_k(z)$$

$$= \sum_m \sum_k \left[E_{mkz} J_m(k_2 \rho) + F_{mkz} U_m(k_2 \rho) \right] \cdot \sin(m\varphi) \sinh(kz)$$

 $m=0$ da keine φ -abhängigkeit

$$a) \varphi_{m0} = A_m' \sin(m\varphi) + B_m' \cos(m\varphi) \quad (m \neq 0)$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = A_0' \varphi + B_0' \quad (m=0)$$

$$3.) h_{1k} = c_k' \sinh(k(z-b)) + d_k' \cosh(k(z-b)) \quad (k \neq 0)$$

$$4.) h_0 = c_0' (z-b) + d_0' \quad (k=0)$$

$$5.) f_{km} = E_{km}' J_m(k\rho) + F_{km}' U_m(k\rho) \quad (k \neq 0, m \text{ beliebig})$$

$$6.) f_{0m} = E_{0m}' \rho^m + F_{0m}' \rho^{-m} \quad (m \neq 0, k=0)$$

$$7.) f_{00} = E_{00}' + F_{00}' \ln \rho \quad (m=0, k=0)$$

b) Rotationssymmetrie ($\varphi = \text{konst. auf Deckel}$)

$$\varphi_{km}(\rho=\rho_0, \varphi, z=b) = U_n = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow g_m(\varphi) = \text{konst.} \Rightarrow m=0$$

keine φ -abhängigkeit

$\Rightarrow$ (1) und (6) entfallen
in (2) muss $d_0' = 0$ sein

Nachträge:

φ nicht singulär für $\rho \rightarrow 0$

(keine Punkt- oder Linienladungen bei $\rho=0$!)

$$\Rightarrow F_{km}' = 0, F_{00}' = 0$$

$$g_0 = h_0'$$

$$\varphi_n = \sum_{k \neq 0} \left\{ c_k' \sinh(k(z-b)) + d_k' \cosh(k(z-b)) \right\} \cdot J_0(k\rho) + \underbrace{c_0' (z-b)}_{h_0} + \underbrace{d_0'}_{f_{00}}$$

Aus dieser unendl. Reihe kann man eine Fourier-Bessel-Reihe machen, wenn man zusätzlich fordert, dass $J_0(k_L a) = 0$ für alle $L = 1, 2, 3, \dots$

$U_L = k_L a$ durchläuft alle NST von J_0
Randbed. bei $z=a$ $\varphi_n(\varphi=a) = 0$

$$\Rightarrow \downarrow z=b \quad D_0 = 0 \text{ und } c_0 = 0$$

$$J_0(k_L a) = 0$$

$$c) \varphi_n = 0 \text{ für } \rho = a$$

$$\Rightarrow J_0(k_L a) = 0 \text{ mit } U_L = k_L \cdot a \text{ ist } L\text{-te NST von } J_0$$

$$\varphi_n = \sum_{L=1}^{\infty} a_L \cdot J_0(k_L \rho) + c_0(z-b) + d_0$$

$$c_0 = 0 \quad d_0 = 0$$

$$d) z=b \Rightarrow \varphi = U_n$$

$$U_n = \sum_{L=1}^{\infty} D_L \cdot J_0(k_L \rho)$$

$$\Rightarrow \int_0^a U_n J_0(k_n \rho) \rho d\rho = \sum_{L=1}^{\infty} D_L \int_0^a J_0(k_L \rho) J_0(k_n \rho) \rho d\rho$$

$$= U_n \frac{a}{k_n} J_1(k_n a)$$

$$\frac{1}{2} \delta_{nn} a^2 [J_1(k_n a)]^2$$

$a_n \dots$

$$\Rightarrow D_n = \frac{2 U_n}{k_n a J_1(k_n a)}$$

$$e) \varphi_2 = \varphi_1 (b \rightarrow -b, U_1 \rightarrow U_2, c_L \rightarrow g_L)$$

f) Grenzbedingungen: bei $z=0$:

$$1.) \varphi_1(z=0) = \varphi_2(z=0)$$

$$2.) \int_{1z}(z=0) = \int_{2z}(z=0)$$

$$\boxed{D \text{ iv } \vec{J} = -\dot{\vec{P}}_F} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$L=0 \left(\frac{d}{dt} = 0 \right) \text{ statisch}$$

$$G_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = G_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

lineare Unabhängigkeit der $J_0(k_L a)$

$\Rightarrow$ 1.) + 2.) gelten für jeden Summanden der Reihe

$$1.) \boxed{(G_L + C_L) \sinh(k_L b) = \frac{2(U_1 - U_2)}{k_L a J_1(k_L a)} \cosh(k_L b)}$$

$$2.) \boxed{\begin{aligned} &(\sigma'_1 C_L - \sigma'_2 G_L) \cosh(k_L b) \\ &= \frac{2(\sigma'_2 U_2 + \sigma'_1 U_1)}{k_L a J_1(k_L a)} \sinh(k_L b) \end{aligned}}$$

$$g) U_1 = U_2 : \quad \boxed{C_L = -G_L = \frac{2U_1}{k_L a J_1(k_L a)} \tanh(k_L b)}$$

$$h) U_1 = -U_2 : \sigma'_1 = \sigma'_2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_L = G_L = \frac{2U_1}{k_L a J_1(k_L a)} \coth(k_L b)}$$