

Klausur Höhere Mathematik II (Bachelor / Vordiplom) SS 2010

07.08.2010

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1**[9 Punkte]**

Die lineare Abbildung L sei bezüglich der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ im Bild- und Urbildraum durch die Matrix

$$A = \mathcal{L}_L^{B,B} := \begin{pmatrix} -6 & 6 & 36 \\ -12 & 12 & 72 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung L bezüglich der Basis $C = (e_1 + e_2, \frac{1}{6}e_3, e_2 - \frac{1}{6}e_3)$ im Bild- und Urbildraum.

Aufgabe 2**[9 Punkte]**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Matrix auf Diagonalisierbarkeit und geben Sie alle Diagonalformen bzw. alle Jordan-Normalformen an.

Hinweis: Sie müssen die Basiswechselmatrix nicht bestimmen.

Aufgabe 3**[9 Punkte]**

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für $x \in (0, \infty)$ zunächst

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{und anschließend} \quad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}.$$

Aufgabe 4**[7 Punkte]**

Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz:

$$\int_{\frac{1}{2}}^5 \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

Aufgabe 5**[9 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $g(t) := \int_0^t \sin^2(x) dx$ für $t \in (0, \pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend ist, zu g also eine Umkehrfunktion h existiert.

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

(2 Punkte)

(c) Berechnen Sie $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, sofern der Wert existiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 6**[11 Punkte]**

Lösen Sie auf $I = (0, \frac{1}{2})$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \sinh(u(x)) u'(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}, & x \in I, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 1:

$$\mathcal{L} = (v_1 = e_1 + e_2, v_2 = \frac{1}{6}e_3, v_3 = e_2 - \frac{1}{6}e_3)$$

$$\begin{aligned} L(v_1) &= L(e_1 + e_2) = L(e_1) + L(e_2) \stackrel{(1)}{=} -6e_1 - 12e_2 + 6e_1 + 12e_2 + 1e_3 \\ &= e_3 \stackrel{(1)}{=} 6 \cdot v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(v_2) &= L\left(\frac{1}{6}e_3\right) = \frac{1}{6} L(e_3) = \frac{1}{6} (36e_1 + 72e_2) \stackrel{(1)}{=} 6e_1 + 12e_2 \\ &\stackrel{(2)}{=} 6v_1 + 6v_3 + 6v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(v_3) &= L\left(e_2 - \frac{1}{6}e_3\right) = L(e_2) - \frac{1}{6} L(e_3) = 6e_1 + 12e_2 + 1e_3 - \frac{1}{6}(36e_1 + 72e_2) \\ &\stackrel{(1)}{=} 1 \cdot e_3 \stackrel{(1)}{=} 6 \cdot v_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = {}^{\mathcal{L}}L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Aufgabe 2

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 4(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2 + 4)$$

$$= -(\lambda-2)^3 \quad (2)$$

$\Rightarrow \lambda=2$ ist der einzige Eigenwert von A . (1)

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow E(2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3)$$

Also gilt $n_{\text{geo}}(2) = 1 \neq n_{\text{alg}}(2) = 3$

$\Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar. (1)

Aus $n_{\text{geo}}(2) = 1$ folgt, dass es genau einen Jordan block zum Eigenwert 2 gibt. (1)

$\Rightarrow$ Die Jordan-Normalform von A ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Aufgabe 3:

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

①

$\Rightarrow f$ ist stetig auf $[0, x]$ und differenzierbar auf $(0, x)$ (für jedes $0 < x < \infty$) ①

MWS $\Rightarrow \exists \xi \in (0, x)$ sodass ①

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \quad ①$$

$$\Rightarrow f'(\xi) < \frac{1}{2} \quad (0 < \xi) \quad ②$$

$$\text{und } f'(\xi) > \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad (\xi < x) \quad ②$$

insgesamt:

$$f(x) - f(0) = \sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \cdot x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

①

Aufgabe 4

$$\int_{1/2}^5 \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$a) \int_{1/2}^5 \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} dx := \lim_{a \searrow 1/2} \int_a^5 \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} dx$$

$$b) \left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} \right| = \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{2x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \quad (2)$$

$$c) \lim_{a \searrow 1/2} \int_a^5 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx \quad \begin{matrix} y=2x-1 \\ dx = \frac{dy}{2} \end{matrix} \lim_{a \searrow 1/2} \frac{1}{2} \int_{2a-1}^9 \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= \lim_{a \searrow 1/2} \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{y} \Big|_{2a-1}^9 \quad (4)$$

$$= \lim_{a \searrow 1/2} (3 - \sqrt{2a-1})$$

$$= \lim_{a \searrow 1/2} 3 - \lim_{a \searrow 1/2} \sqrt{2a-1} \quad , \text{ da beide Grenzwerte existieren }$$

$$= 3 < \infty$$

$$d) \int_{1/2}^5 \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}} dx \quad \text{konvergent nach Vergleichskriterium und b) \& c)}$$

(1)

Aufgabe 5

$$f(t) = \int_0^t \sin^2(x) dx \quad t \in (0, \pi)$$

a) zeige f ist streng monoton wachsend:

mit HDI folgt

$$f'(t) = \sin^2(t) > 0 \quad \text{für } t \in (0, \pi)$$

$\Rightarrow f$ streng mon. wachsend, d.h. f Umkehrfkt. h

b)

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x) + \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad I &= \int_0^t \sin^2(x) dx = \underbrace{-\sin(x) \cos(x)}_{\text{part. Int.}} \Big|_0^t + \int_0^t \underbrace{\cos^2(x)}_{1 - \sin^2(x)} dx \\ &= -\sin(t) \cos(t) + t - \int_0^t \sin^2(x) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2I = -\sin(t) \cos(t) + t$$

c) Satz über Abl. der Umkehrfkt

f ist diffbar auf $(0, \pi)$ und streng monoton

$$\text{mit } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow h \text{ ist diffbar in } y_0 = \frac{\pi}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

Aufgabe 6

Um die DGL auf separierte Form $u'(x) = g(u(x)) \cdot f(x)$ zu bringen, müssen wir zunächst ausschließen, daß $\sinh(u(x)) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $u(x) = 0$. Aber $u(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$, da sonst

$$\textcircled{2} \quad \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} \underbrace{\sinh(0)}_{=0} u'(x) = 0 \neq \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} \quad \forall x \in I.$$

Damit ist die separierte Form

$$u'(x) = \frac{1}{\sinh(u(x))} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt{1-x}}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{\sinh(u(x))} \frac{1}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sinh(u(x))} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ Wegen $\frac{1}{\sinh(y)} = g(y) \neq 0$ für $y > 0$, ist nach Separation der Variablen die Lösung gegeben durch

$$\textcircled{1} \text{ Grenzen } \int_1^{u(x)} \sinh(y) dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$\textcircled{2} \quad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$\textcircled{2} \quad \cosh(u(x)) - \cosh(1) \qquad \qquad \qquad \operatorname{arcsin}(x) - \underbrace{\operatorname{arcsin}(0)}_{=0}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow u(x) = \operatorname{arccosh}(\operatorname{arcsin}(x) + \cosh(1))$$

$\boxed{\Sigma_6 = 11}$ ist Lösung des AWP.