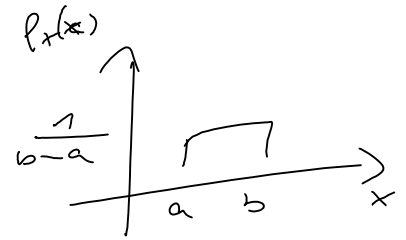


2.1a) X heißt gleich- oder rechteckverteilt wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Unterscheide 3 Fälle: $x < a$ $a \leq x \leq b$ $x > b$

$$x < a: \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 0$$

$$a \leq x \leq b: \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

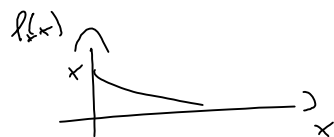
$$x > b: \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

b) X heißt exponentialverteilt, wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

2 Fälle:

$$x < 0, x \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^x \dots dt = \int_0^x 0 dt = 0$$

2. Teil

$x < 0$

$$x < 0: \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$x \geq 0: \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 + [-e^{-\lambda t}]_0^x \\ = -e^{-\lambda x} - (-1) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

1.2

Leistung eines Signals:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \frac{1}{\lambda} = 10^{-11} \Rightarrow \lambda = 10^{11}$$

$$\text{Erwartungswert: } E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \text{Mittlere (erwartete) Leistung: } \frac{1}{\lambda}$$

Leistung des (konst.) Rauschens $n = 10^{-13}$

$$SNR = \frac{x}{n}$$

gesucht: $P(SNR > 3)$

$\uparrow$ z.B. min. Empfindlichkeit eines Empfängers
Anteil der Zeit in der das empfangene Signal
delektiert werden kann

$$P(SNR > 3) = P\left(\frac{x}{n} > 3\right) = P(x > 3n) = 1 - P(x \leq 3n) \\ = 1 - F_X(3n) \stackrel{1.1b}{=} 1 - (1 - e^{-10^{11} \cdot 3n}) \\ = e^{-10^{11} \cdot 3n} = 0,97$$

1.3

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) 2 Bedingungen

$$1.) f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$2.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{zu 1.) } x^2 \geq 0 \quad (1-x) \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \Rightarrow \lambda \geq 0$$

$$\begin{aligned} 2.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^1 \lambda x^2 (1-x) dx = \lambda \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \lambda \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= \lambda \frac{1}{12} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda = 12 \quad (\geq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) F_x(x) &= 12 \cdot \int_0^x t^2 (1-t) dt \\ &= [4t^3 - 3t^4]_0^x = 4x^3 - 3x^4 \\ x > 1: F_x(x) &= 0 + \underbrace{[4t^3 - 3t^4]_0^1}_1 + \int_1^x 0 dt \end{aligned}$$

$$c) \text{ gesucht: } P(x \leq \frac{1}{2}) = F_x\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,3125$$

$$E(x) = \frac{3}{5}$$

$$P(x \leq E(x)) = F_x\left(\frac{3}{5}\right) = 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 3 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \approx 0,4752$$