V 2

Freitag, 29. Oktober 2010
13:43

2.3.2 Absolut stetige Verteilungen

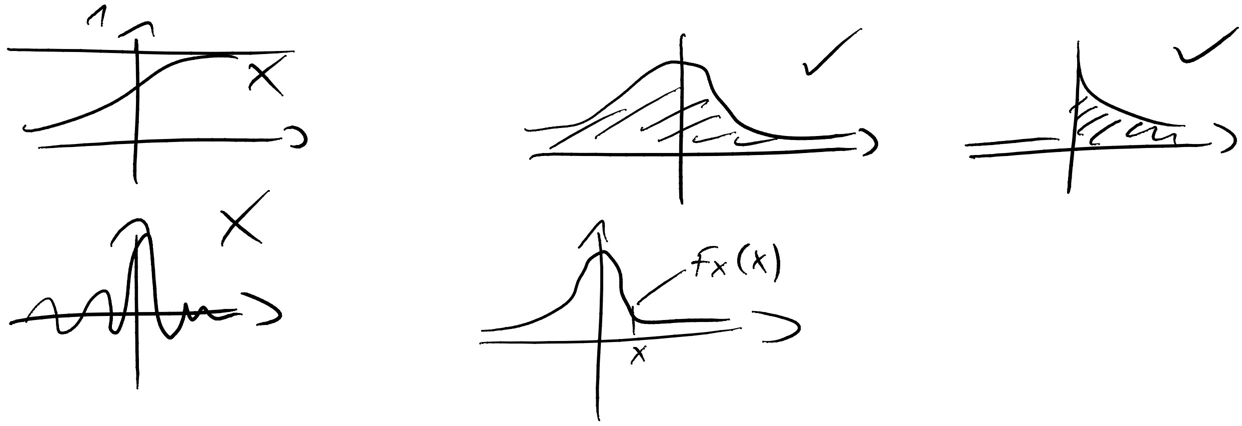
D. 2.3.5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrierbar mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

ZV'e X heißt abs-stetig, wenn

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f heißt (Vert.)Dichte (pdf)

Es gilt: $f_X(x) = F_X'(x)$ in Stetigkeitspkt von f.



B. 2.3.6

a) X heißt normalverteilt (Gauß-verteilt)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \boxed{\begin{matrix}\mu \in \mathbb{R}\\ \sigma > 0\end{matrix}}$$

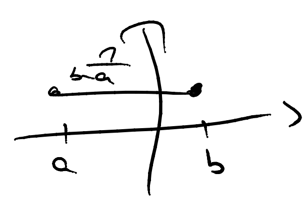
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$ wobei

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

(rechteckverteilt)

b) X heißt gleichverteilt auf [a,b], wenn

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \frac{1}{b-a}\,\Pi_{[a,b]}(x)$$



$X \sim R[a,b]$

$$\Pi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

rechtangular/unified distributed

c) X heißt exponentialverteilt $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $\lambda > 0$, wenn

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

d) X heißt Γ-Verteilt, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$, wenn

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \text{ insbesondere } \Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

Spezialfälle: $\alpha = 1 \rightarrow \mathcal{E}xp(\lambda)$

$\alpha = n \in \mathbb{N} \rightarrow$ Erlang-Verteilung $\mathcal{E}rl(n, \lambda)$

e) X heißt Rayleigh-verteilt, wenn

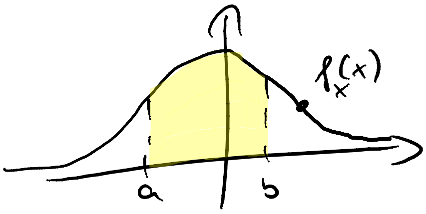
$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Amplitudenabschwächung bei
Multi-path-Arrivals ohne LoS

f) X heißt Nakagami-m-verteilt, wenn

$$f(x) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\alpha}\right)^m x^{2m-1} e^{-mx^2/\alpha} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Fading auf Funkkanälen



$X \sim f_X(x)$

$$P(a < X \leq b) = P(X \in (a, b])$$
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\, dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

(Integrationsgrenzen dabei oder nicht egal)

2.3.3 Erwartungswerte und Momente

$X \sim U(\{1,\dots,6\})$

$E(X) = 1\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} = 3{,}5$

$Y = X^2, \quad g(x) = x^2$

$E(Y) = E(X^2) = E(g(X))$

$= 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} \dots + 6^2\frac{1}{6} = 15{,}1\overline{6}$

D. 2.3.7: g Fkt.

a) X diskrete ZV'e mit Träger $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
und Zähldichte f, d.h. $f(x_i) = P(X = x_i)$

$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f(x_i)$

falls $\sum_{i=1}^{\infty} |g(x_i)| f(x_i) < \infty$ heißt E-Wert von g(X)

b) abs. stetige ZV'e mit Dichte f

$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)\, dx < \infty$

heißt E-Wert von g(X)

$$E(X) = ? = \begin{cases} \sum x_i f(x_i) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty} x f(x)\, dx & \text{abs-stetig} \end{cases}$$

$Y = g(X) \qquad X \sim f_X \qquad Y \sim f_Y$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$ Trafo-Satz für E-Werte

---

D. 2.3.8: X, Y ZV'e

$\boxed{\sum p_k z^k = E(z^X)}$

a) $E(X^k), k \in \mathbb{N}_0$, heißt k-tes Moment

$E((X-EX)^k)$ k-tes zentrales Moment

b) $V(X) = E((X-EX)^2)$ Variance (Varianz / Streuung)

c) $Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$ heißt Kovarianz von X u. Y

$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ Korrelation von X, Y

P. 2.3.9 Eigenschaften

a) $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$ $a,b \in \mathbb{R}$ (Linearität)

b) $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ (Monotonie)

c) $P(|X| \geq c) \leq \frac{E(|X|)}{c}$ $\forall c>0$ (Markov-Ugl.)

$P(|X-EX| \geq c) \leq \frac{V(X)}{c^2}$ $\forall c>0$ (Chebychev-Ugl.)

d) $Cov(X,X) = V(X)$ $Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - (E(X)E(Y))$

$V(X) = EX^2 - (EX)^2$

e) $V(aX+b) = a^2 V(X)$

f) $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$

g) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + c, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j + d\right)$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \, Cov(X_i, Y_j)$

h) $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)\cdot V(Y)}$ (Cauchy-Schwarz Ugl.)

also $|Corr(X,Y)| \leq 1$

$|Corr(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists a,b : P(Y = aX+b) = 1$

Markov-Ugl:

$$P(|x| \geq c) \leq \frac{E(|x|)}{c}$$

Denn: $P(|x| \geq c) = E(\mathbb{1}_{[c,\infty)}(|x|))$

Es gilt: $\underbrace{c \cdot \mathbb{1}_{[c,\infty)}(|x|)}_{\begin{cases} 0 & |x| < c \\ c & |x| \geq c \end{cases}} \leq |x|$

also $\mathbb{1}_{[c,\infty)}(|x|) \leq \frac{|x|}{c}$