

Aufgabe 2.4

Gegeben: $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = \frac{1}{5}$

$$P(D|C) = 1$$

$$P(E|D) = 1$$

$$P(B|A) = P(B|B) = 0$$

$$P(A|A) = P(C|A) = \alpha$$

a) gesucht: Übergangsw'keiten $P(x_j|x_i)$

Es gilt allgemein:

$$\sum_j P(x_j|x_i) = 1 \quad \forall i \quad (\hat{=} \text{Spaltensumme} = 1)$$

Hier speziell:

$$P(x_j) = \sum_i P(x_j|x_i) \cdot P(x_i) \stackrel{!}{=} P(x_i) = \frac{1}{5} \quad \forall i,j$$

wegen Gleichverteilung

$$\Rightarrow \sum_i P(x_j|x_i) = 1 \quad \forall j \quad (\hat{=} \text{Zeilensumme} = 1)$$

$x_j \backslash x_i$	A	B	C	D	E
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
B	0	0	0	0	1
$[P(x_j x_i)] = C$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
D	0	0	1	0	0
E	0	0	0	1	0

1. gegeben

2. Spaltensumme

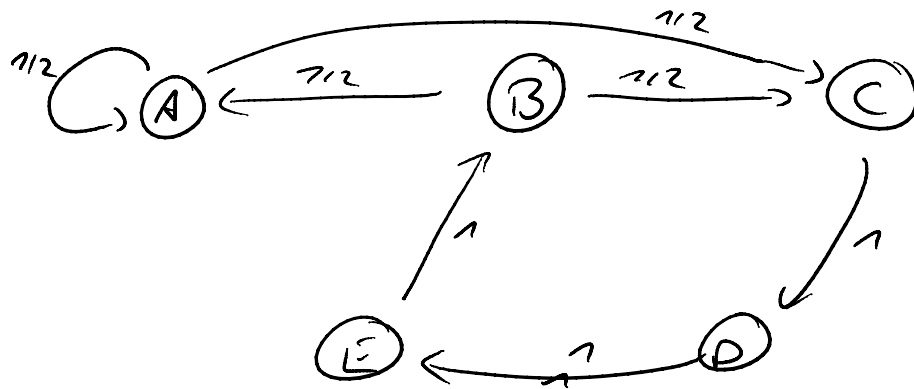
3. Zeilensumme

4. Spaltensumme

5. gegeben + Spaltensumme

6. Zeilensumme

b) Gesucht: Zustandsdiagramm

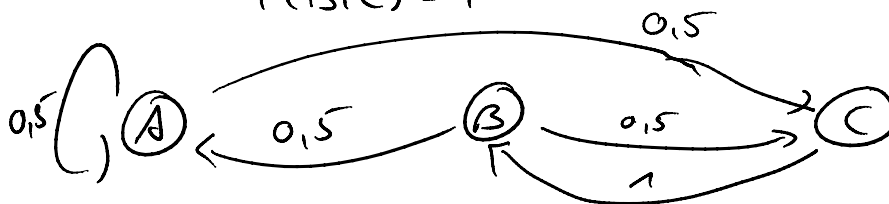


c) Gesucht: Entscheidungsgehalt $H(x)$
bedingte Entropie $H(x(k) | x(k-1))$

$$H(x) = - \sum_i P(x_i) \log P(x_i) = -5 \cdot \frac{1}{5} \log \frac{1}{5} = \log 5 = 2,32 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

$$\begin{aligned} H(x(k) | x(k-1)) &= - \sum_i \sum_j P(x_i, x_j) \cdot \log (P(x_j | x_i)) \\ &= - \sum_i \sum_j P(x_i) P(x_j | x_i) \log (P(x_j | x_i)) \\ &= - (4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \log 1) \\ &= 0,4 \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \end{aligned}$$

d) Gesucht: Zustandsdiagramm für
 $P(B|C) = 1$



e) Gesucht: $P(A), P(B), P(C)$
 $H(x), H(x(k) | x(k-1))$

Es gilt: $[P(x_j | x_i)] =$

	A	B	C
A	1/2	1/2	0
B	0	0	1
C	1/2	1/2	0

Es gilt: $[P(x_j|x_i)] =$

	A	B	C
A	$1/2$	$1/2$	0
B	0	0	1
C	$1/2$	$1/2$	0

$\Rightarrow$ mit $P(x_j) = \sum_i P(x_j|x_i) \cdot P(x_i)$:

$$P(A) = \frac{1}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(B) \Rightarrow P(A) = P(B)$$

$$P(B) = 1 P(C)$$

$$P(C) = \frac{1}{2} P(A) + \frac{1}{2} P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$$

$$\Rightarrow H(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichverteilung}}}{\text{ld}(3)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ziffern}}}{1,58 \text{ bit}}$$

$$H(x(k)|x(k-1)) = -\left(4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ld}\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \text{ld}(1)\right) = \frac{2}{3} \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}}$$

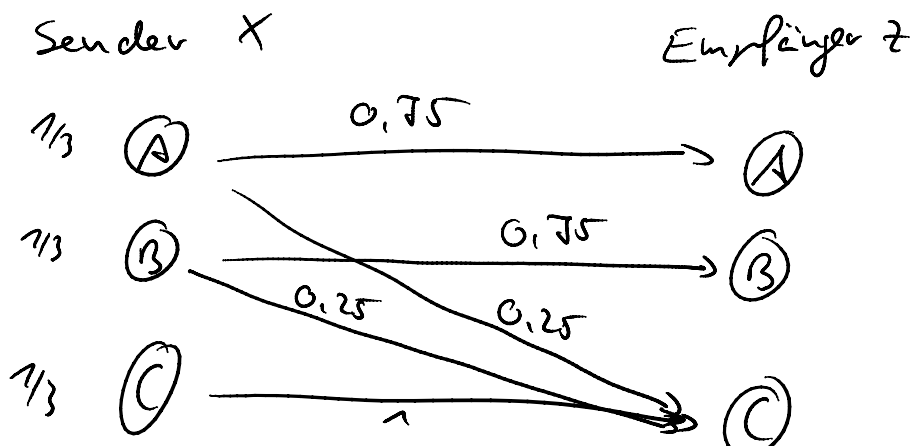
f) Resultat: Transformation

Gegeben: $P(z=C|x=A) = 0,25$

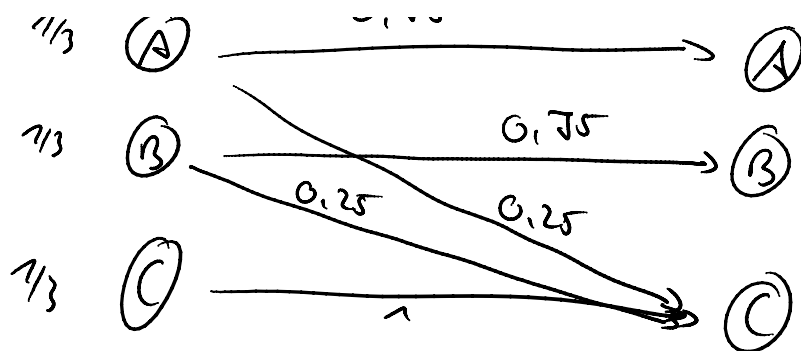
$P(z=C|x=B) = 0,25$

„Rest“ wird korrekt empfangen

Kanal



Oh - noooo



$$\Rightarrow P(z=A) = P(x=A) \cdot P(z=A|x=A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(z=B) = P(x=B) \cdot P(z=B|x=B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(z=C) = 1 - P(z=A) - P(z=B) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(z) = -\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2 \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\text{bit}}{\text{symbol}}$$

$z_i \backslash x_i$	A	B	C
A	$\frac{3}{4}$	0	0
$P(z_i x_i) = B$	0	$\frac{3}{4}$	0
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\Rightarrow H(z|x) = -\left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \log_2 \left(\frac{3}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1 \log_2(1)\right) = 0,54 \frac{\text{bit}}{\text{symbol}}$$

$$\Rightarrow T(z,x) = H(z) - H(z|x) = 1,5 \frac{\text{bit}}{\text{symbol}} - 0,54 \frac{\text{bit}}{\text{symbol}} = 0,96 \frac{\text{bit}}{\text{symbol}}$$

A.2.3

a) Gegeben: $B = 5 \text{ MHz}$ $\frac{S}{N} = 30 \text{ dB} = 10^{\frac{30}{10}}$

Gesucht: Kanalkapazität C

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) = 5 \text{ MHz} \log_2(1 + 10^3) = 49,84 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

b) Gesucht: Anzahl N_1 „paralleler Quellen“

Entropie der Bildquelle:

$$H(x) = -10 \cdot \frac{1}{20} \lg \frac{1}{20} = \lg 10 = 3,32 \frac{\text{bit}}{\text{Bildelement}}$$

Übertragungsrate der Bildelemente:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= 320 \frac{\text{Bildelemente}}{\text{Zeile}} \cdot 576 \frac{\text{Zeilen}}{\text{Bild}} \cdot 25 \frac{\text{Bilder}}{\text{s}} \\ &= 10.368.000 \frac{\text{Bildelemente}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Informationsfluss der Quelle

$$R = \frac{H(x)}{\Delta t} = \tilde{R} H(x) = 10368000 \frac{\text{Bildelem.}}{\text{s}} \cdot 3,32 \frac{\text{bit}}{\text{Bildelem.}} = 34,42 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

Kapazitätsbedingung:

$$\begin{aligned}N_1 \cdot R &\leq C \\ \Rightarrow N_1 &\leq \frac{C}{R} = \frac{49,84 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}}{34,42 \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}} = 1,44\end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1 = 1$$