KGÜ 2

Dienstag, 2. November 2010
15:40

A3F02

a) $\frac{d^2}{d\varphi^2}\sin(m\varphi) = -m^2\sin(m\varphi)$

$\frac{d^2}{dz^2}\sinh(kz) = +k^2\sinh(kz)$

b) Rotationssymmetrie

$\varphi_{km}(\rho=\rho_0, \underset{\text{beliebig}}{\varphi}, z=+b) = k_1 = \text{konst.}$

$\Rightarrow (m=0)$ keine φ-Abhängigkeit

$\varphi(\rho)$ nicht singulär für $\rho \to 0$

($\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ physikalische Größe $\to$ endl.)

c) $\varphi_1 = \sum_{L=1}^{\infty} a_i J_0(k_L\rho)$ Fourier-Bessel-Reihe

Randbedingung bei $\rho = a$: $\varphi(\rho=a) = 0$

$\Rightarrow J_0(k_L a) = 0$ mit $u_L = k_L a$ ist L-te Nullstelle von J_0

a) $s_m = \sin(m\varphi)$

$h_k = \sinh(kz)$ $h_k(z-b) = \sinh(k(z+b))$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{df_{km}(\rho)}{d\rho}\right) + \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)f_{km}(\rho) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\cdot\frac{df_{km}(\rho)}{d\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}f_{km}(\rho) + \frac{1}{\cancel{\rho}}\cdot\cancel{\rho}\cdot\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{f_{km}(\rho)}{d\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\rho^2}\frac{f_{km}(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}f_{km}(\rho) + \left(k^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right)f_{km}(\rho) = 0$$

$m = 1, 2, 3, \dots \quad k_z \neq 0$

$$\Rightarrow f(\rho) = f_{mk_z}(\rho) = E_{mk_z} J_m(k_z\rho) + F_{mk_z} N_m(k_z\rho)$$

b) $$\phi_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{km}(\rho, \varphi, z)$$

$$= \sum_m \sum_k f_{km}(\rho)\, g_m(\varphi)\, h_k(z)$$

$$= \sum_m \sum_k \left[E_{mk_z} J_m(k_z\rho) + F_{mk_z} N_m(k_z\rho)\right] \cdot \sin(m\varphi) \sinh(kz)$$

$m = 0$ da keine φ-abhängigkeit

a) 1) $g_m = A_m' \sin(m\varphi) + B_m' \cos(m\varphi) \qquad (m \neq 0)$

2.) $g_0 = A_0' \varphi + B_0' \qquad (m = 0)$

3.) $h_k = c_k' \sinh(k(z-b)) + d_k' \cosh(k(z-b)) \qquad (k \neq 0)$

4.) $h_0 = C_0' (z-b) + D_0' \qquad (k = 0)$

5.) $f_{km} = E_{km}' J_m(k\rho) + F_{km}' N_m(k\rho) \qquad (k \neq 0, m \text{ beliebig})$

6.) $f_{0m} = E_{0m}' \rho^m + F_{0m}' \rho^{-m} \qquad (m \neq 0, k = 0)$

7.) $f_{00} = E_{00}' + F_{00}' \ln\rho \qquad (m = 0, k = 0)$

b) Rotationssymmetrie (φ = konst. auf Deckel)

$$\varphi_{km}(\rho = \rho_0, \varphi, z = \pm b) = U_1 = \text{konst.}$$

$\Rightarrow g_m(\varphi) = \text{konst.} \quad \Rightarrow m = 0$

keine φ-abhängigkeit

$\Rightarrow$ (1) und (6) entfallen

in (2) muss $\underline{A_0' = 0}$ sein

φ nicht singulär für $\rho \to 0$

$\Rightarrow F_{km}' = 0, \quad F_{00}' = 0$

$g_0 = B_0'$

$$\varphi_1 = \sum \{ c_k \sinh(k(z-b)) +$$

J_0 – " – 0

$$\varphi_1 = \sum_{k\neq 0} \{ c_k \sinh(k(z-b)) + d_k \cosh(k(z-b)) \} \cdot J_0(k\rho)$$
$$+ \underbrace{C_0(z-b)}_{h_0} + \underbrace{D_0}_{l_{00}}$$

c) $\varphi_1 = 0$ für $\rho = a$

$\Rightarrow \boxed{J_0(ka) = 0}$ mit $v_L = k_L \cdot a$ ist L-te Nst von J_0

$\boxed{C_0 = 0 \quad D_0 = 0}$

d) $z = b \Rightarrow \varphi = U_1$

$$U_1 = \sum_{l=1}^{\infty} D_L \cdot J_0(k_l \rho)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^a U_1 J_0(k_n \rho)\, d\rho}_{= U_1 \frac{a}{k_n} J_1(k_n a)} = \sum_{L=1}^{\infty} D_L \underbrace{\int_0^a J_0(k_L \rho) J_0(k_n \rho)\, \rho\, d\rho}_{\underbrace{\frac{1}{2}\delta_{Ln} a^2 [J_1(k_L a)]^2}_{D_n \cdots}}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_n = \frac{2 U_1}{k_n a J_1(k_n a)}}$$

e) $\Phi_2 = \Phi_1 (b \to -b, U_1 \to U_2, C_L \to S_L)$

f) Grenzbedingungen: bei $z = 0$:

1.) $\varphi_1(z=0) = \varphi_2(z=0)$

2.) $J_{1z}(z=0) = J_{2z}(z=0)$

$\boxed{\mathrm{Div}\, \vec{J} = -\dot{\rho}_F}$ $\qquad \vec{J} = \sigma \vec{E}$

$= 0$ $(\frac{d}{dt} = 0)$ statisch

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

<u>lineare Unabhängigkeit</u> der $J_0(k_L \rho)$

lineare Unabhängigkeit der $J_0(k_L \rho)$

$\Rightarrow$ 1.) + 2.) gelten für jeden Summanden der Reihe

$$1.)\quad \boxed{(G_L + C_L)\sinh(k_L b) = \frac{2(U_1 - U_2)}{k_L a J_1(k_L a)}\cosh(k_L b)}$$

$$2.)\quad \boxed{\begin{aligned}&(\sigma_1 C_L - \sigma_2 \cdot G_L)\cosh(k_L b)\\ &= \frac{2(\sigma_2 U_2 + \sigma_1 U_1)}{k_L a J_1(k_L a)}\sinh(k_L b)\end{aligned}}$$

g) $U_1 = U_2$: $\boxed{C_L = -G_L = \frac{2U_1}{k_L a J_1(k_L a)}\tanh(k_L b)}$

h) $U_1 = -U_2$, : $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_L = G_L = \frac{2U_1}{k_L a J_1(k_L a)}\coth(k_L b)}$$