

13.10.09

GG ET III

ET III

Übung

Robert
Schwann]

oder

Betreuer am Lehrstuhl:

Robert Schwann, Raum 322

schwann@eecs.rwth-aachen.de

Tel.: 80-97577

Michael Gansen, Raum 420

gansen@eecs.rwth-aachen.de

Tel.: 80-97610

oder

Thomas Coenen, Raum 320/319

coenen@eecs.rwth-aachen.de

Tel.: 80-97694

Betreuer bei der Fakultät:

guter
Tutor!
(~geht)

Paul Mols

mols@fb6.rwth-aachen.de

Download von Vorlesungs- und Übungsmaterial

www.eecs.rwth-aachen.de

→ Lehre → Vorl.u. Übungen → ET III → Vorlesungsmaterial

→ Downloadbereich → anmelden → Anmeldung starten

„Leicht oder nicht leicht – das hängt von der
mental. Einstellung ab.“ (Ketov)

13.10.09

Übung

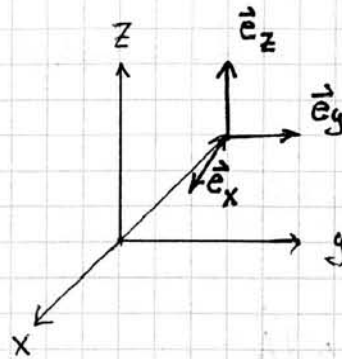
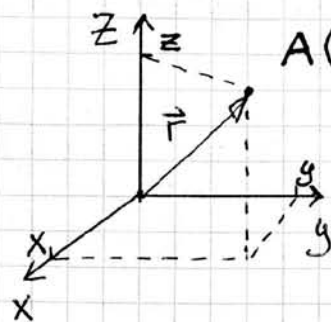
13.10.09

ET III

Einführung in die Koordinatensysteme

1) Kartesische Koordinaten („Legosteine“) (x, y, z)

Aufpunkt
„A“



Ortsvektor : $\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < y < \infty$$

$$-\infty < z < \infty$$

Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind konstant!
(Richtung)

weiterhin : $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$

Skalarfeld: $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$
„Zahl“

z.B. Temperatur im Raum

Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$

$$= F_x(x, y, z) \cdot \vec{e}_x + F_y(x, y, z) \cdot \vec{e}_y + F_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_z$$

→ $\mathbb{R}$ die 1. Dimensionalität im Raum

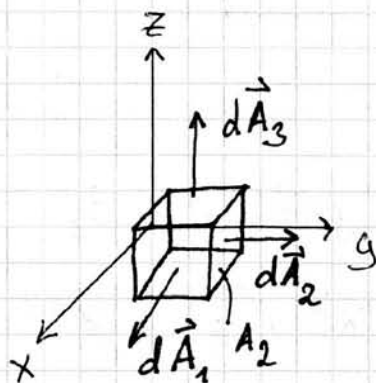
zur Kenntnis:

13.10.09
Übung

Wegenelement: $d\vec{r} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$
($=d\vec{s}$)

(wird z.B. benötigt für $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{s}$)

Flächenelemente:



$$d\vec{A}_1 = dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x$$

$$d\vec{A}_2 = dx \cdot dz \cdot \vec{e}_y$$

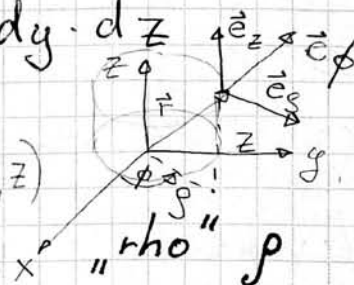
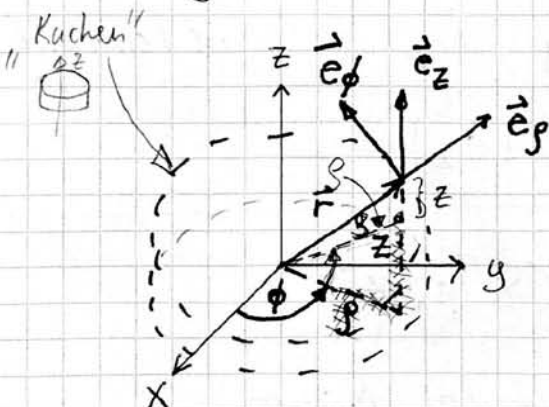
$$d\vec{A}_3 = dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z$$

$d \hat{=}$
unendlich
klein, infinitesimal
klein

Vgl.
Normalform
einer
Ebene

Volumenelement: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

2) Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z)



"phi" φ, ϕ
besser

x, y, z

ρ, ϕ, z

← kürzester Abstand von der
z-Achse

Achtung
Schiebweise



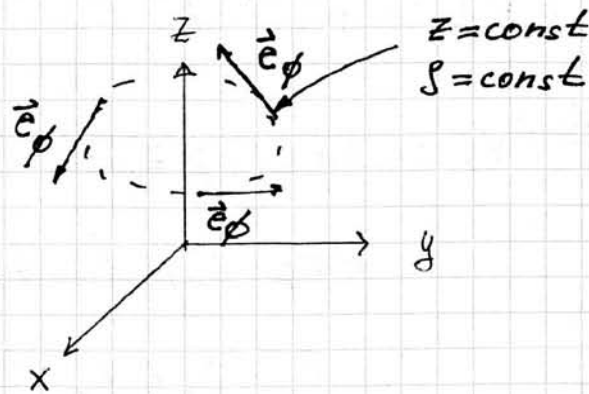
Anmerkung: die Einheitsvektoren liegen tangential
an "Koordinatenlinien".

13.10.09

ET III

rechte Hand
Regel

Daumen $\hat{=}$ z-Achse
4 Finger $\hat{=}$ Richtung $\vec{e}_\phi$



$\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_\rho$
nicht konstant

Koordinatenlinien bzgl. ρ :

Radialstrahlen $\perp$ z-Achse

Koordinatenlinien bzgl. ϕ :

Kreise um die z-Achse mit Radius ρ

Koordinatenlinien bzgl. z:

Geraden parallel zur z-Achse

Ortsvektor: $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z$

} kein $\vec{e}_\phi$!

ändert seine Richtung mit ϕ

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

(dabei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Definitionsbereich: $0 \leq \rho < \infty$

eindeutiger Winkel: $0 \leq \phi < 2\pi$
 $-\infty < z < \infty$

Einheitsvektoren:

$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$

ändern ihre Richtung abhängig von ϕ

Skalarfeld: $f(\vec{r}) = f(\rho, \phi, z)$

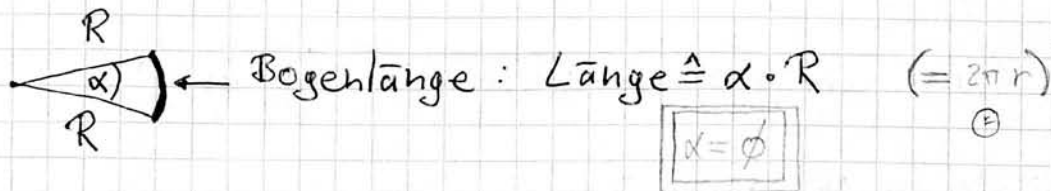
13.10.09

Übung

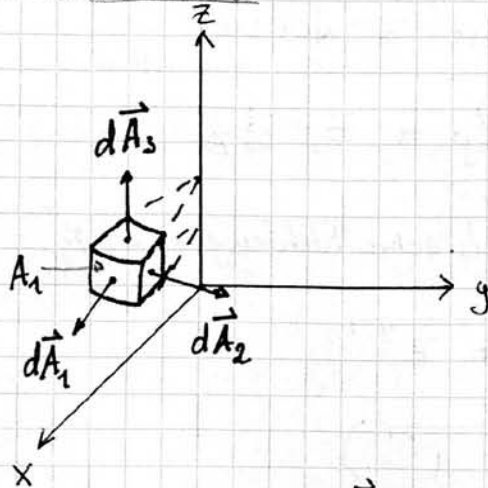
Vektorfeld:
$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_\rho + F_\phi(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_\phi + F_z(\rho, \phi, z) \cdot \vec{e}_z$$

zur Kenntnis:

Wegelement: $d\vec{r} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi + dz \cdot \vec{e}_z$



Flächenelemente:



Allg: $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_n$

infinitesimaler
Flächeninhalt

Normalenvektor

$$d\vec{A}_1 = (\rho \cdot d\phi) \cdot dz \cdot \vec{e}_\rho$$

$$d\vec{A}_2 = d\rho \cdot dz \cdot \vec{e}_\phi$$

$$d\vec{A}_3 = (\rho \cdot d\phi) \cdot d\rho \cdot \vec{e}_z$$

Volumenelement: $dV = \underbrace{(\rho \cdot d\phi)}_{R \cdot L} \cdot d\rho \cdot dz$

13.10.09

ET III

Start
Kleingruppe
10 ab



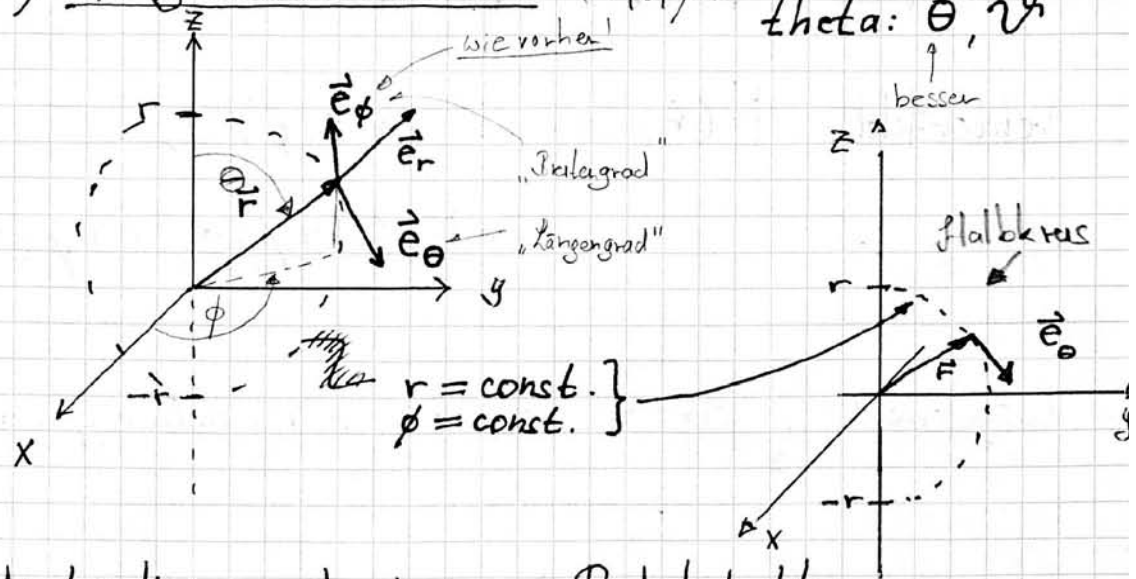
20.10.09

ET III

Einhetsvektoren

alle 2!

3) Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ)



Koordinatenlinien bzgl. r : Radialstrahlen
vom Ursprung aus

bzgl. θ : Halbkreise um den Ursprung,
Radius r

bzgl. ϕ : Kreise um die z -Achse,
Radius $\rho = r \cdot \sin \theta$

Ortsvektor: $\vec{r} = r \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{\text{Richtung hängt von } \phi, \theta \text{ ab}}$

$$|\vec{r}| = r$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{für Eindeutigkeit}$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

Einhetsvektoren: $\underbrace{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi}_{\text{hängen von } \theta, \phi \text{ ab}} \quad \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\text{hängt von } \phi \text{ ab}}$
hängen nicht von r ab!

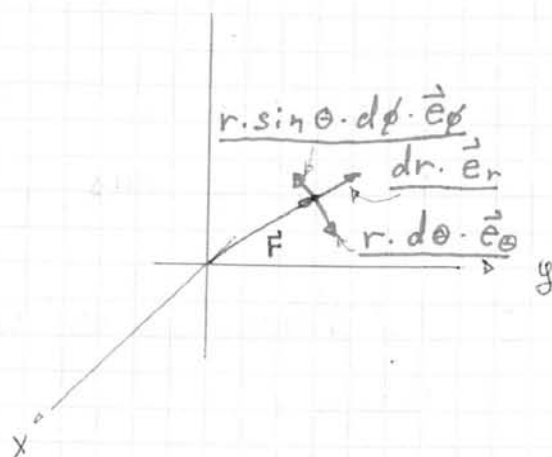
Skalarfeld: $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$

20.10.09

ET III

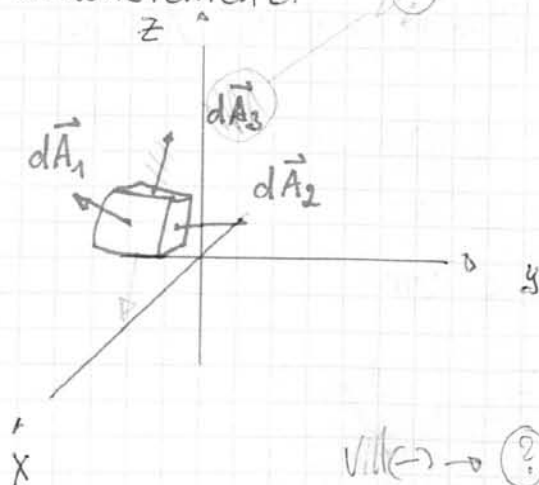
Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$
(Vgl. $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)
 $+ F_\theta(r, \theta, \phi) \vec{e}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi) \vec{e}_\phi$

Wegelement: $d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + (r \cdot d\theta) \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi$



Volumenelement: $dV = dr \cdot (r \cdot d\theta) \cdot (r \cdot \sin \theta \cdot d\phi) \stackrel{=J}{=}$
(Vgl. $dV = dx \cdot dy \cdot dz$)

Flächenelement:



$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_r$$

$$d\vec{A}_1 = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_r$$

Voll $\rightarrow$ $\textcircled{?} \rightarrow d\vec{A}_2 = r \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\theta$

$$d\vec{A}_3 = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\phi$$

2010.09 Aufgabe 1: Transformation

Et III

a)

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{s} \cdot \vec{e}_\phi$$

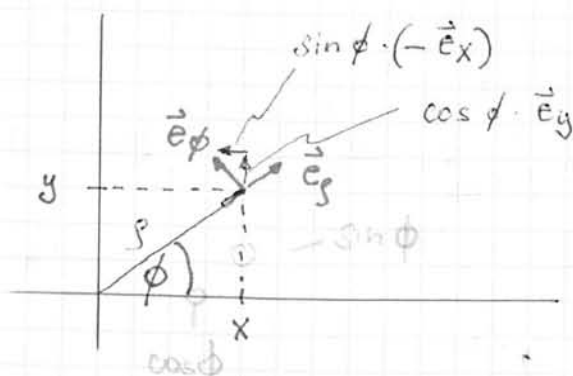
aus
Formelsammlung!

$$B_{1\phi}(\vec{r}) = \frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \cdot \vec{e}_x + \cos \phi \cdot \vec{e}_y$$

$$\boxed{s = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

In der Klausur
nicht herleiten!
(Formelblatt)



$$= \cos \phi \vec{e}_y + \sin \phi \cdot (-\vec{e}_x)$$

Betrachte einen Aufpunkt $A(x, y, 0)$ in der x - y -Ebene.

$$\text{aus Formelsammlung} \left\{ \vec{e}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{e}_y \right.$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y \right) = \frac{\vec{e}_y \cdot x - \vec{e}_x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

b) Kugelkoordinaten: $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$
 $\Leftrightarrow \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$
 (denn $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$)

20.10.09

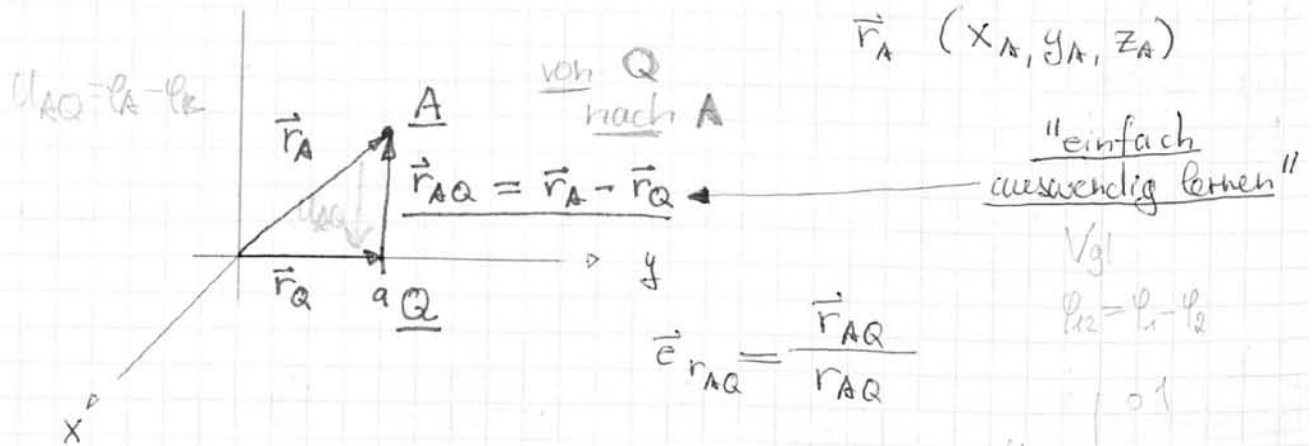
ET III

$$\Rightarrow \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c)

Vgl. Coulomb Kraft

$$\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{e}_{r_{AQ}}}{r_{AQ}^2} = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} \quad \text{für } \vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$$



In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_Q = x_Q \cdot \vec{e}_x + y_Q \cdot \vec{e}_y + z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_A - x_Q) \cdot \vec{e}_x + (y_A - y_Q) \cdot \vec{e}_y + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z$$

$$\stackrel{\text{hier}}{=} x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

20.10.09

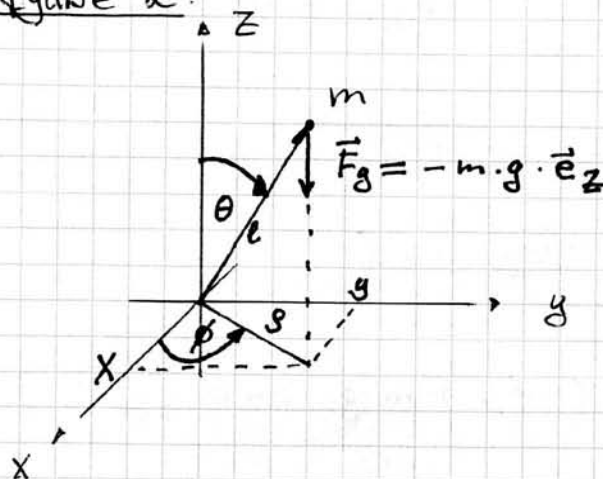
ET III

$$\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{x_A \cdot \vec{e}_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{[x_A^2 + (y_A - a)^2 + z_A^2]^{3/2}}$$



Die komponentenweise Subtraktion von Ortsvektoren ist im Allgemeinen nur in kartesischen Koordinaten korrekt. (z.B.: $\vec{r}_{Aa} = \vec{r}_A - \vec{r}_a$)

Aufgabe 2:



Allgemein: $\vec{F}_g = F_{g,x} \cdot \vec{e}_x + F_{g,y} \cdot \vec{e}_y + F_{g,z} \cdot \vec{e}_z$

hier: $\vec{F}_g = F_{g,z} \cdot \vec{e}_z$ [Vorteil dieser Schreibweise]
[man muss den Rest nicht mitschreiben]

Ort der Masse m: $\vec{r} = l \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{\text{abh. von } \theta, \phi}$

Da $\vec{e}_r$
Kugelkoord.

Umwandlung von $\vec{F}_g$ in Kugelkoordinaten: $(F_{g,\phi}, F_{g,r}, F_{g,\theta})$
[Alternativ: $\vec{e}_r \leadsto$ Kartesische Koord.]

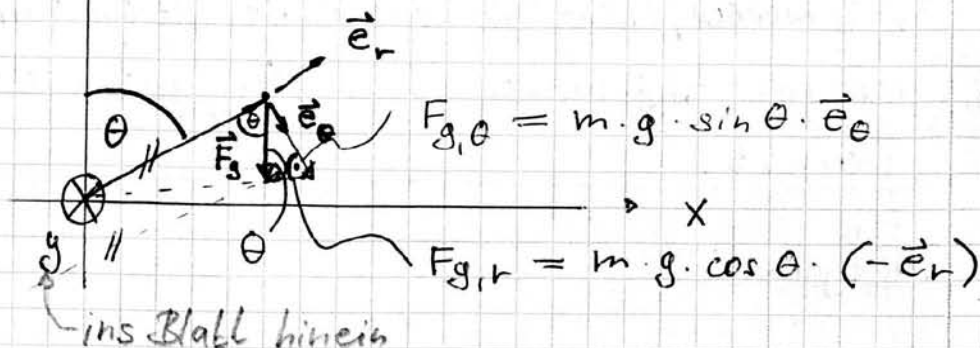
Aus Zylinderkoordinaten: $\vec{e}_\phi \perp \vec{e}_z$

deshalb: $F_{g,\phi} = \underbrace{\vec{F}_g \cdot \vec{e}_\phi}_{=0} = 0$

Projektion von $\vec{F}_g$ auf die
 ϕ -Richtung $\longleftarrow$

20.10.09

ET III

Bestimmung von $F_{g,r}$ und $F_{g,\theta}$ In Klausur
nicht
machen!

aus Formelsammlung:

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos \theta - \vec{e}_\theta \cdot \sin \theta$$

$$\vec{F}_g = -m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_r + m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta$$

Zugkraft auf den Stab:

$$\vec{F}_g = \vec{e}_\theta \cdot F_{g\theta} + \underbrace{\vec{e}_r \cdot F_{gr}}_{=0}$$

$$F_e = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_e = \underbrace{\vec{F}_g \cdot \vec{e}_r}_{\text{Projektion auf } \vec{e}_r\text{-Richtung}} = F_{g,r} = -m \cdot g \cdot \cos \theta$$

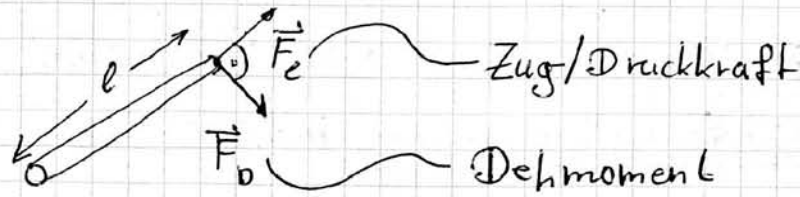
$F_e < 0$ für $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ Druckkraft
(oberhalb der x-y-Ebene)

$F_e > 0$ für $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \Rightarrow$ Zugkraft
(unterhalb der x-y-Ebene)

20.10.09

ET III

Drehmoment im Ursprung:



Drehmoment $\rightarrow L = F_D \cdot l$

Mal anders rum rechnen!

$$\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F}_g \quad (\text{das entspricht } l \cdot F_{g\perp})$$

Beispiel Tür: $L_{\text{wirksam}} = \vec{L} \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{e} = e \cdot \vec{e}_r$$

27.10.09

ET III

$$\vec{L} = (l \cdot \vec{e}_r) \times (-m \cdot g \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_r + m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)$$

Kreuzprodukt distributiv $\rightarrow$

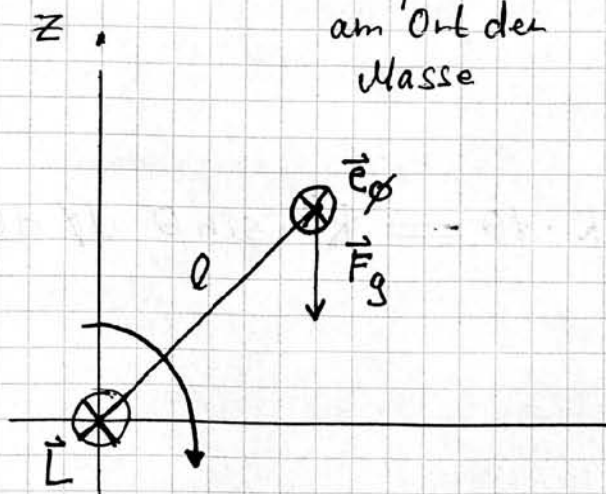
$$= (-l \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta) \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{=0} + (l \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta) \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)}_{=\vec{e}_\phi}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = l \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi$$

am Ort der Masse

XYZXYZ
 $\begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \theta & \phi & \theta & \phi & \theta & \phi \end{pmatrix}$

Alle Vektoren müssen im gleichen System sein. $\Rightarrow$ Umwandeln (Kreuzprodukt)



27.10.09

ET III

Anmerkung:

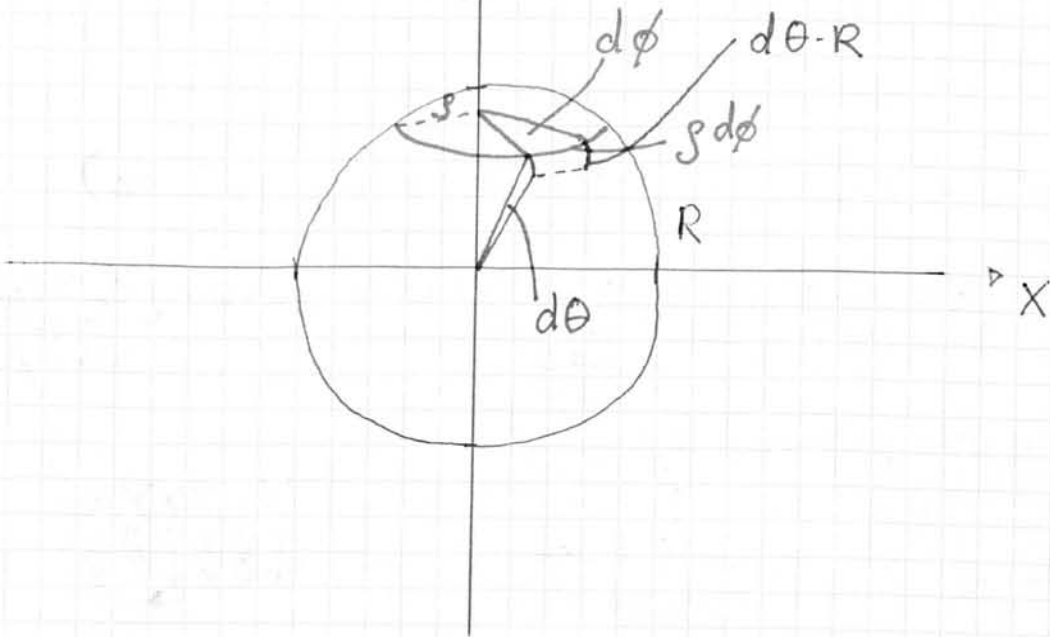
Die Richtung von $\vec{L}$ und der Drehsinn sind im Rechtsschraubensinn miteinander verknüpft.



Aufgabe 3

 σ, ρ
el. Leitfähigkeit

$$[\sigma_e] = \frac{1 \text{ A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot \text{Z}$$



$$dA = \underbrace{R \cdot \sin \theta}_{\rho} \cdot d\phi \cdot R \cdot d\theta = R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\phi \cdot d\theta$$

$$dQ = \sigma_e(\theta) \cdot dA$$

27.10.09

ET III

a)

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} dQ(\theta, \phi)$$

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \sin \theta \cdot \sigma_{eo} \cdot d\theta \cdot d\phi \cdot \cos \theta$$

$$Q_1 = R^2 \sigma_{eo} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \underbrace{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}_{=du}$$

Substitution: $u = \sin \theta$ $\frac{du}{d\theta} = \cos \theta$

Grenzen: $\theta=0 \Rightarrow u=0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1$

$$Q_1 = R^2 \cdot \sigma_{eo} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_{u=0}^1 u \cdot du}_{=\frac{1}{2}} = R^2 \cdot \sigma_{eo} \cdot \pi$$

Einheitenkontrolle

b.) $Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2$ ↑
untere Hälfte

Bereich: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

Grenzen: $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u=1$

$\theta = \pi \Rightarrow u=0$

$$Q_2 = R^2 \cdot \sigma_{eo} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_{u=1}^0 u \cdot du}_{=-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Q_2 = -Q_1 \Rightarrow Q_{\text{ges}} = 0$$

c) Jetzt inhomogene Raumladung $\rho_e = \rho(r)$

27.10.09

ET III

$$Q_{\text{ges}} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_e(r) \cdot dV$$

$$dV = dA \cdot dr$$

$$Q_{\text{ges}} = \frac{\rho_{e0}}{R} \underbrace{\int_{r=0}^R r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}} \cdot \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta}_{\left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi} = 2} \cdot \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$Q_{\text{ges}} = \frac{\rho_{e0}}{R} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = \rho_{e0} \cdot \pi \cdot R^3$$

Einheitenkontrolle

Aufgabe 4

$$\rho_L = \text{const}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \quad \hat{=} \underline{\underline{\text{Vakuum}}}$$

$$[\rho_L] = \frac{\text{As}}{\text{m}} \quad \frac{\epsilon \text{ am}}{\text{Outerer}} \underline{\underline{\text{Ladung!}}}$$

a) Hier liegt der Aufpunkt auf der z-Achse
 $\implies$ Anordnung ist rotationssymmetrisch zur z-Achse.

Gesucht: $\vec{r}_{AQ}$ (Sinnvoll: Zylinderkoordinaten)

Aufpunktvektor: $\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$

Quellpunktvektor: $\vec{r}_Q = a \cdot \underbrace{\vec{e}_\phi}_{= \hat{\phi}(\phi_Q)}$

27.10.09

ET III

$$\rho_Q = a$$

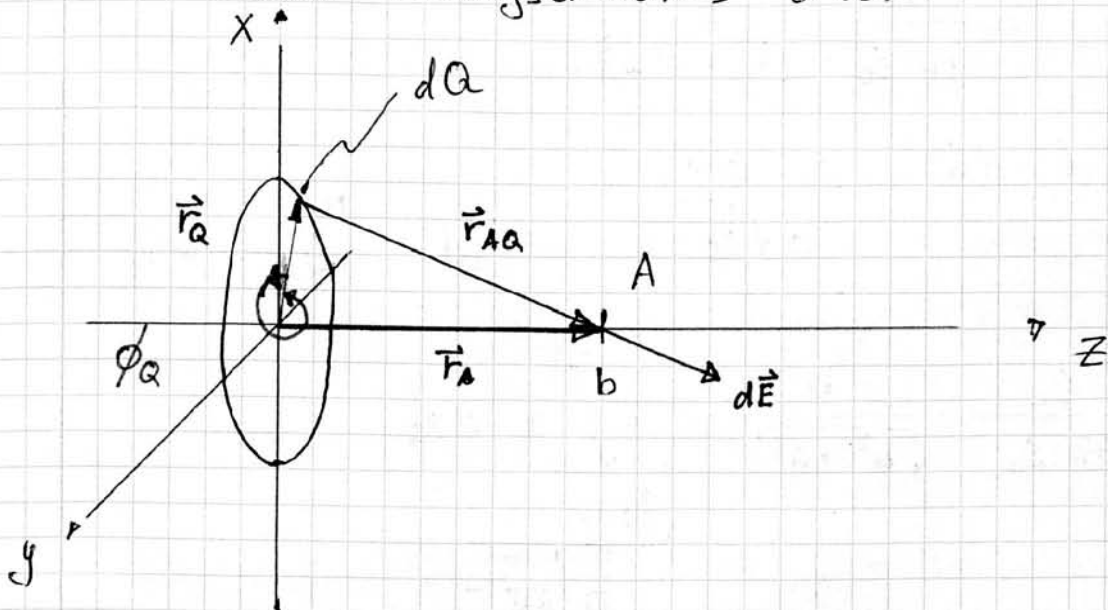
$$z_Q = 0$$

$$\phi_Q = [0, 2\pi)$$

Nur möglich da
Vektoren senkrecht
aufeinander!

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\phi(\phi_Q)$$

b) Betrachte zunächst den Feldstärkebeitrag eines kleinen Ladungselementes dQ .



$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

$$r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = |b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\phi(\phi_Q)|$$

wegen $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\phi$

$$r_{AQ} = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\phi(\phi_Q)}{\sqrt{b^2 + a^2}^3}$$

Aus der Rotationssymmetrie der Anordnung folgt: 27.10.09
ET III

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

nicht vergessen

Die halbe Aufgabe!

$$E_z(0,0,b) = \int \underset{\text{Linienladung}}{dE_z(0,0,b)}$$

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{b}{[b^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

hier ist $dQ = q_L \cdot \underbrace{ds}_{a \cdot d\phi_Q}$



$$E_z = \frac{q_L}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}^3} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} a \cdot d\phi_Q}_{a \cdot 2\pi}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b) = E_z \cdot \vec{e}_z = \frac{q_L}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{ab}{[b^2 + a^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z$$

c) Fernfeld: $b \gg a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{q_L \cdot a \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \underbrace{\sqrt{b^2 + a^2}^3}_{\approx \sqrt{b^2}^3 = b^3}} \cdot \vec{e}_z \quad (b > 0)$$

$$\Rightarrow \vec{E} \approx \frac{q_L \cdot a}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

27.10.09

ET III

Formulierung mit der Gesamtladung Q
des Kreistrings: $Q = 2\pi \cdot a \cdot q_L$

$$q_L = \frac{Q}{2\pi \cdot a}$$

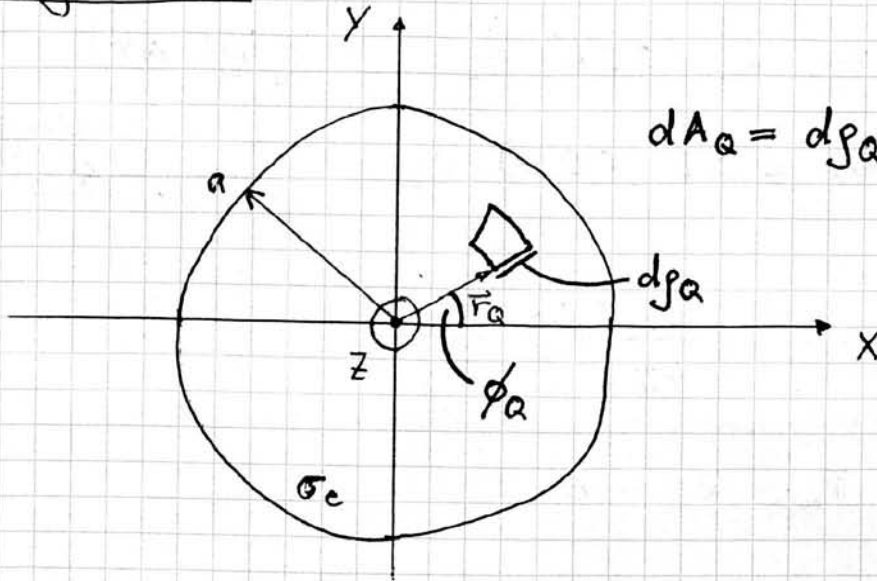
$$\vec{E}(\vec{r}_A) \approx \frac{q_L \cdot a \cdot 2\pi}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot b^2 \cdot 2\pi} \cdot \vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 5

($b > 0$)

bei $b=0$
wird $E=0$
nicht $E \rightarrow \infty$!

$$dA_Q = ds_Q \cdot s_Q \cdot d\phi_Q$$



$$a.) dQ = \sigma_e \cdot dA_Q = \sigma_e \cdot ds_Q \cdot s_Q \cdot d\phi_Q$$

$$\vec{r}_Q = s_Q \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)$$

$$\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - s_Q \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)$$

spielt keine Rolle!

Quellgebiet:

$$0 \leq s_Q \leq a$$

$$0 \leq \phi_Q < 2\pi$$

$$z_Q = 0$$

(MIT RAND)

(„Niederdimensional“)

↳ b) →

$$b.) \quad \vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b) = \int_{\varphi_Q=0}^{\varphi_Q=2\pi} \int_{\varphi_Q=0}^{\varphi_Q=2\pi} \frac{dQ}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d\vec{E}}$
 = aus #4

Aus Rotationsymmetrie folgt:

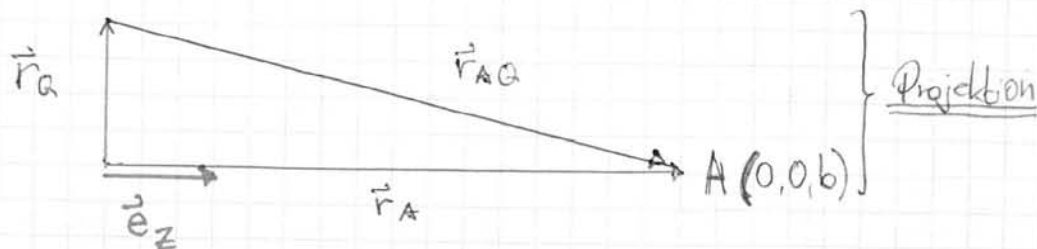
$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{Vgl. A4})$$

$$dE_z(0,0,b) = d\vec{E}(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

} Merke
Vorgehen!

$$= \frac{\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_z}{r_{AQ}^3} \cdot \frac{\sigma_e \cdot \varphi_Q \cdot d\varphi_Q \cdot d\varphi_Q}{4\pi \cdot \epsilon_0}$$

Dabei ist $\vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_z = b$



$$|\vec{r}_A| = b = \vec{r}_{AQ} \cdot \vec{e}_z$$

$$r_{AQ} = \sqrt{s_Q^2 + b^2}$$

$$r_{AQ}^3 = (s_Q^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$$

02.11.09

ET III

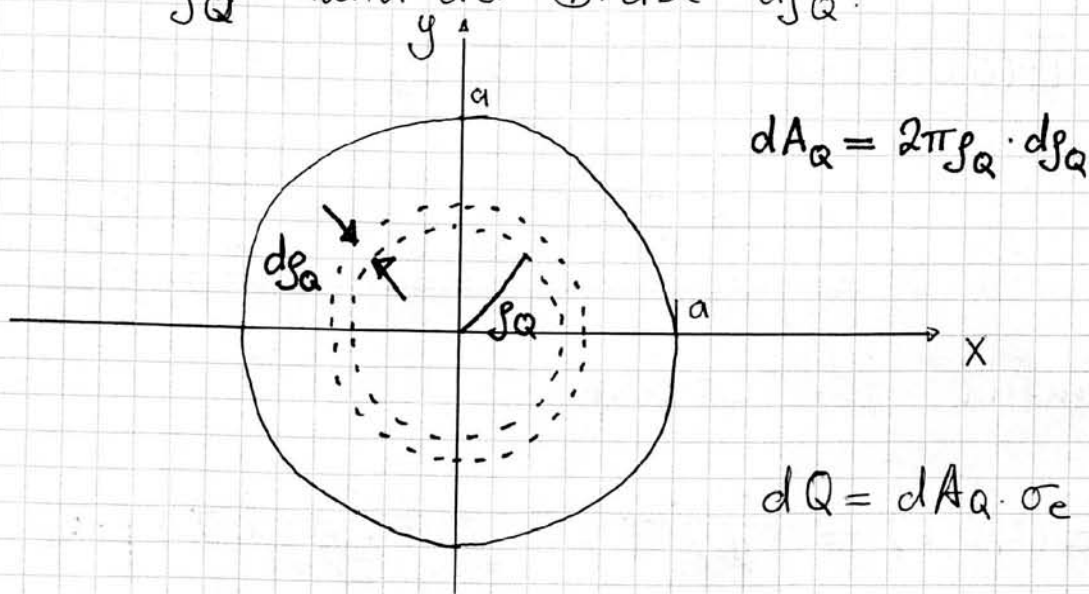
Die Teilintegration über $d\phi_Q$ ist trivial:

$$E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^a \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{[\rho_Q^2 + b^2]^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{=2\pi}$$

Prinzip

von
Cavalieri!

Ansatz mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4b.
angewendet auf einen Kreisring mit dem
Radius ρ_Q und der Breite $d\rho_Q$.



Annäherung von dQ als ringförmige Linienladung
mit dem Radius ρ_Q und dem Ladungsbetrag dq_L .

Erklären
lassen!

$$dQ = \sigma_e \cdot 2\pi \rho_Q d\rho_Q \stackrel{!}{=} \underline{dq_L \cdot 2\pi \cdot \rho_Q} \quad \underline{1d}$$

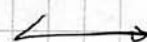
$$\longrightarrow dq_L = \sigma_e \cdot d\rho_Q$$

d.h. ersetze im Ergebnis aus Aufgabe 4b:

$$E_z(0,0,b) \quad \text{durch} \quad \textcircled{d} E_z(0,0,b)$$

$$a \quad \text{durch} \quad \textcircled{d} \rho_Q$$

$$a \quad \text{durch} \quad \rho_Q$$



$$dE_z(0,0,b) = \frac{dq_L \cdot s_Q \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot [s_Q^2 + b^2]^{3/2}}$$

02.11.09

ET III

$$c.) E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{s_Q=0}^a \frac{s_Q \cdot ds_Q}{[s_Q^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$E_z(0,0,b) \stackrel{\text{HINWEIS}}{=} \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0} \left[-\frac{1}{[s_Q^2 + b^2]^{1/2}} \right]_{s_Q=0}^{s_Q=a}$$

$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{b} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\boxed{\sigma_e = \rho_0}$$

Vgl. KGÜ
5d

Fernfeld für $b \gg a$:

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \left[-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} + 1 \right] \cdot \vec{e}_z$$

Der Ansatz $\sqrt{a^2 + b^2} \approx b$
 ist hier zu ungenau! $\Rightarrow \vec{E}(0,0,b) = 0$

Hinweis: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$

02.11.09

Hinweis 2

ET III

$$\approx \frac{\sigma_e}{2 \cdot \epsilon_0} \left[- \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) + 1 \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot a^2 \cdot \pi}{4 \epsilon_0 \cdot b^2 \cdot \pi} \cdot \vec{e}_z$$

Formulierung mit der Gesamtladung:

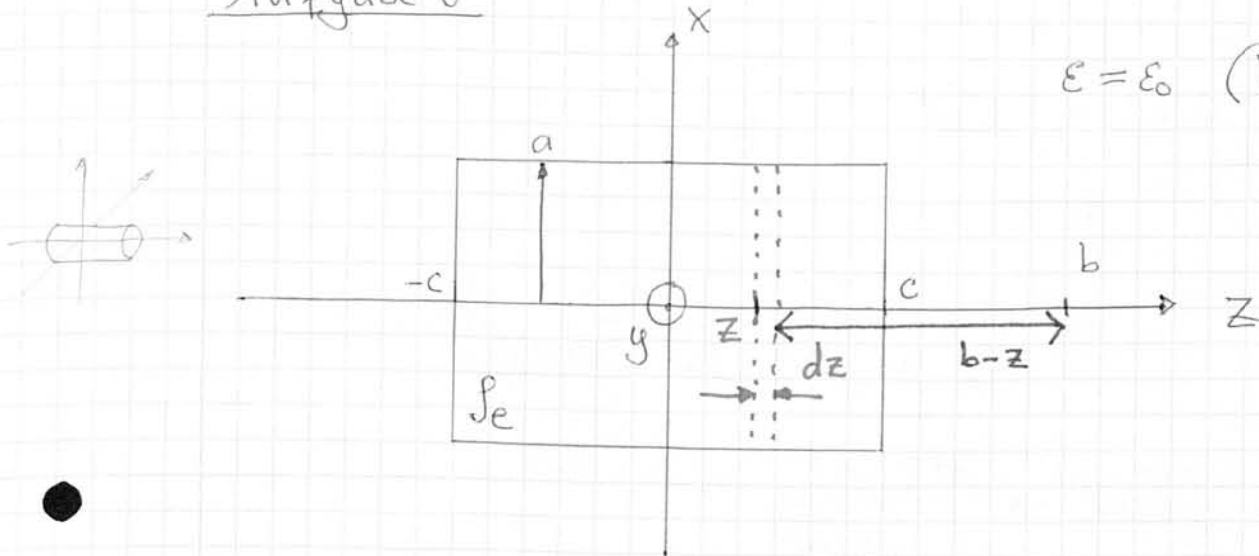
$$Q = \sigma_e \cdot \pi \cdot a^2$$

$$\frac{Q}{A} = \sigma_e$$

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z \quad \text{für } b \gg a \quad (b > 0)$$

Aufgabe 6

$\epsilon = \epsilon_0$ (Vakuum)



$$a) \quad dQ = \rho_e \cdot dV = \rho_e \cdot \pi \cdot a^2 \cdot dz$$

$$= \underline{\underline{\rho_e \cdot \pi \cdot a^2}} \quad \underline{\underline{1 \, d}}$$

$$\Rightarrow d\sigma_e = \rho_e \cdot dz$$

Ersetze im Ergebnis aus Aufgabe 5c:

02.11.09

ET III

$\vec{E}(0,0,b)$ durch $d\vec{E}(0,0,b)$

σ_e durch $d\sigma_e$

b durch $b-z$

Voraussetzung: $b-z > 0$
hier $b > c \geq z$

$$d\vec{E}(0,0,b) = \frac{d\sigma_e \cdot (b-z)}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b-z|}}_{=\frac{1}{b-z} \text{ für } b \geq z} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \vec{E}(0,0,b) &= \int_{z=-c}^c d\vec{E} \\ &= \frac{\sigma_e}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{z=-c}^c \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} \right] dz \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\left[\text{Hilfe: } \sqrt{f(x)}' = \frac{+f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} \right]$$

$$= \frac{\sigma_e}{2 \cdot \epsilon_0} \left(\left[\sqrt{a^2 + (b-z)^2} \right]_{z=-c}^c + 2c \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e}{2 \cdot \epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + 2c \right) \cdot \vec{e}_z$$

(für $b > c$)

02.11.09 Betrachte $0 < b < c$ (im Zylinder)

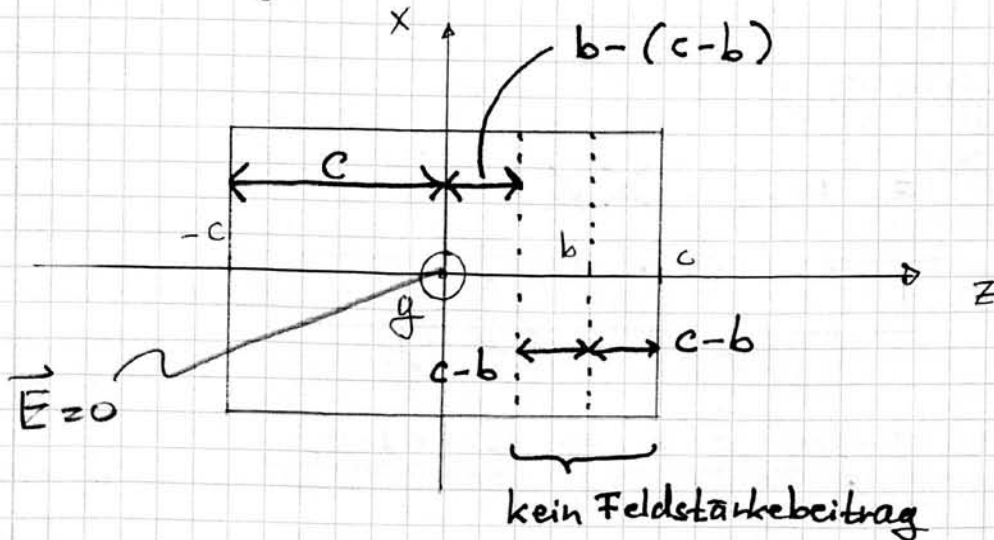
ET III

1. Lösungsansatz für den Integranden:

$$|b - z| = \begin{cases} b - z & \text{falls } b > z \\ z - b & \text{falls } b < z \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int_{z=-c}^b \underbrace{\dots}_{b > z} dz + \int_{z=b}^c \underbrace{\dots}_{b < z} dz$$

2. Lösungsansatz



Breite des Restzylinders:

$$c + b - (c - b) = 2b$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \int_{z=-c}^b \underbrace{\dots}_{b > z} dz$$

Lösung für $b < 0$

Aus Symmetriegründen:

$$\vec{E}(0,0,b) = -\vec{E}(0,0,-b)$$

Symmetrie zur

(ungerade Funktion)

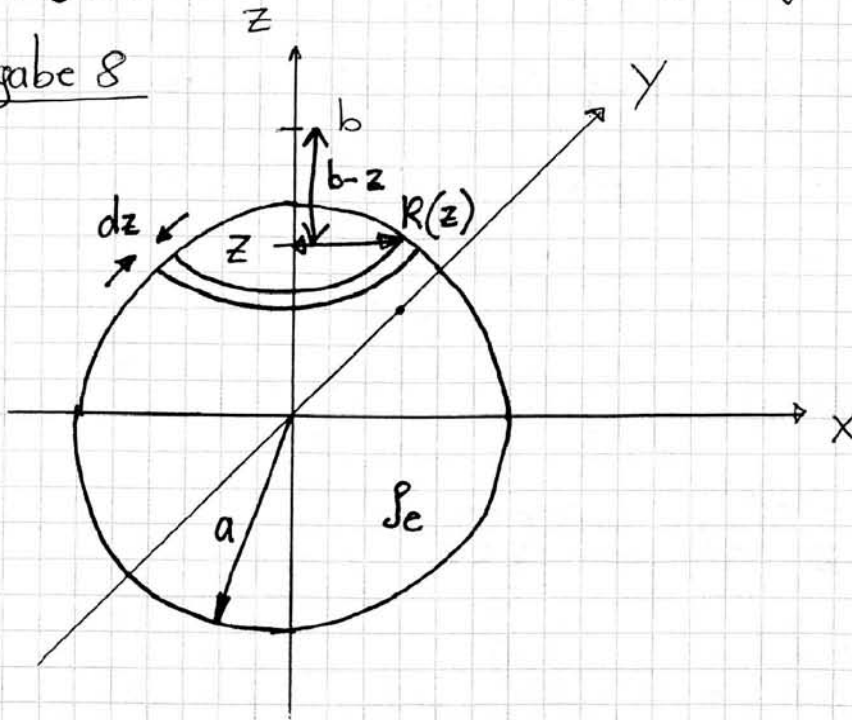
Aufgabe 7 wird übersprungen. (Hausaufgabe)

02.11.08

ET III

Aufgabe 8

a.)



"Kugel drehen"
 $\leadsto$ E-Feld

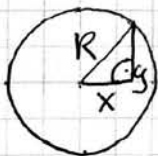
Aus Kugelsymmetrie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= E_r(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_r \\ &\quad + E_\theta(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\theta \\ &\quad + E_\phi(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\phi \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= E_r(r) \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

} Bedeutung
 der r 's
klarmachen!

Gesucht: $R(z)$

Allg. gilt: $R^2(z) = x^2 + y^2$



und $R(z) > 0$

$$\Rightarrow R(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(Vgl. ρ in Zylindercoord.)

02.11.09

ET III

Kugelgleichung: $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$
 (Rand Kugel) (Vgl. $|a|^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

$$\longrightarrow x^2 + y^2 = a^2 - z^2$$

$$\Rightarrow R(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$\text{für } -a \leq z \leq a$$

Im besten
immer dazu
schreiben!

(Farbintegration)

Wie in Aufg. 6: $d\sigma_e = \rho_e \cdot dz$

b.) Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 5c)

$\vec{E}(0,0,b)$ ersetzt durch $d\vec{E}(0,0,b)$

"Formel
anpassen!"

σ_e	durch	$d\sigma_e$
a	durch	$R(z)$
b	durch	$b-z$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{R^2(z) + (b-z)^2}} \right] \cdot \vec{e}_z$$

Prinzip von
Cavalieri!

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 - z^2 + b^2 - 2bz + z^2}} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$c.) \quad \vec{E}(0,0,b) = \int_{z=-a}^a d\vec{E}$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \int_{z=-a}^a \left(1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}} \right) dz$$

$$\text{HINWEIS} = \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \left[z - \frac{1}{3b} \left(z + \frac{a^2 - 2b^2}{b} \right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2bz} \right]_{z=-a}^a$$

02.11.08

ET III

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \left[2a - \frac{1}{3b} \left(a + \frac{a^2 - 2b}{b} \right) \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}_{|a-b|=b-a} \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{3b} \left(-a + \frac{a^2 - 2b^2}{b} \right) \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}}_{|a+b|=a+b} \right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \left[2a - \frac{1}{3b^2} \left\{ (a \cdot b + a^2 - 2b^2)(b-a) - (-a \cdot b + a^2 - 2b^2)(a+b) \right\} \right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \left[2a - \frac{1}{3b^2} \{ 6ab^2 - 2a^3 \} \right]$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2 \cdot \epsilon_0} \left[2a - 2a + \frac{2a^3}{3b^2} \right]$$

$$= \frac{\rho_e}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{a^3}{b^2} \cdot \vec{e}_z$$

Mit der Gesamtladung: $Q = \rho_e \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot a^3$

$$\vec{E}(0,0,b) = \underbrace{\frac{\rho_e \cdot a^3 \cdot 4\pi}{3}}_{=Q} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z$$

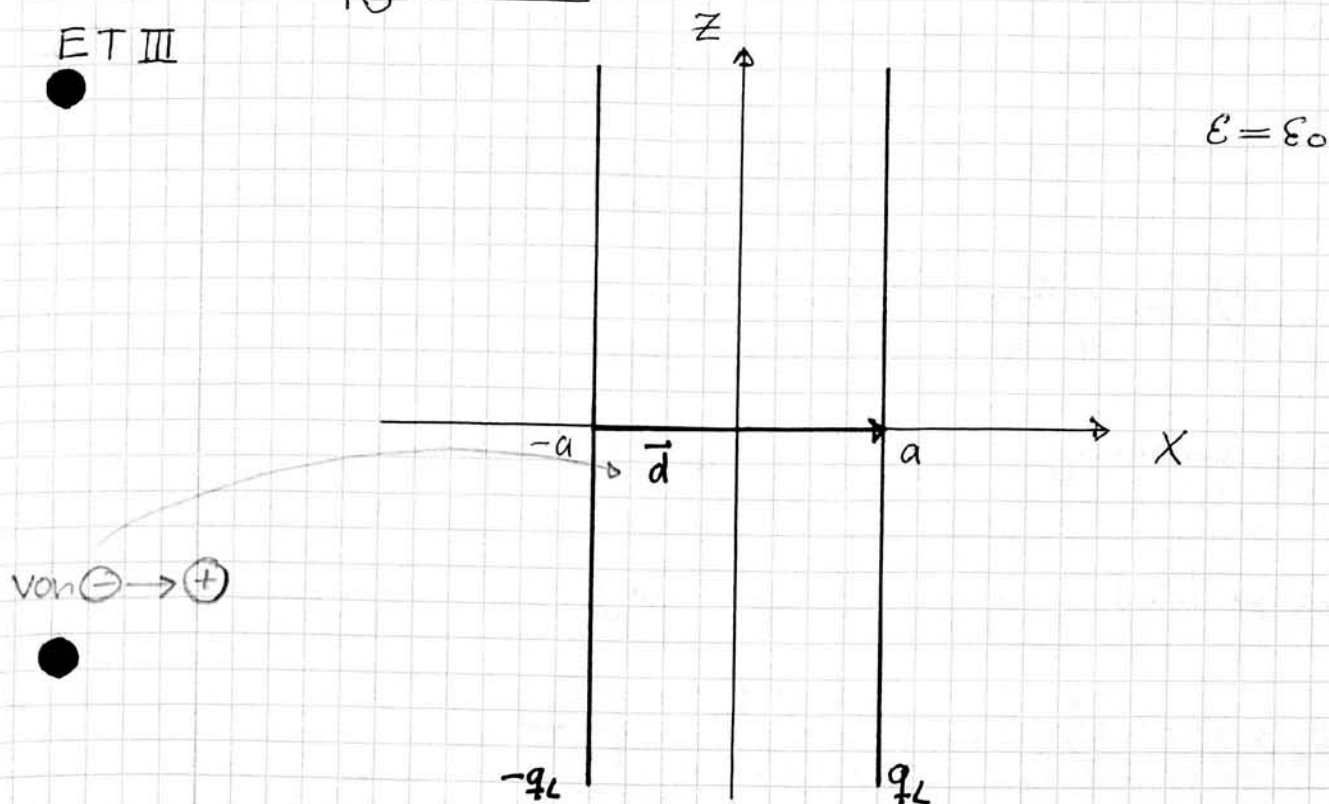
Entspricht für $b > a$ exakt dem Feld einer
~~Richtung~~ im Ursprung.
 Punktladung

Merke!

03.11.09

Aufgabe 9

ET III



Linien Dipolmoment: $\vec{p}_L = q_L \cdot \vec{d} \stackrel{!}{=} \text{const.}$

Feld einer Linienladung q_L in der z -Achse
in Zylinderkoordinaten

Bedingungen:

- (3x) - unendlich ausgedehnt
- || zur z -Achse

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_s}{r} \stackrel{FS}{=} \frac{q_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^2}$$

- $q_L = \text{const}$

Hier: zwei Linienladungen, parallel zur z -Achse,
sind verschoben um $\pm a \cdot \vec{e}_x$

$\Rightarrow$ Zylinderkoord ungeeignet! ▼

Umwandlung in kartesische Koordinaten:

eine Linienladung in der z -Achse: $\hookrightarrow$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\int \cdot \vec{e}_y}{\int^2} = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

03.11.09

ET III

Damit (rechte Linienladung): $(x \rightarrow (x-a))$
 $(y \rightarrow (y-k))$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(x-a) \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{(x-a)^2 + y^2}$$

$k=0$
 Zum Hören
 wichtig

Zur Erinnerung: $\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q$

Entsprechend linke Linienladung:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(x+a) \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y}{(x+a)^2 + y^2}$$

Superposition: $\vec{E}_{ges}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$

$$E_{ges,x}(\vec{r}) = \vec{E}_{ges}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_x = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right)$$

Abkürzungen:

$$\rho_1^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$\rho_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

$$E_{ges,x} = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(x-a)[(x+a)^2 + y^2] - (x+a)[(x-a)^2 + y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - a^2 - y^2) \cdot 2a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Abkürzung: $p_L = q_L \cdot d = q_L \cdot 2a$

03.11.09

ET III

$$\Rightarrow E_{\text{ges},x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x^2 - a^2 - y^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$E_{\text{ges},y}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{y \cdot [(x+a)^2 + y^2 - (x-a)^2 - y^2]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

⋮

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{y \cdot 4x \cdot a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$= \frac{p_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2x \cdot y}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Jetzt Grenzübergang:

$$p_L = \text{const.}$$

$$q_L \rightarrow \infty \left. \begin{array}{l} \text{da } d \rightarrow 0, \\ \text{(sonst } q_{L1} + q_{L2} = 0) \end{array} \right\}$$

$$d \rightarrow 0$$

$$a \rightarrow 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_1^2 = x^2 + y^2$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_2^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} E_{\text{ges},x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} E_{\text{ges},y}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

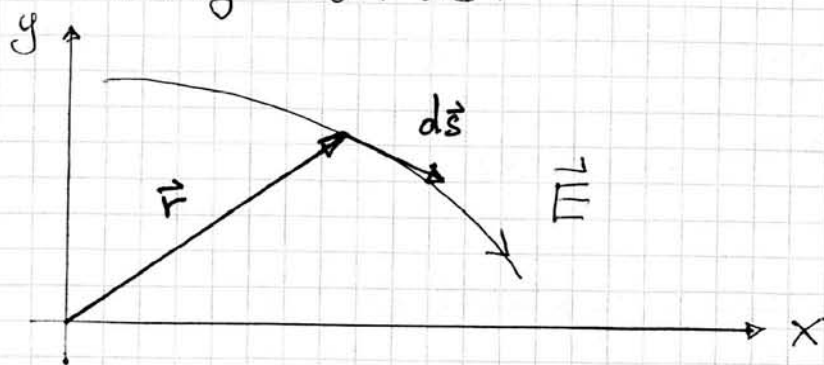
$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{ges}}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 - y^2) \cdot \vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Vorbemerkung Aufgabe 10.:

03.11.09

ET III

Die DGL $E_\phi \cdot d\phi = \rho \cdot d\phi \cdot E_\rho$
beschreibt den Weg einer Feldlinie über
die Richtung von $d\vec{s}$.



Ebenes Problem in kartesischen Koordinaten:

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + \underbrace{dz \cdot \vec{e}_z}_{=0}$$

$d\vec{s} \parallel \vec{E}$ (gilt für jeden Punkt auf
der Feldlinie)

$$\Rightarrow d\vec{s} = \alpha \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

mit $\alpha(\vec{r}) > 0$

$$\Rightarrow d\vec{s} \times \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix}} \right\} \text{Kollinear}$$

$$\Rightarrow (dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y) \times (E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y)$$

$$\Rightarrow (dx \cdot E_y - dy \cdot E_x) \cdot \vec{e}_z \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow dx \cdot E_y \stackrel{!}{=} dy \cdot E_x$$

$$\text{oder } \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \quad \left(= \frac{dz}{E_z} \right)$$

03.11.09

ET III

In Zylinderkoordinaten:

Wegelement: $d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\phi \cdot \vec{e}_\phi + dz \cdot \vec{e}_z$

$$\stackrel{!}{=} \alpha (E_r \cdot \vec{e}_r + E_\phi \cdot \vec{e}_\phi + E_z \cdot \vec{e}_z)$$

Komponentenvergleich:

$$\alpha = \frac{dr}{E_r} = \frac{r \cdot d\phi}{E_\phi}$$

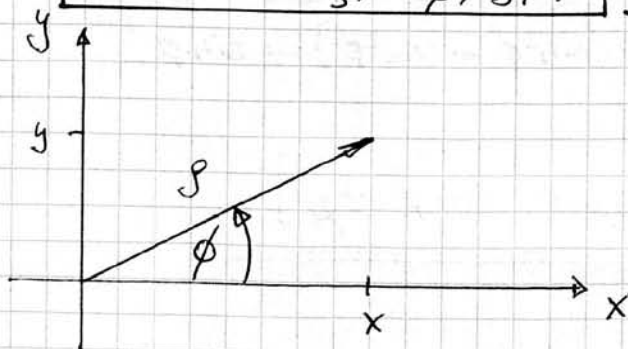
$$\Rightarrow E_\phi \cdot dr = r \cdot d\phi \cdot E_r$$

gut
können für
Klausur

Aufgabe 10

("Ergänzungsaufgabe")

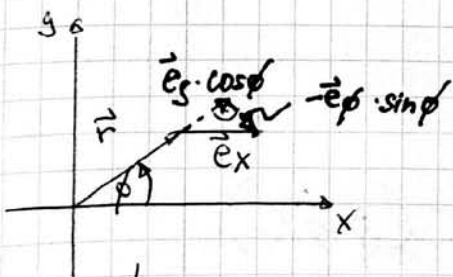
a) Ersetze $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ (X) (y) durch $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, r, \phi$ } Alle Größen umrechnen! (Vgl. Transformationsformel)

In der x-y-Ebene: $|\vec{r}| = r$

$$x = r \cdot \cos\phi = r \cdot \frac{x}{r}$$

$$y = r \cdot \sin\phi = r \cdot \frac{y}{r}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



$$\vec{e}_x = \vec{e}_r \cdot \cos\phi - \vec{e}_\phi \cdot \sin\phi$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \cdot \sin\phi + \vec{e}_\phi \cdot \cos\phi$$

} Formelsammlung!

↗ Einsetzen

03.11.09

ET III

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{P_L}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot s^4} \left[(s^2 \cos^2 \phi - s^2 \sin^2 \phi) \cdot (\cos \phi \cdot \vec{e}_s - \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi) \right. \\ &\quad \left. + 2s^2 \cos \phi \cdot \sin \phi (\sin \phi \vec{e}_s + \cos \phi \cdot \vec{e}_\phi) \right] \\ &= \frac{P_L}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot s^2} \left[(\cos^3 \phi - \sin^2 \phi \cdot \cos \phi + 2 \cdot \cos \phi \sin^2 \phi) \cdot \vec{e}_s \right. \\ &\quad \left. + (-\cos^2 \phi \sin \phi + \sin^3 \phi + 2 \cdot \cos^2 \phi \cdot \sin \phi) \cdot \vec{e}_\phi \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{P_L}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot s^2} \left[\underbrace{(\cos^3 \phi + \cos \phi \cdot \sin^2 \phi)}_{\cos \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \phi} \cdot \vec{e}_s \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{(\sin^3 \phi + \cos^2 \phi \cdot \sin \phi)}_{\sin \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sin \phi} \cdot \vec{e}_\phi \right] \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{array} \right\}\end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{P_L}{2\pi \cdot \epsilon_0 s^2} [\cos \phi \cdot \vec{e}_s + \sin \phi \cdot \vec{e}_\phi]$$

b) Die DGL enthält E_s und E_ϕ :
↗ Einsetzen

$$E_\phi ds = \frac{P_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \phi}{s^2} ds \stackrel{!}{=}$$

$$E_s \cdot s \cdot d\phi = \frac{P_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \phi}{s} d\phi \quad (s > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \phi}{s^2} ds = \frac{\cos \phi}{s} \cdot d\phi$$

23.11.09

ET III

Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{s} \cdot ds = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} d\phi$$

$$\begin{pmatrix} s > 0 \\ \phi \neq k \cdot \pi \\ \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$0 < \phi < 2\pi$$

$$\int \frac{1}{s} ds = \int \frac{\cos \phi}{\sin \phi} d\phi$$

Hinweis: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

$$\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + C_1 = \ln |\sin \phi| + C_2$$

$$\left| \begin{aligned} \ln \frac{a}{b} \\ = \ln a - \ln b \\ + C_3 \end{aligned} \right.$$

$$\left(\frac{s}{s_0}\right) \hat{=}$$

$$\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = \ln |\sin \phi| + (C_2 - C_1)$$

Normierung

(~~Normen~~
Einheit)
(mithilfe Konstante)

$$\frac{s}{s_0} = |\sin \phi| \cdot \underbrace{e^{C_2 - C_1} \cdot s_0}_{=: C}$$

$\Rightarrow$ Parametrische Beschreibung der Feldlinien:

$$\underline{s = C |\sin \phi|}$$

für $s > 0$, $\phi \neq 0$, $\phi \neq \pi$ ($0 < \phi < 2\pi$)

c) Transformation in kartesische Koordinaten:

03.11.09

ET III

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = c \cdot |y|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - |y| \cdot c = 0$$

Ziel: Kreisgleichung

→ quadratische Ergänzung $+ \left(\frac{c}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - c \cdot |y| + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\quad \quad \quad \left(|y| - \frac{c}{2}\right)^2$$

Abkürzung: $R := \frac{c}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x^2 + (|y| - R)^2 = R^2}}$$

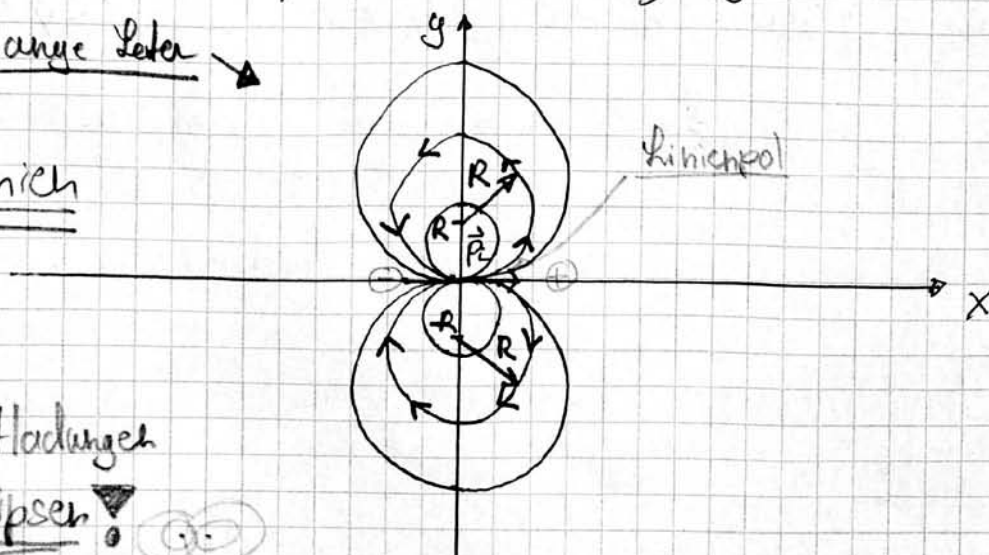
Kreisgleichung für Kreise mit dem Radius R
und dem Mittelpunkt $x=0$; $|y|=R \Leftrightarrow$

2. ∞ lange Leiter →

$$\cancel{y = \pm R}$$

$$y = \pm R$$

Feldlinien



bei Punktladungen

Ellipsen

03.11.09

Anmerkung:

ET III

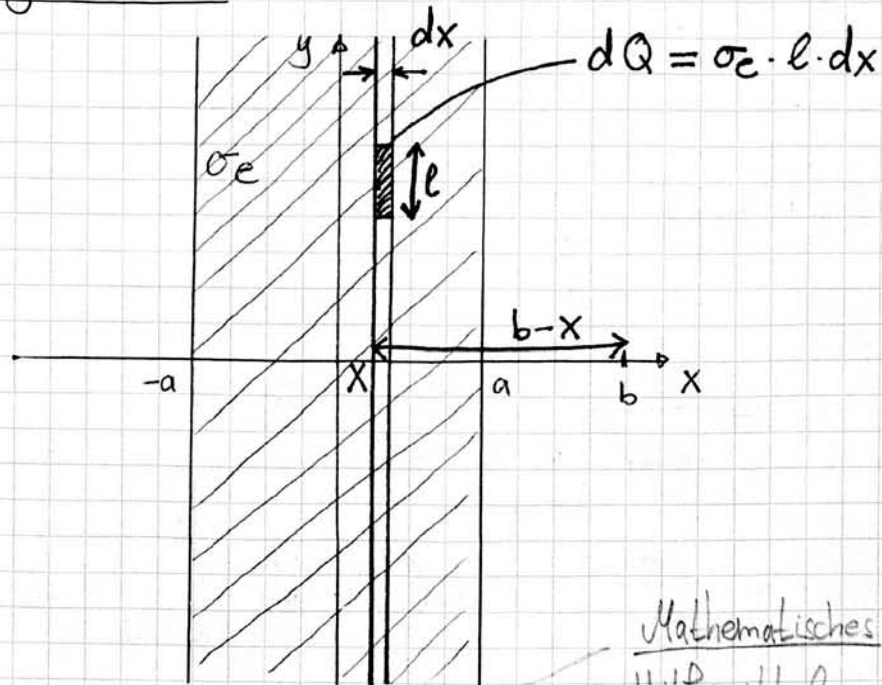
Die Feldlinien sind nicht geschlossen, sondern
beginnen bei $x = 0+$ und enden bei $x = 0-$.
(sind ja 2 Ladungen) $\oplus \ominus$

→ ||NIE|| geschlossen! ($\vec{E}$)

10.11.09

Aufgabe 7

ET III



Mathematisches
Hilfsmittel

$$a) \quad dQ = \sigma_e \cdot l \cdot dx \stackrel{!}{=} dq_L \cdot l$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{dq_L = \sigma_e \cdot dx}}$$

b.) aus Vorlesung:

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$$

gilt für eine Linienladung in der z -Achse:

Ersetze r durch $b-x$

$\vec{e}_r$ durch $\vec{e}_x$

q_L durch dq_L

Formeln
an die
Aufgaben-
stellung
anpassen!

$$dE = \frac{dq_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x}$$

im Aufpunkt
A(b, 0, 0)

$$d\vec{E} = dE \cdot \vec{e}_x$$

$$c.) \quad \vec{E}(b, 0, 0) = \int_{x=-a}^a dE \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \int_{x=-a}^a \frac{-dx}{x-b} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left[-\ln(|x-b|) \right]_{x=-a}^a \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln \left| \frac{-a-b}{a-b} \right| \cdot \vec{e}_x$$

$$\underline{\underline{b > a \quad \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln \left(\frac{a+b}{b-a} \right) \cdot \vec{e}_x}}$$

Pol.:
bei $b \rightarrow a$
divergiert
 $E \rightarrow \infty$

$$d.) \text{ Fernfeld: } b \gg a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} \ll 1$$

$$\vec{E}(b, 0, 0) = \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{1 + a/b}{1 - a/b} \right) \cdot \vec{e}_x$$

⌈ Hinweis: $\ln(1+x) \approx x$ für $|x| \ll 1$

⌋

10.11.08

ET III

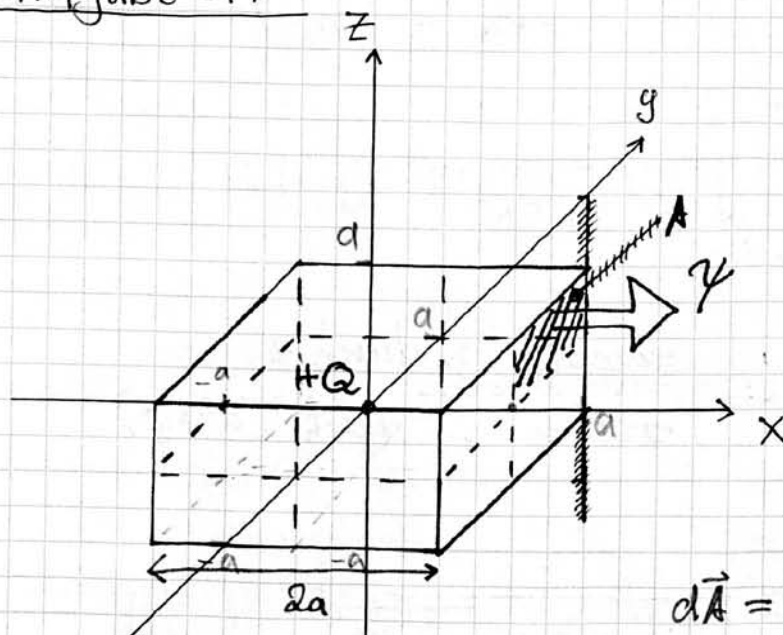
$$\vec{E}(b,0,0) \approx \frac{\sigma_e}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{a}{b} - \left(-\frac{a}{b} \right) \right] \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot 2a}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \vec{e}_x$$

(Schwerpunkts
prinzip)

$$\stackrel{!}{=} \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{Also } q_L = \underbrace{2a}_{\text{Breite des Streifens}} \cdot \sigma_e \quad \left. \vphantom{q_L} \right\} \underline{\underline{\text{Äquivalenter Ladungsbeleg}}}$$

Aufgabe 11

„Würfel“
(mit Mittelpunkt bei Q)

$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_x$$

$$(= dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x)$$

a.)
$$\varphi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

Wegen der Form der Fläche A ist die Berechnung von ψ in kartesischen Koordinaten am einfachsten: $d\vec{A} = dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{X \cdot \vec{e}_x + Y \cdot \vec{e}_y + Z \cdot \vec{e}_z}{[X^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Achtung!} \\ \text{keine } \vec{e}_i \text{'s!} \\ \vec{E} \cdot \vec{e} = \vec{D} \end{array} \right.$$

Grenzen: $0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a$

$$d\psi = \vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{e}_x}_{=D_x(x=a, y, z)} dy \cdot dz$$

$$\psi = \frac{Q}{4\pi} \int_{y=0}^a \int_{z=0}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}^3} dy \cdot dz$$

⌈ Hinweis 2: ersetze x durch z
⌋ ersetze B^2 durch $(a^2 + y^2)$

$$\psi = \frac{Q}{4\pi} \int_{y=0}^a a \cdot \left[\frac{z}{(a^2 + y^2) \sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} \right]_{z=0}^a dy$$

$$= \frac{Q \cdot a^2}{4\pi} \int_{y=0}^a \frac{1}{(a^2 + y^2) \sqrt{2a^2 + y^2}} dy$$

10.11.09

ET III

Hinweis 3: ersetze x durch y
 ersetze B^2 durch a^2

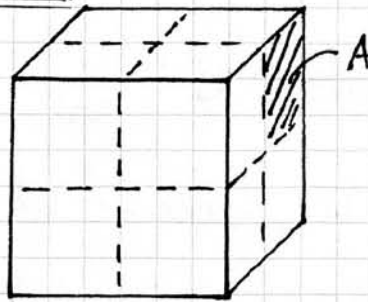
$$\psi = \frac{Q \cdot a^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{2a^2} \left[\arctan\left(\frac{y \cdot \sqrt{y^2 + 2a^2}}{a^2}\right) \right]_{y=0}^a$$

$$= \frac{Q}{8\pi} \left[\underbrace{\arctan\left(\frac{a \cdot \sqrt{3a^2}}{a^2}\right)}_{\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \right]$$

(mit Hinweis 1)

$$\Rightarrow \psi = \frac{Q}{24}$$

b.)



Wegen der Kugelsymmetrie von $\vec{D}(\vec{r})$ wird jede der vier Teilflächen bei jeder der 6 Würfelseiten vom gleichen Fluss ψ durchsetzt

$$\psi_i = \frac{Q}{24} \quad \text{für } i = 1, \dots, 24$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{24} \psi_i = Q}}$$

Der elektrische Fluss ψ durch eine geschlossene Hüllfläche gibt immer die eingeschlossene Ladung an.

Aufgabe 12

10.11.09

ET III

a.) gegeben: kugelförmige, homogene Raumladungverteilung ρ_e mit dem Radius a

gesucht: $\vec{D}(\vec{r})$ bzw. $\vec{E}(\vec{r})$ für $|\vec{r}| > a$
an jedem Ort $(\vec{r})$: 3 skalare Unbekannte

Ansatz : $\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_e dV$

H berandet V

Wichtig
zu verstehen!

→ eine skalare Gleichung (keine Vektorelle!)

⇒ Es sind zusätzliche Symmetrieüberlegungen erforderlich.

$\rho_e(\vec{r})$ ist kugelsymmetrisch
⇒ $\rho_e(r)$ bzw. $\rho_e = \text{const.}$

⇒ $\vec{D}(\vec{r})$ ist auch kugelsymmetrisch

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_r$$

$$+ D_\theta(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\theta$$

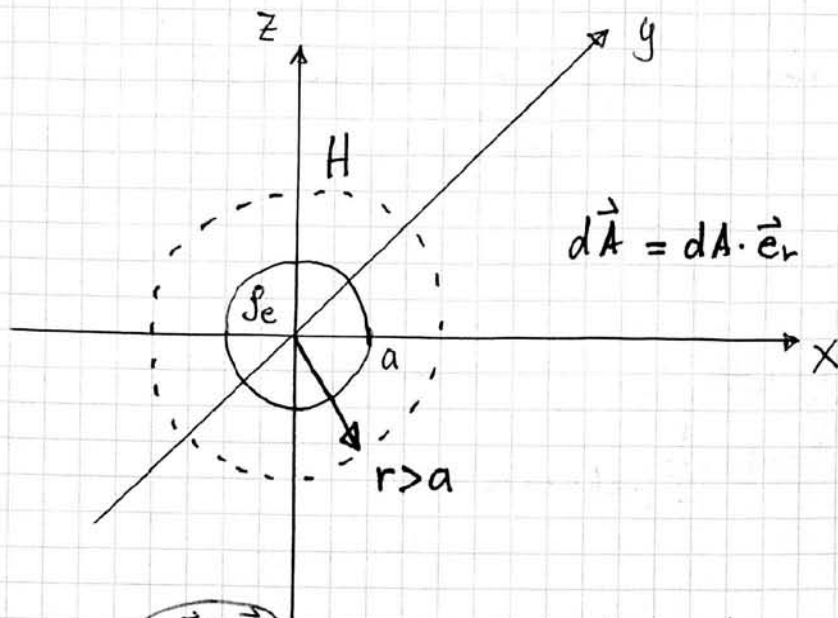
$$+ D_\phi(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$$

1 skalare Unbekannte
erfordert 1 skalare Gleichung!

→ $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$ } eine skalare Unbekannte

10.11.09

ET III



$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_r$$

$$d\vec{A} \parallel d\vec{A}$$

Standard-Trick

$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \oint_H \underbrace{D_r(r)}_{\text{const. auf } H} dA = D_r(r) \oint_H dA$$

Hüllflächenintegral

$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{en}} = \underbrace{\frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \rho_e}_{\text{Gesamtladung}} \quad (= \iiint_V \rho_e dV)$$

$$= D_r(r) \cdot \oint_H dA = D_r(r) \cdot \underbrace{4\pi \cdot r^2}_{\text{Oberfläche der Hülle}}$$

$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3r^2}$$

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot D_r(r) \cdot \vec{e}_r = \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r}}$$

für $|\vec{r}| > a$

Jetzt Aufgabe 11 mit dem Gauß'schen Satz
der Elektrostatik:

10.11.09

ET III

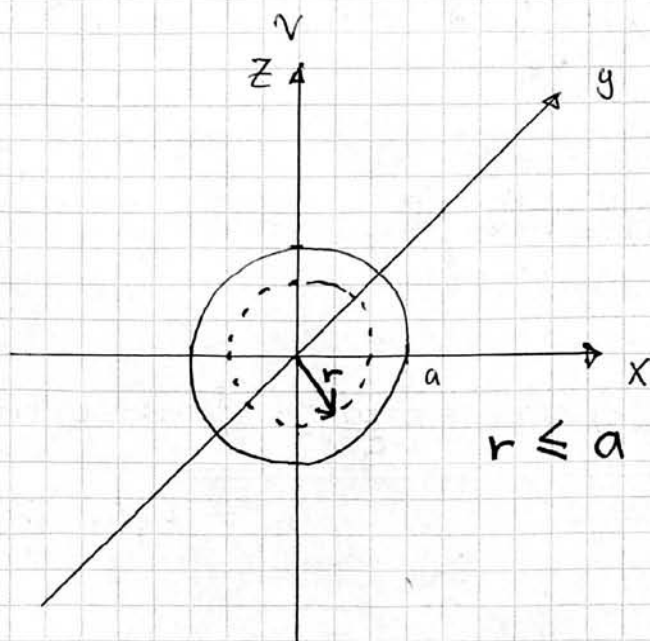
$$\Psi_{\text{ges}} = \oint_{H_{\text{Würfel}}} \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{A}}_{|\vec{D}| \cdot dA \cdot \cos \alpha} = Q_{\text{ein}} = Q \quad \left. \begin{array}{l} \text{Gesamtfluss} \\ \text{durch Kugel} \end{array} \right\}$$

$$\Psi_{\text{ges}} = 24 \cdot \Psi_A \quad \Rightarrow \quad \Psi_A = \frac{\Psi_{\text{ges}}}{24} = \frac{Q}{24} \quad \left. \begin{array}{l} \text{folgt aus} \\ \text{Symmetrie!} \end{array} \right\}$$

b.) Jetzt: Feld der Kugel für $|\vec{r}| \leq a$

$$\begin{aligned} \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} &= D_r(r) \cdot 4\pi r^2 \\ &= \iiint_V \rho_e dV = \rho_e \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \end{aligned}$$

Vgl. a)
Q_{ein} radiunabh.



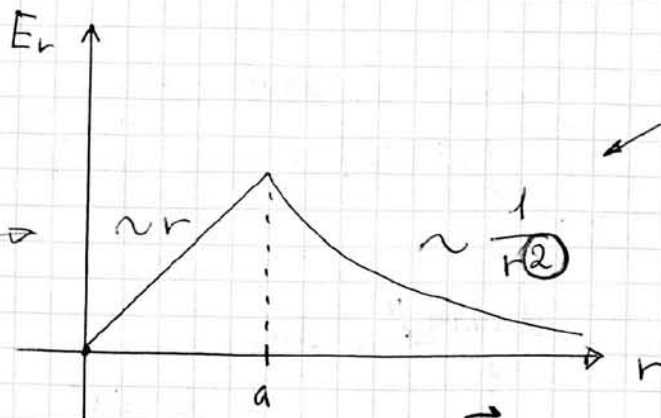
$$\Rightarrow D_r(r) = \frac{r \cdot \rho_e}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{r \cdot \rho_e}{3 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r}} \quad \text{für } |\vec{r}| < a$$

10.11.09

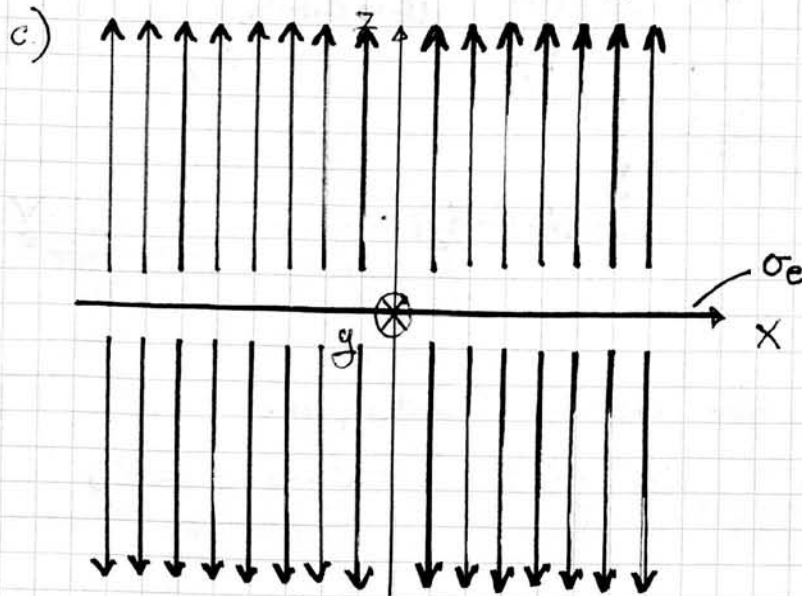
ET III

Merke Feldverlauf

für Klausur



Feldverlauf von
Kugel mit hom.
Raumladungsverd. ρ_e



Äquivalenz-
flächen

Die Ladungsverteilung und damit auch die
el. Flussdichte $\vec{D}$ sind invariant bzgl. einer
Verschiebung in der x- oder y- Richtung.

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) \neq f(x, y)$$

Auch invariant bzgl. einer Rotation um die
z-Achse (oder um einer zur z-Achse parallelen Achse)

$$\Rightarrow D_x = 0 \quad D_y = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = D_z(z) \cdot \vec{e}_z$$

Die Ladungsverteilung ist symmetrisch zur x-y-Ebene.

Vgl. Sin() $\rightarrow$

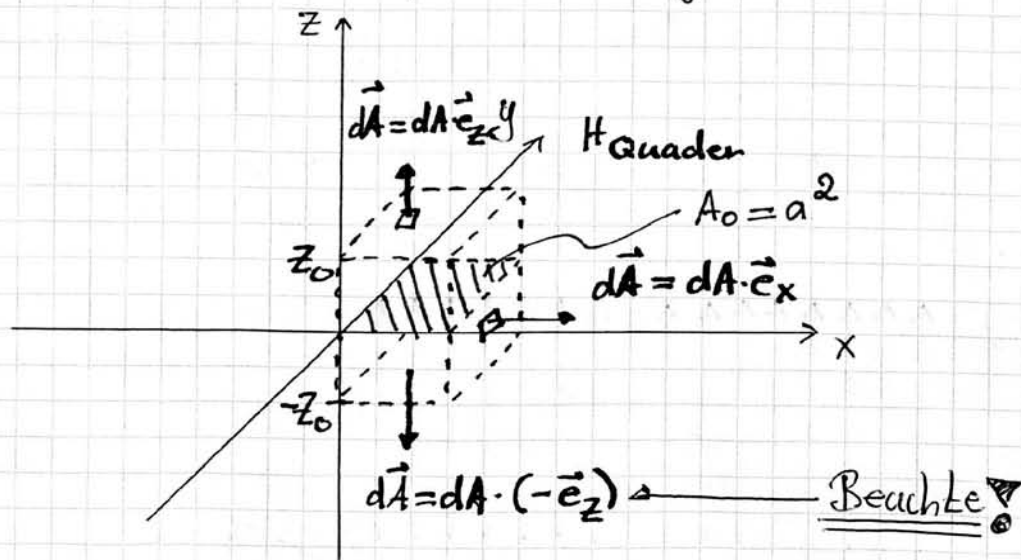
$$\Rightarrow \boxed{D_z(-z) = -D_z(z)}$$

(symmetrische Verteilung)

Gauß'sche Satz der Elektrostatik: angewendet auf quaderförmige Hüllfläche

17.11.09

ET III



H: Einhüllende für A_0 in Quaderform:

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad -z_0 \leq z \leq z_0$$

Es war: $\vec{D} = D_z \cdot \vec{e}_z$

Auf den Seitenflächen ist $d\vec{A} \parallel \vec{e}_x$
oder $d\vec{A} \parallel \vec{e}_y$

also $\vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow$ kein Beitrag zum Integral

Eingeschlossene Ladung:

$$\Delta Q = \sigma_e \cdot A_0 = \sigma_e \cdot a^2$$

17.11.09

ET III

Deckel: $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{D} = D_z(z_0) \cdot \vec{e}_z = \text{const}$$

Boden: $d\vec{A} = dA(-\vec{e}_z)$

$$\vec{D} = D_z(-z_0) \cdot \vec{e}_z = \text{const}$$

$$\oint_{\text{H\u00f6rner}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \boxed{\begin{aligned} & (D_z(z_0) \cdot \vec{e}_z) (A_0 \cdot \vec{e}_z) \\ & + (D_z(-z_0) \cdot \vec{e}_z) (A_0(-\vec{e}_z)) \end{aligned}}$$

$$= D_z(z_0) \cdot A_0 + \underbrace{D_z(-z_0)}_{= -D_z(z_0)} \cdot (-A_0)$$

$$= 2 \cdot D_z(z_0) \cdot A_0 \quad (= 2 \cdot D_z(z_0) \cdot a^2)$$

$$\stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}} = \Delta Q = \sigma_e \cdot A_0 = \sigma_e \cdot a^2$$

(f\u00fcr beliebige $z_0 > 0$)

Insgesamt:

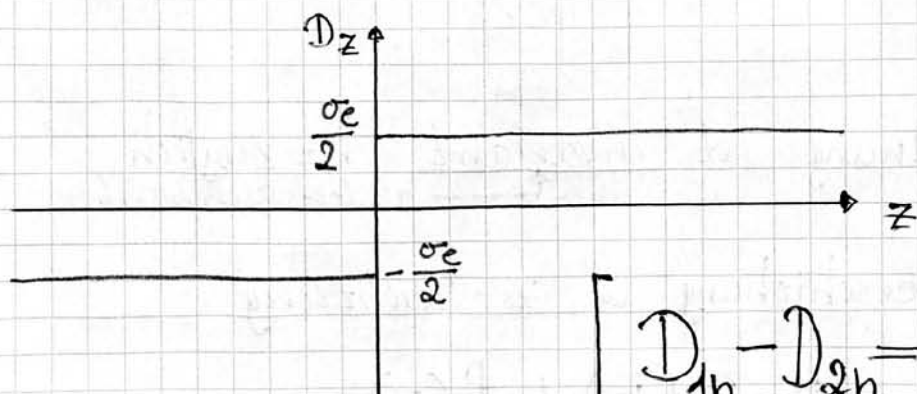
$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & \text{f\u00fcr } z > 0 \\ -\frac{\sigma_e}{2} \cdot \vec{e}_z & \text{f\u00fcr } z < 0 \end{cases}$$

elektrische
Flussdichte
muss nicht
stetig sein

(an Grenzfl\u00e4chen
mit Ladung)

Feld nimmt
mit z nicht
ab

(da $A \rightarrow \infty$)

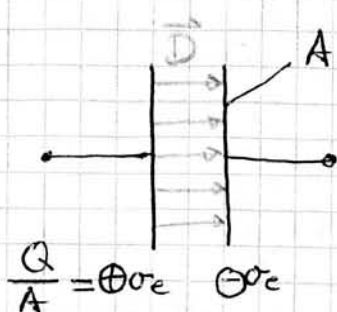


$$[D_{1n} - D_{2n} = \sigma_e]$$

Vgl. idealer Plattenkondensator

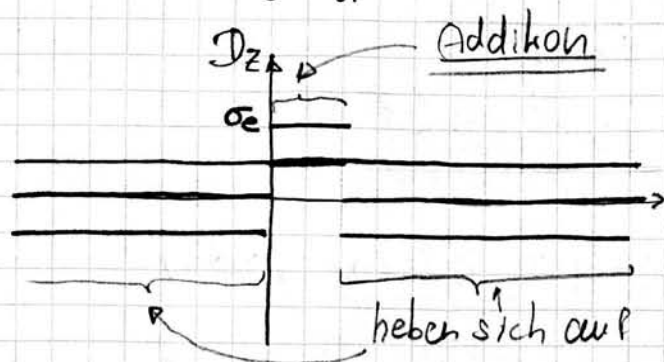
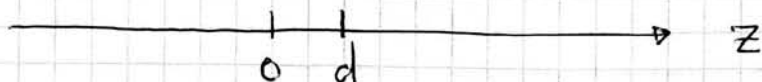
17.11.09

ET III



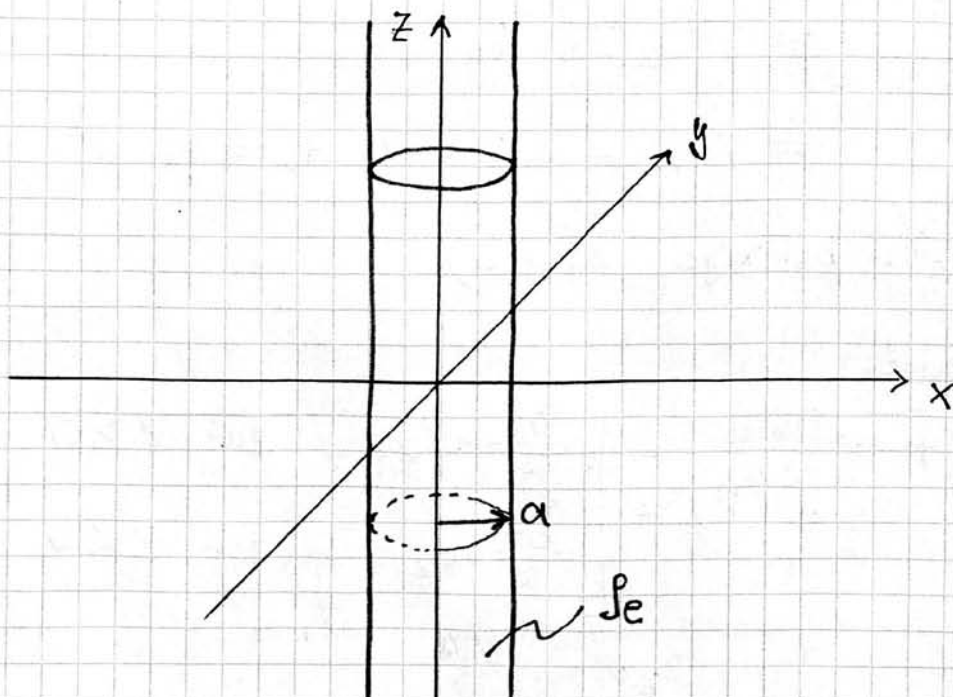
falls $\sigma_{ee} = \sigma_{er}$
 $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E} = 0}}$
(innen)

Beachte
Vorzeichen!



Superposition
"Halber Feldstärkebetrag
von je einer Platte"

d.)



Anordnung ist invariant bezüglich:
ändert sich nicht

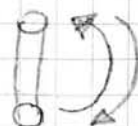
- Verschiebung in z -Richtung

$\vec{n}(\vec{r}) \perp \vec{r}$

17.11.09

ET III

- Drehung um π (um 180°) um die
X-Achse oder Y-Achse



$$\Rightarrow D_z = 0, \quad D_\phi = 0$$

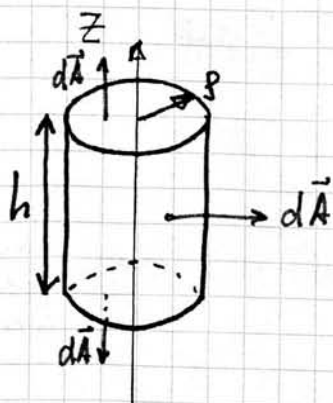
- beliebigen Drehung um die z-Achse

$$\Rightarrow D_\phi(\vec{r}) \neq \phi(\phi)$$

Insgesamt: $\vec{D}(\vec{r}) = D_\rho(\rho) \cdot \vec{e}_\rho$

Zylindersymmetrisches Radialfeld

Hüllfläche H: Zylinder um die z-Achse mit der
Höhe h und dem Radius ρ



- Deckel und Boden: $d\vec{A} \parallel \vec{e}_z$
also $d\vec{A} \perp \vec{D}$ (kein Beitrag)

- Zylindermantel: $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_\rho$

$$\vec{D} \cdot d\vec{A} = D_\rho(\rho) \cdot \vec{e}_\rho \cdot dA \vec{e}_\rho = D_\rho(\rho) \cdot dA$$

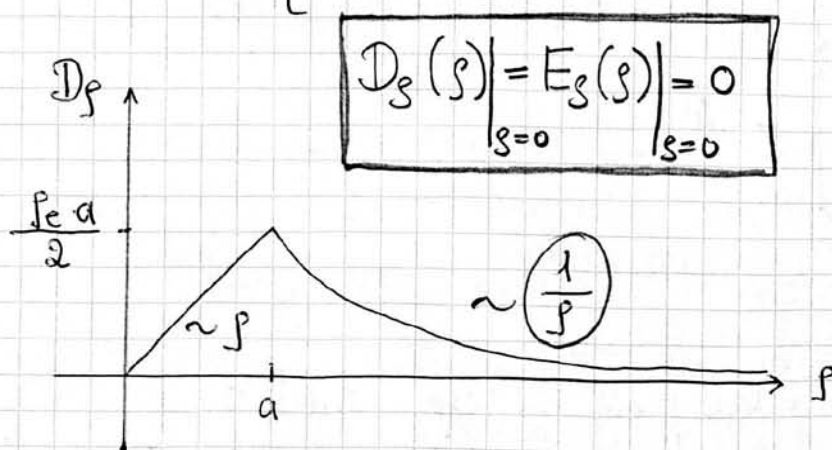
$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \iint_{\text{Mantel}} D_s(r) dA$$

Beachte keine
Hüllfläche mehr!

$$= D_s(r) \cdot \underbrace{\iint_{\text{Mantel}} dA}_{h \cdot 2\pi \cdot r} \stackrel{!}{=} Q_{\text{ein}}$$

$$Q_{\text{ein}} = \iiint_V \rho_e(\vec{r}) dV = \begin{cases} \rho_e \cdot h \cdot \pi \cdot r^2 & \text{für } r \leq a \\ \rho_e \cdot h \cdot \pi \cdot a^2 & \text{für } r > a \end{cases}$$

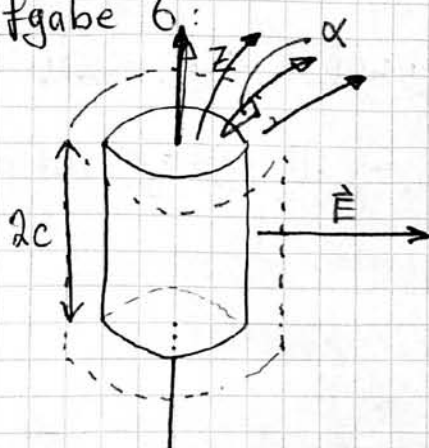
$$\Rightarrow D_s(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_e \cdot r & \text{für } r \leq a \\ \frac{1}{2} \rho_e \cdot a^2 \cdot \frac{1}{r} & \text{für } r > a \end{cases}$$



$$\boxed{D_s(r) = E_s(r) = 0 \quad \left|_{s=0} \quad \left|_{s=0}\right.}$$

Selber
Verlauf wie
 ∞ lange
Linienladung
(Ersatzladung)
(aba)

Rückblick Aufgabe 6:



$$\oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{ein}} = 2c \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \rho_e$$

$$\vec{D} \cdot d\vec{A} = \underline{\underline{|\vec{D}| \cdot dA \cdot \cos \alpha}}$$

17.11.09 Aufgabe 13

ET III

Elektrostatische Potenzial (allg. entlang beliebiger Kurve zwischen P_0 und P)

Beachte:

Potenzial:
 φ_e

Koordinate:
 ϕ

$$\varphi_e(P) = \varphi_e(P_0) - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Bezugspotenzial $\varphi_e(P_0)$
Bezugspunkt P_0
Vgl. $U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_1 - \varphi_2$

Das Bezugspotenzial ist im Allg. zu $\varphi_e = 0$ gewählt.

Betrachte el. Feldstärke $\vec{E}$ der Raumladungsverteilung aus Aufgabe 8 (und 12 b)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} r/a^3 & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 1/r^2 & \text{für } a < r < \infty \end{cases}$$

$$\text{mit } Q_{\text{ges}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \rho_e$$

a) Kugelsymmetrie: $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \cdot \vec{e}_r$

ϕ, θ -Richtung irrelevant

allg.: $d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin\theta \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi$

Nur Bewegung von und auf ϕ relevant.

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) d\vec{s} = E_r(r) \cdot dr$$

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(r) \neq \varphi(\theta, \phi)$$

φ_0 im Ursprung, d.h. $\varphi_e(r=0) = 0$

$$\varphi_e(r) = \varphi_e(r=0) - \int_{r'=0}^{r'=r} E_r(r') dr'$$

(1) innen: $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} \varphi_e(r) &= - \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \int_{r'=0}^r r' dr' \\ &= - \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 a^3} \cdot r^2 \quad \left(= - \frac{\rho_e \cdot r^2}{6 \cdot \epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

außen: $a < r$

$$\varphi_e(r) = \underbrace{\varphi_e(r=0) - \int_{r'=0}^{r'=a} E_r(r') dr'}_{\varphi_e(r=a)} - \int_{r'=a}^{r'=r} E_r(r') dr'$$

$$= - \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} - \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_{r'=a}^{r'=r} \frac{1}{r'^2} \cdot dr'$$

$$= - \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} - \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[- \frac{1}{r'} \right]_{r'=a}^{r'=r} = - \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_e(r) = - \frac{3}{8} \frac{Q_{\text{ges}}}{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} + \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

($-\rho_e \cdot a^2$, $a^3 \rho_e$)

Punktladung
Außenraum

17.11.09

ET III

Immer
stetig ▼

Potenzial)

Anmerkung: φ_e stetig bei $r = a$

$$\varphi_e(r) = \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \begin{cases} -\frac{r^2}{a^2} & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ (-3 + 2\frac{a}{r}) & \text{für } a < r \end{cases}$$

b) $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_e(\vec{r})$

In Kugelkoordinaten:

Formelsammlung { $\text{grad } \varphi_e = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi} \cdot \vec{e}_\phi$

$= 0 \text{ wegen } \varphi_e \neq f(\theta, \phi)$

hier: $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi_e(r)}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$

i) innen: $0 \leq r \leq a$

$$\vec{E}(r) = + \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} \cdot r \cdot \vec{e}_r$$

ii) außen: $a < r$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{e}_r = + \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$c) \quad \varphi_e(r=a) := 0$$

$$(i) \quad \text{innen: } 0 \leq r \leq a$$

$$\varphi_e(r) = - \int_{r'=a}^r E_r(r') dr' = - \frac{Q_{ges}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} \int_{r'=a}^r r' dr'$$

Potenzial bei
auf Konstante
eindeutig
bestimmt

$$= + \frac{Q_{ges}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad \left(= - \frac{\rho_e}{6 \cdot \epsilon_0} (r^2 - a^2)\right)$$

$$(ii) \quad \text{außen: } a < r$$

$$\varphi_e(r) = - \int_{r'=a}^r E_r(r') dr' = - \frac{Q_{ges}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{r'=a}^r \frac{1}{r'^2} dr'$$

$$= - \frac{Q_{ges}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{-2a}{-2a}$$

$$= \frac{Q_{ges}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \left(-2 + 2 \frac{a}{r} \right) \quad \left(= - \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3 \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_e(r) = \frac{Q_{ges}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & ; 0 \leq r \leq a \\ \left(-2 + 2 \frac{a}{r}\right) & ; a < r \end{cases}$$

24.11.09

ET III

$$\varphi_e(r \rightarrow \infty) = 0$$

von außen
anfangen, da
dort
Bezugspot.

(1) außen ($a < r$)

$$\begin{aligned} \varphi_e(r) &= - \int_{r'=\infty}^r E_r(r') dr' = - \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \underbrace{\int_{r'=\infty}^r \frac{dr'}{r'^2}}_{= \left(a - \frac{1}{r}\right) \frac{2a}{2a}} \\ &= + \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot 2 \cdot \frac{a}{r} \left(= \frac{a^3 \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \epsilon_0 \cdot r} \right) \end{aligned}$$

(11) innen: ($0 \leq r \leq a$)

$$\varphi_e(r) = - \underbrace{\int_{r'=\infty}^a E_r(r') dr'}_{\varphi_e(r=a)} - \int_{r'=a}^r E_r(r') dr'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot 2 - \frac{Q_{\text{ges}}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} \underbrace{\int_{r'=a}^r r' dr'}_{\frac{1}{2}(r^2 - a^2)} \\ &= \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \left(2 - \frac{r^2}{a^2} + 1\right) \left(= \frac{a^2 \cdot \cancel{2}}{3 \cdot \epsilon_0} - \frac{\cancel{2}}{6 \cdot \epsilon_0} (r^2 - a^2) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_e(r) = \frac{Q_{\text{ges}}}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot a} \cdot \begin{cases} \left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) & ; 0 \leq r \leq a \\ 2 \cdot \frac{a}{r} & ; a \leq r \end{cases}$$

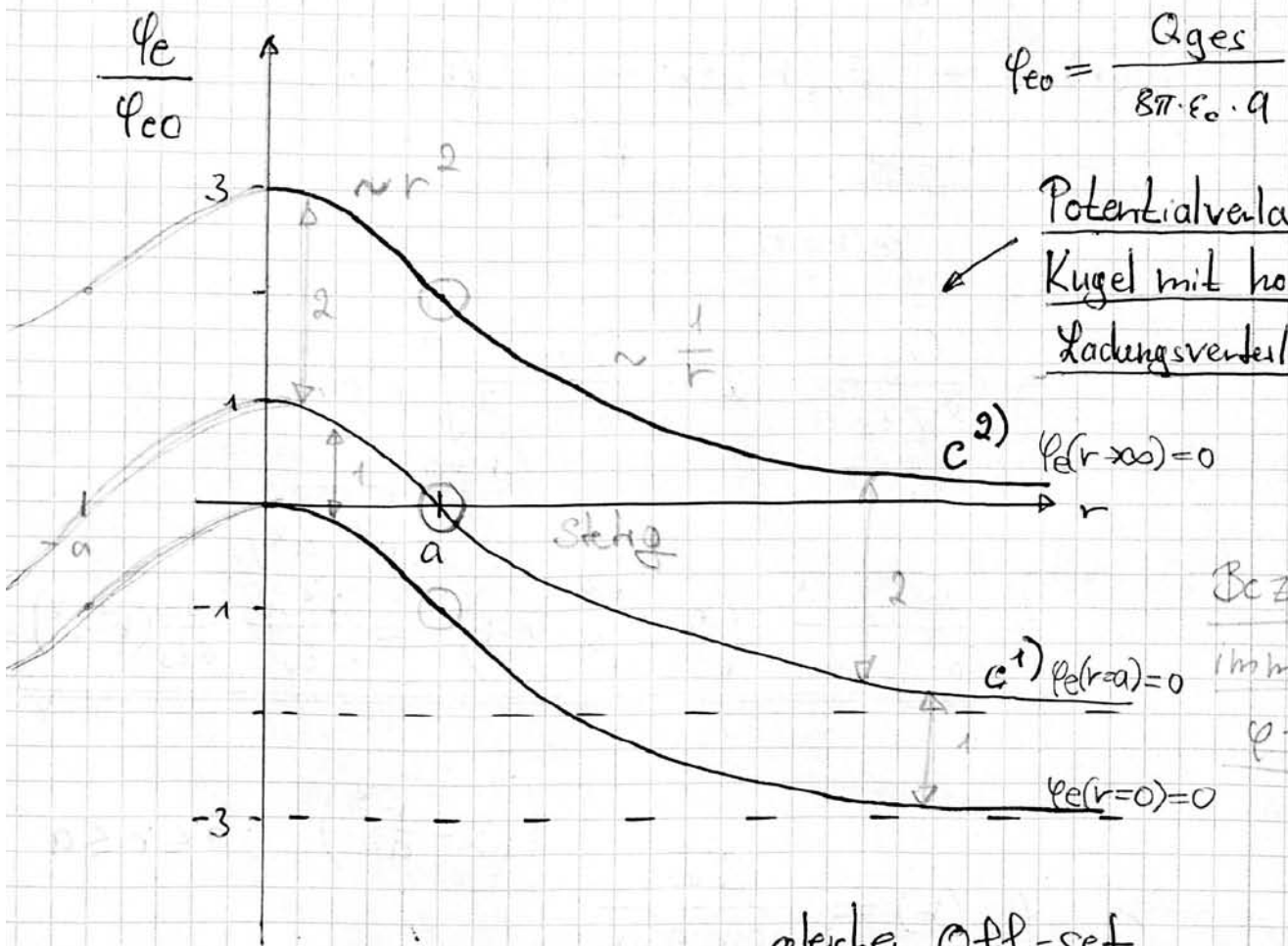
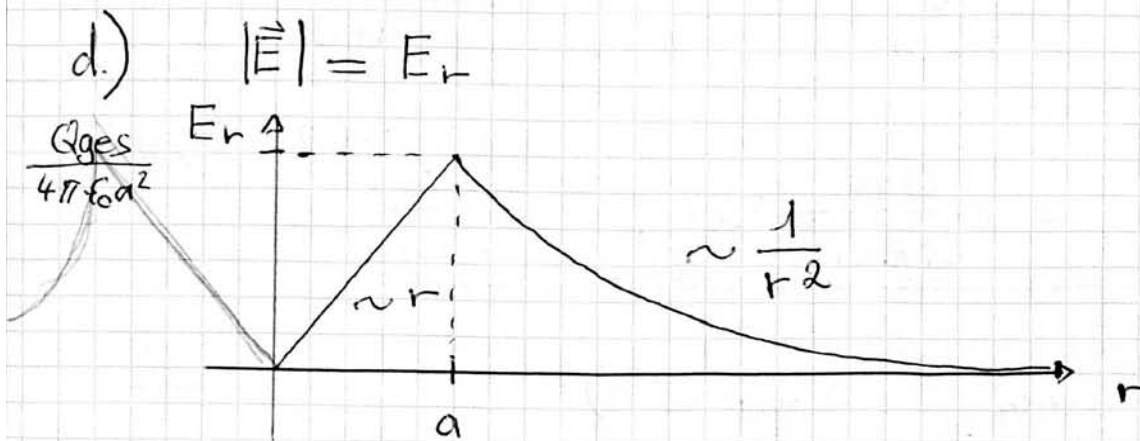
Anmerkung:

Die Formulierung von $d\vec{s}$ ist in allen Integralen gleich! Also: $d\vec{s} = \oplus dr \cdot \vec{e}_r + \dots$

24.11.09

~~Herma III~~
ET

kein Minus
(schon in der Integrationsgrenzen drinne)



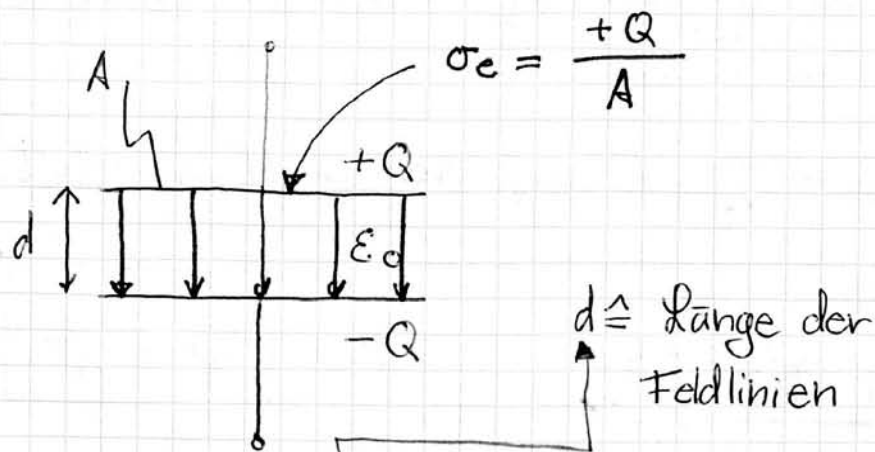
Potentialverlauf von Kugel mit homogener Ladungsverteilung ρ_e .

Bezugspot
immer auf $\varphi = 0$!

gleicher Off-set
(Abstand) überall
(= aut. P_0)

(Bei negativer Ladung an r -Achse spiegeln) $Q_0 < 0$

24.11.09

ET
Ma IIIAufgabe 20

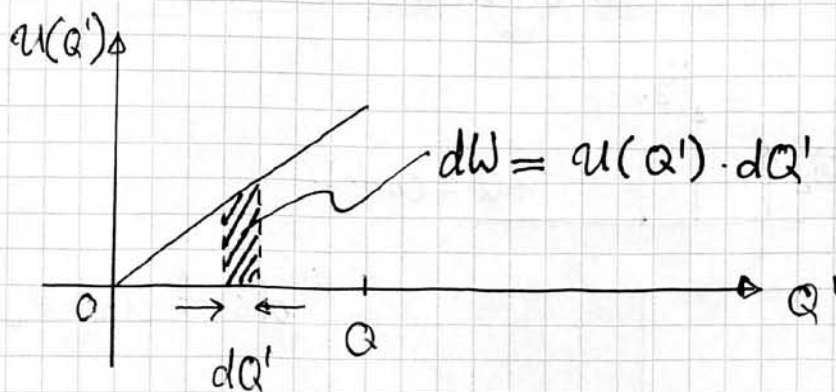
$$a.) \quad C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = \frac{Q}{u} \Rightarrow u = \frac{Q}{C}$$

Ansatz: Aufladen des (zunächst ungeladenen) Kondensators bei offenen Klemmen.

$$W_{el} = \int_{Q'=0}^Q \underbrace{dQ' \cdot u(Q')}_{dW}$$

$$= \frac{1}{C} \int_{Q'=0}^Q Q' \cdot dQ' = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2} \cdot Q^2 = \frac{d}{2 \cdot \epsilon_0 A} \cdot Q^2$$

Hier gilt: $W_{el} = \frac{1}{2} Q \cdot u$ wegen $u \sim Q$ (CBK)



Zweite Betrachtung über die Energiedichte des el. Feldes.

24.11.09

ET III

$\sigma_e = \frac{Q}{A}$ auf der positiven Platte unabhängig vom Abstand!

$D = D_n = \sigma_e$, also $D = \frac{Q}{A}$ $(D_{2n} = 0)$

$w_{el} = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{A^2}$
↑
Energiedichte (mit $D = \epsilon_0 \cdot E$)
(2.16.3)

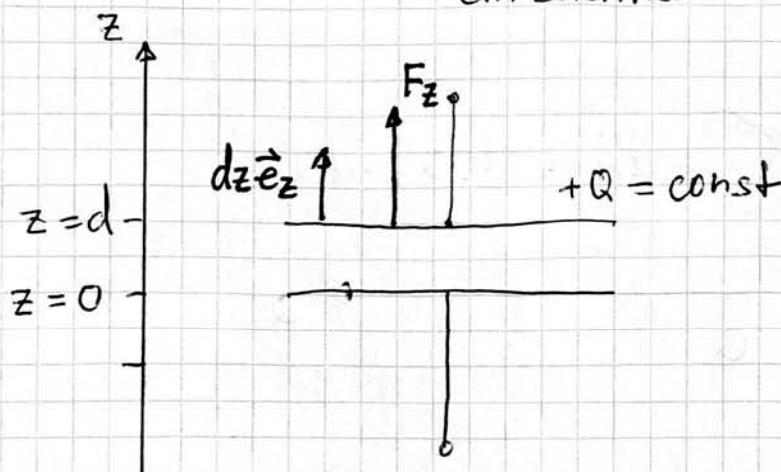
$w_{el} = \iiint_V \overset{3D}{w_{el}} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{A^2} \cdot \underbrace{A \cdot d}_{=V}$
 $= \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A}$

Energie ist
im Feld
(Raum)
gespeichert

b.)

Kraftberechnung mit Hilfe der virtuellen Verschiebung.

Koordinatensystem: und Vektoren $\vec{F}$ und $d\vec{s}$ einzeichnen



$d\vec{s} = dz \cdot \vec{e}_z$

24.11.09

ET III

Gesucht: Kraft F_z auf die obere Platte
bei $z=d$

Bei Verschiebung der oberen Platte um dz
verrichtet den Kondensator die Arbeit

$$dW_{\text{mech}} = F_z \cdot dz$$

ganz
wichtig!

|| $\Rightarrow$ Wel nimmt um W_{mech} ab

$$dW_{\text{el}} = -F_z \cdot dz \quad \Leftrightarrow \quad F_z = -\frac{dW_{\text{el}}}{dz}$$

$$W_{\text{el,nachher}} = W_{\text{el,vorher}} - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Kraft aus der Sicht des Systems

$$\text{Mit } C(z) = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{z}$$

$$\text{und } W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C(z)}$$

$$\text{Also: } F_z = -\frac{1}{2} \cdot Q^2 \cdot \underbrace{\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{C(z)} \right)}_{\frac{1}{\epsilon_0 \cdot A}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \cdot A}$$
$$F_z < 0$$

Beim geladenen

Kondensator

ziehen sich

Elektroden immer

an!

d.h. die Platten ziehen sich an

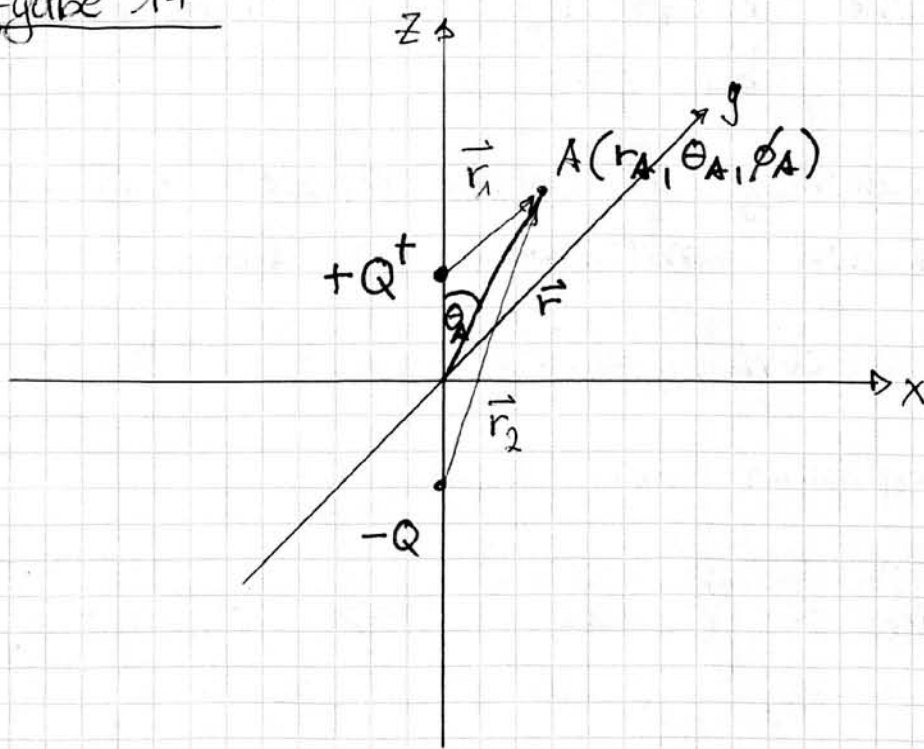
Anmerkung: F_z entspricht der Coulomb-Kraft
auf die obere Platte im el. Feld der unteren Platte

(Vgl. Feld der Flächenladung $A \cdot 12e$)

Aufgabe 14

24.11.06

ET III



a) $r_A = |\vec{r}_A|$ und $r_z = |\vec{r}_z|$

$$\varphi_1(r_1) = \frac{+Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} + \underbrace{\varphi_{1\infty}}_{\text{Potential für } r_1 \rightarrow \infty}$$

$$\varphi_2(r_2) = \frac{-Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2} + \varphi_{2\infty}$$

Setze $\varphi_{1\infty} = 0$ und $\varphi_{2\infty} = 0$

(Falls nicht angegeben, selber setzen)

24.11.09

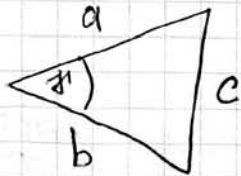
ET III

Nur mögl.
falls beide das
selbe Bezugs-
potenzial!

$$\varphi_{\text{ges}}(r_1, r_2) = \varphi_1(r_1) + \varphi_2(r_2)$$

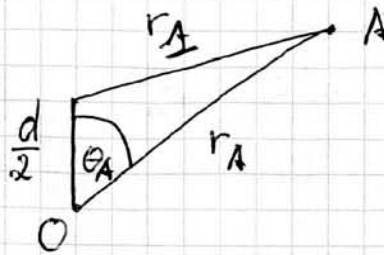
$$= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

b.) Kosinussatz:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad \text{FS}$$

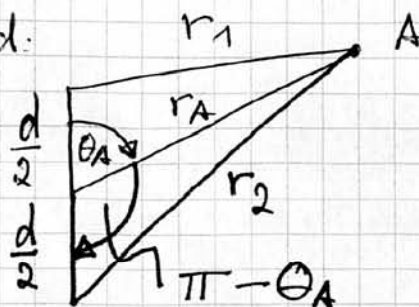
Gesucht: r_1, r_2 bzw. $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$
als Funktion von $\frac{1}{r_A}$ und θ_A



$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + r_A^2 - d r_A \cdot \cos \theta_A}}$$

$$= \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A} \right)^2 + 1 - \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A}}$$

entsprechend:



$$\Rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{d}{r_A} \right)^2 + 1 - \frac{d}{r_A} \cos(\pi - \theta_A)}} = -\cos \theta_A$$

Wichtig!

Näherung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d}{r}}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r} \quad \longleftarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{für } |x| \ll 1$$

1) Zunächst: Terme zweiter Ordnung streichen!
 ($\approx$)

2) Dann Näherung verwenden

$$\text{hier: } \frac{d}{r_A} \ll 1$$

$$\text{also } \left(\frac{d}{r_A}\right)^2 \ll \frac{d}{r_A}$$

Mit der Näherung:

$$\frac{1}{r_A} \approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A\right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r_A} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A\right)$$

24.11.09

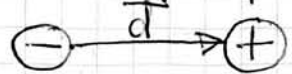
ET III

Merke!

$$c) \quad p = Q \cdot d \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Hinweis:

$\vec{d}$ zeigt von der negativen zur positiven Ladung! (2.16)



(Vg) Polarisation

$$(\vec{p} = Q \cdot \vec{d})$$

Dipolmoment

 ~~$\varphi(r_A) \neq$~~

$$\varphi(r_A, \theta_A) \approx \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos \theta_A \right) \right]$$

$$P = \frac{Q \cdot d}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cdot \cos \theta_A$$

P für Dipol

$$\varphi_D(r_A, \theta_A) = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ p = \text{const}}} \varphi(r_A, \theta_A)$$

$$= \frac{p}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \theta_A}{r_A^2}$$

Ebene zw

Dipol

= Äquipotentialfläche

Diese Rechnung gilt nur für $\vec{d} = d \cdot \vec{e}_z$

Allgemein: Vektorieller Dipolmoment

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \stackrel{\text{hier}}{=} Q \cdot d \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{Weiter gilt: } \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\text{hier}} \vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cos \theta$$

allgemein!

allgemein

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \quad \longleftrightarrow$$

zur Erinnerung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

01.12.01

ET III

Die gezeigte Formel gilt für einen Punktdipol im Ursprung, aber jetzt mit beliebiger Orientierung $\vec{d}$ bzw. $\vec{p}$.

d.)
$$\vec{E}_D = -\text{grad } \varphi_D$$

$$= - \left(\frac{\partial \varphi_D}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_D}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\frac{\partial \varphi_D}{\partial \phi}}_{=0} \cdot \vec{e}_\phi \right)$$

Es soll gelten: $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$

$$= - \frac{p}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(-2 \cdot \frac{\cos \theta}{r^3} \cdot \vec{e}_r - \frac{\sin \theta}{r^3} \cdot \vec{e}_\theta \right)$$

$$= \frac{p}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \left(2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta \right)$$

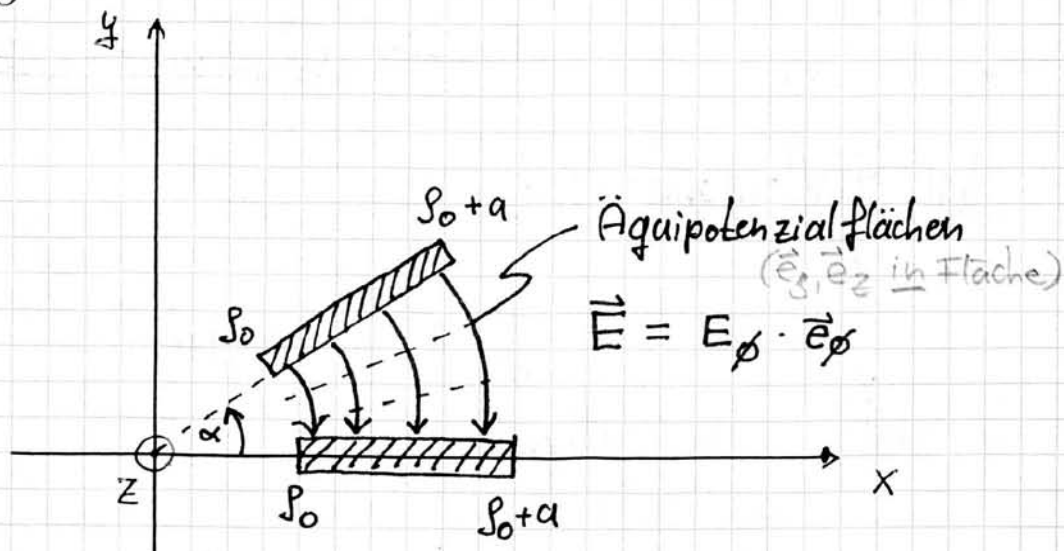
Dipol: $|\vec{E}_D| \sim \frac{1}{r^3} \quad ; \quad \varphi_D \sim \frac{1}{r^2}$

Vgl. Punktladung:

Punktladung: $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2} \quad ; \quad \varphi_D \sim \frac{1}{r}$

Make

Aufgabe 17



idealisierten Feldverlauf $\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(\rho, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$

$\Rightarrow$ Feldlinien verlaufen auf Kreisbögen

Gesucht: Feldverlauf $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0 + a$

$$0 \leq z \leq b$$

$$0 \leq \phi \leq \alpha$$

a) Die Feldliniendichte ist unabhängig von ϕ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(\rho) \vec{e}_\phi \quad \text{für } 0 < \phi < \alpha$$

Anmerkung: außerhalb der Platten keine (Raum-) Ladung.

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow E_\phi = \text{const. bzgl. } \phi \quad (0 < \phi < \alpha)$$

Merke!

laut Aufgabe: Spannung U zwischen den Platten (Spannungsquelle)

01.12.09

ET III

Vgl. Plattenkondensator:

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const.}}}{E} \cdot d = U_{12}$$

$d \hat{=}$ Länge der E -Feldlinien

hier: $d = d(\varphi) = \alpha \cdot \rho$ für $0 < \varphi < \alpha$

 $\alpha \cdot \rho$ Bogenlänge

$$\underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{U}{\alpha \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{für} \quad \begin{matrix} 0 < \varphi < \alpha \\ 0 < z < b \end{matrix}}}$$

Integration entlang Kreisbögen:

$$d\vec{s} = \rho d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Integration für den Innenraum
(zwischen den Platten)

$$\varphi_e(\varphi) = \varphi_e(\varphi=0) - \int_{\varphi'=0}^{\varphi} \vec{E} d\vec{s}$$

01.12.09

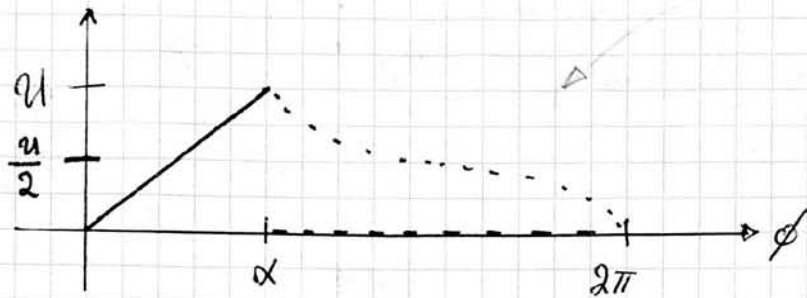
ET III

$$= - \int_{\phi'=0}^{\phi} E_{\phi} \cdot \rho d\phi' = + \frac{u}{\alpha \cdot \rho} \cdot \rho \cdot \phi$$

$$= u \cdot \frac{\phi}{\alpha}$$

Potenzial
eigentlich
immer
stetig!

Potenzial
immer
stetig!

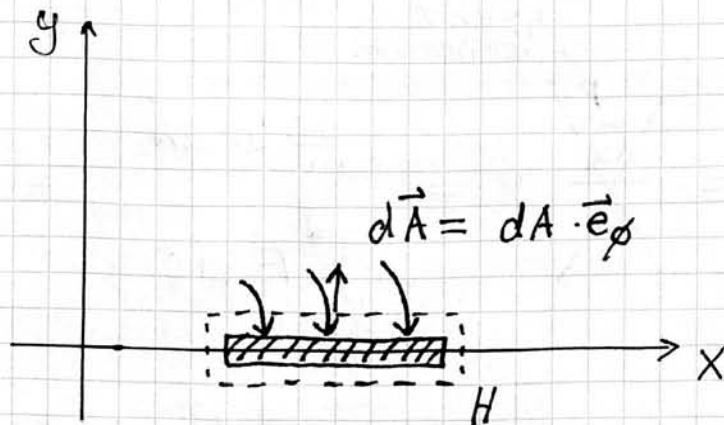


b)

$$\vec{D}(\rho, \phi \rightarrow 0+) = \epsilon_0 \cdot E_{\phi}(\rho) \vec{e}_{\phi} \quad \vec{e}_{\phi} \parallel \vec{e}_y$$

$$\text{Obersseite der unteren Platte} = - \frac{\epsilon_0 \cdot u}{\alpha \cdot \rho} \cdot \vec{e}_{\phi} \quad (= \sigma_e(\rho))$$

$\neq \text{const}$



Mit $dA = b \cdot d\rho$

=> Ladung der unteren Platte

Ladung der unteren Platte:

01.12.09

ET III

$$Q = \iint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

 nicht konstant auf Oberfläche 

$$= \int_{s=s_0}^{s_0+a} \left(-\frac{\epsilon_0 \cdot u}{x \cdot f} \cdot \vec{e}_\phi \right) b \cdot ds \cdot \vec{e}_\phi$$

(Deckel der Halbfäche)

$$= -\epsilon_0 \cdot u \cdot b \cdot \frac{1}{x} \int_{s=s_0}^{s_0+a} \frac{ds}{s}$$

$$= -\epsilon_0 \cdot u \cdot b \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{s_0+a}{s_0}\right)$$

Hauptansage

Ladung nicht homogen auf den Platten verteilt

σ_e höher zu s_0 hin auf Platten

c)

beachte Vorzeichen!

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{\iint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{Q}{-u}$$

$$C \geq 0$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_0 \cdot b \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{s_0}\right)$$

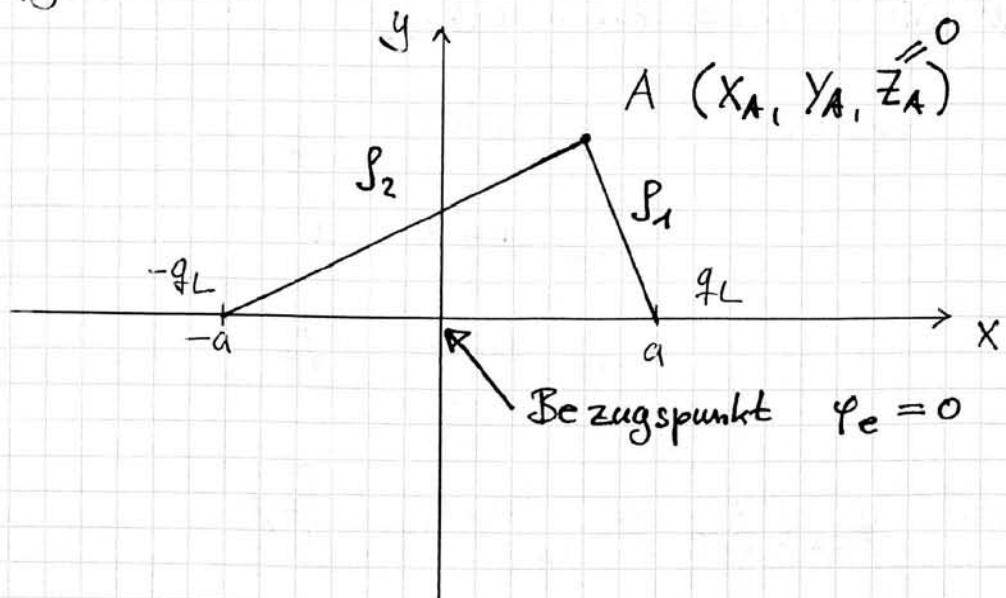
01.12.09

Aufgabe 16

ET III

 $\rho_1 \neq \rho$

↑
Wird benutzt
da keine
Z-Komponente



a) Gesucht $\varphi_e = f(\rho_1, \rho_2)$

1 Komponente
fällt immer aus
der Betrachtung
raus bei os-langen
Linienladungen

Wir betrachten einen Aufpunkt A in der
X-Y-Ebene (weil die Komponente z_A
hier keine Rolle spielt)

Potential einer Linienladung in der
Z-Achse.

geht nicht:

$\rho_0 \rightarrow 0$
 $\rho_0 \rightarrow \infty$

(Bezugspot.)

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\rho) = \underbrace{\varphi_e(\rho_0)}_{=0} - \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

Abwandeln für q_L bei $x=a$:

Ersetze ρ durch ρ_1
 ρ_0 durch a

$$\varphi_{e1}(\rho_1) = -\frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \ln\left(\frac{\rho_1}{a}\right)$$

linke Linienladung

für die linke Linienladung:

ersetze s durch s_2

s_0 durch a

q_L durch $-q_L$

$$\Rightarrow \varphi_{e2}(s_2) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s_2}{a}\right)$$

Insgesamt:

$$\varphi_e(s_1, s_2) = \varphi_{e1}(s_1) + \varphi_{e2}(s_2)$$

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \left[\ln\left(\frac{s_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{s_1}{a}\right) \right]$$

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

Beachte:

Bezugspunkt

immer noch
im Ursprung

b) Äquipotenzialfläche:

$$\boxed{\varphi_e(s_1, s_2) \stackrel{!}{=} \text{const}} \quad \underline{\text{Definition}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right) = \text{const}$$

$$\text{also } k := \frac{s_2}{s_1} \stackrel{!}{=} \text{const}$$

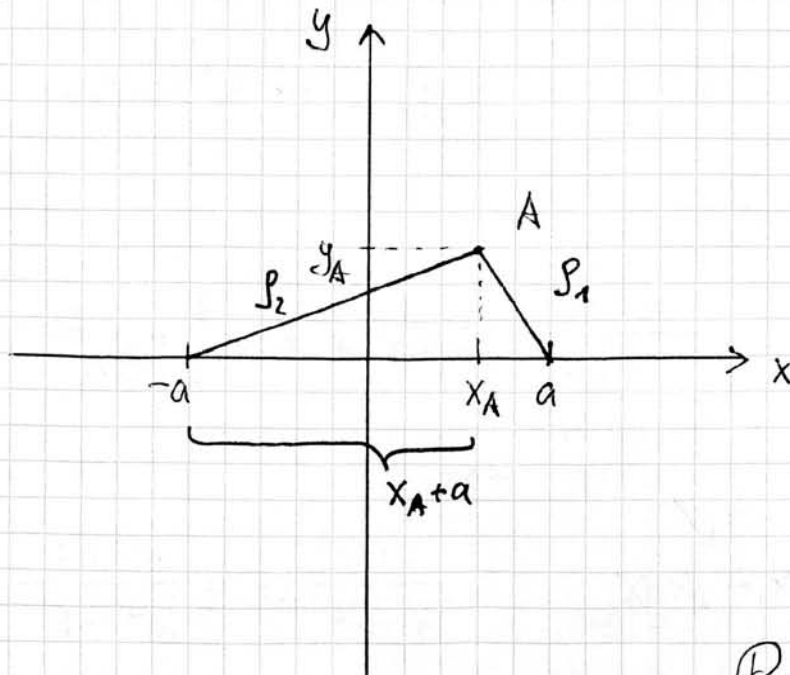
$$s_1, s_2 \geq 0$$

$$\text{d.h. } k^2 = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \text{const}$$

01.12.09

ET III

c)

Pythagorasbesser
so

$$\begin{cases} p_2^2 = (x_A + a)^2 + y_A^2 \\ p_1^2 = (a - x_A)^2 + y_A^2 = (x_A - a)^2 + y_A^2 \end{cases}$$

Äquipotenzialbedingung:

$$\frac{p_2^2}{p_1^2} = \frac{(x_A + a)^2 + y_A^2}{(x_A - a)^2 + y_A^2} = k^2 \stackrel{!}{=} \text{const}$$

d)

$$(x_A + a)^2 + y_A^2 = k^2 (x_A - a)^2 + k^2 y_A^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + 2x_A a + a^2 + y_A^2 = k^2 (x_A^2 - 2x_A a + a^2) - k^2 y_A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X_A^2 (1-k^2) + 2x_A \cdot a(1+k^2) + a^2(1-k^2) + y_A^2 (1-k^2) = 0$$

08.12.01

ET III

Falls $k \neq 1$

$$\Leftrightarrow X_A^2 + \underbrace{\frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot 2 \cdot a \cdot X_A}_{=: -2x_0} + a^2 + y_A^2 = 0$$

$x_0 \hat{=}$

Mittelpunkt
Equipotential
Zylinder

$$\text{d.h. } x_0 = -\frac{1+k^2}{1-k^2} a = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot a$$



Quadratische Ergänzung:

$$X_A^2 - 2x_0 x_A + x_0^2 + a^2 + y_A^2 = x_0^2$$

$$\underbrace{(X_A - x_0)^2 + y_A^2}_{\text{Kreisgleichung}} = \underbrace{x_0^2 - a^2}_{=: R^2}$$

Kreisgleichung

$$\text{Vgl.: (KGÜ)} \quad R^2 = x_0^2 - a^2$$

$$\begin{aligned} \text{also } R^2 &= \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \right)^2 a^2 - a^2 \\ &= \frac{(k^2+1)^2 - (k^2-1)^2}{(k^2-1)^2} \cdot a^2 \\ &= \frac{4k^2}{(k^2-1)^2} a^2 \end{aligned}$$

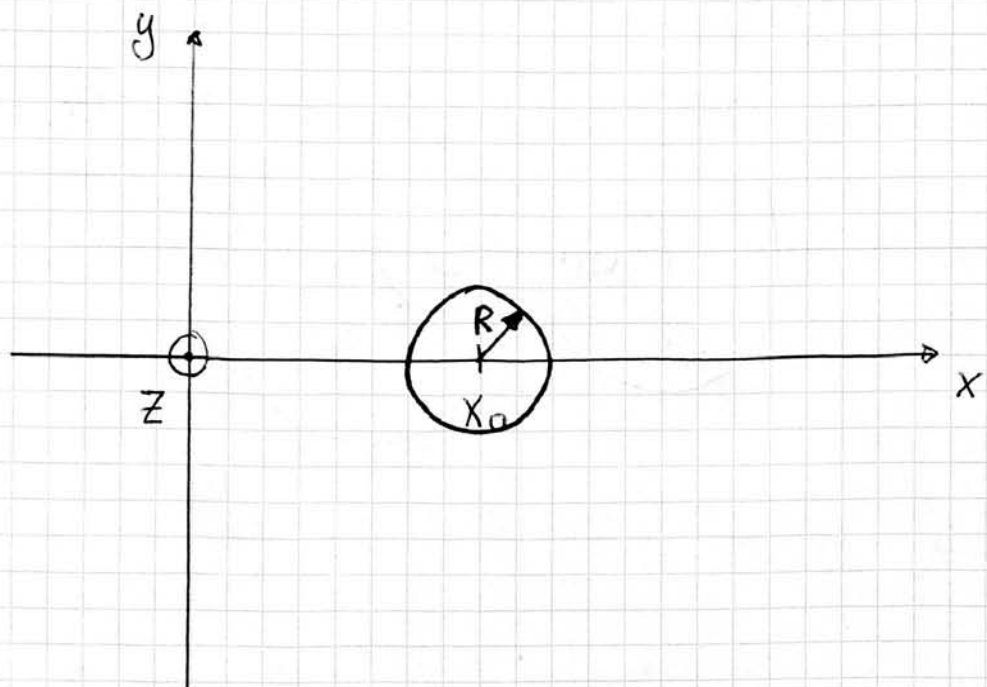
08.12.09

ET III

$$\rightarrow R = \sqrt{\frac{4k^2}{(k^2-1)^2} \cdot a^2} = \frac{2k}{|k^2-1|} \cdot a$$

e)

Kreisgleichung mit dem Radius R
und dem Mittelpunkt $x_A = x_0$, $y_A = 0$



$$p_1, p_2 \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$$

$$R \geq 0, \quad \begin{cases} x_0 > 0 & \text{falls } k > 1 \\ & \text{(1 und 4 Quadrant)} \\ x_0 < 0 & \text{falls } k < 1 \\ & \text{(2 und 3 Quadrant)} \end{cases}$$

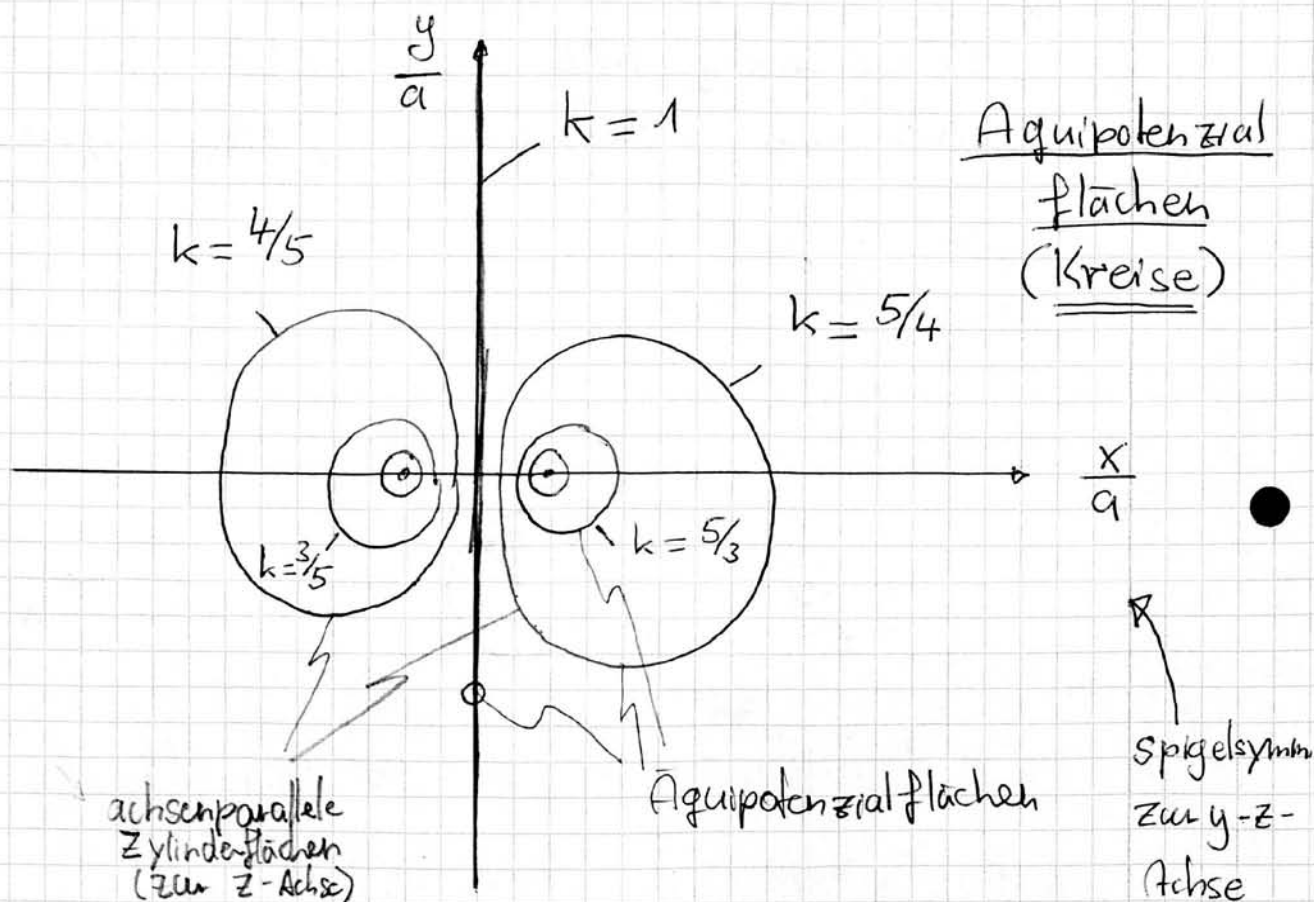
Die Gleichung beschreibt Kreise in der
x-y-Ebene. Die Äquipotenzialflächen
sind zur z-achse achsenparallele
Zylinderflächen.

Sonderfall $k=1 \iff \rho_1 = \rho_2$

08.12.01

ET III

beschreibt Punkte auf der y - z -Ebene.



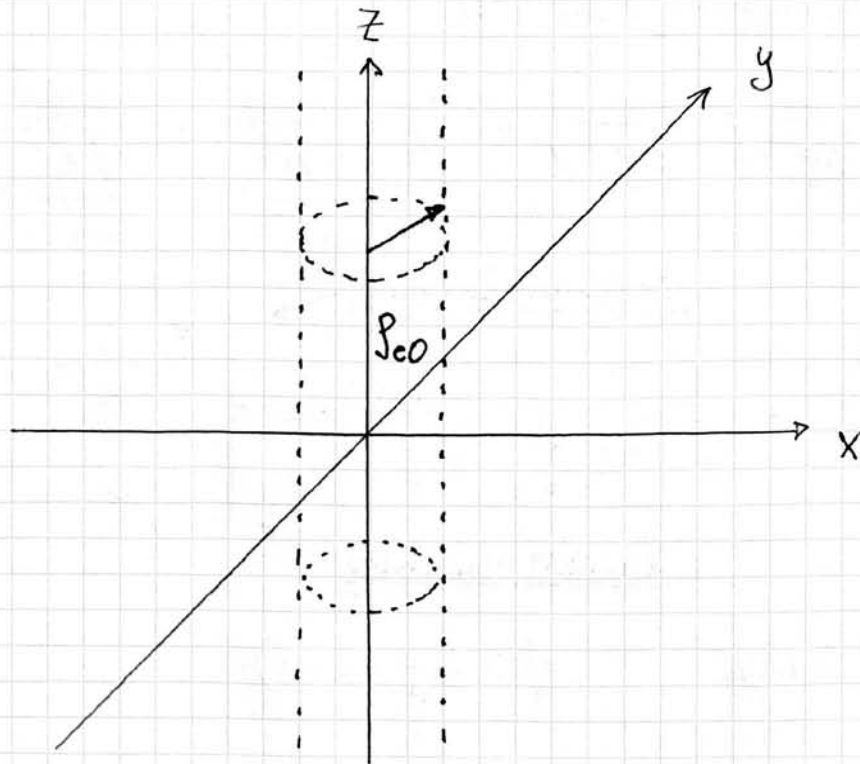
Feldlinien und Äquipotenzialflächen sind
Kreisförmig! (bei ∞ -langen
Linienladungen)

(Vgl Aufgabe 18)

08.12.09

Aufgabe 15

ET III



$$\rho_e(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_{e0} & \text{für } 0 \leq \rho \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen folgt:

$$\rho_e(\vec{r}) = \rho_e(\rho) \Rightarrow \varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(\rho) \neq \varphi(\phi, z)$$

Laplace-Operator $\rightarrow$

Laplace - Operator in Zylinderkoordinaten: (Formelsammlung) ($\nabla \sim \varphi_e$)

08.12.09

ET III

$$\Delta \varphi_e = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \phi^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2}}_{=0}$$

wegen $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$

Poisson-Gleichung $\rightarrow$

$$\text{also } \Delta \varphi_e = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = \begin{cases} -\frac{\rho_{eo}}{\epsilon} & \text{für } 0 \leq \rho \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Laplace-Gleichung $\rightarrow$

b.) (1) innen ($0 \leq \rho \leq a$)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_{eo}}{\epsilon} = \text{const}$$

(Poissongleichung)

für $\rho > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_{eo}}{\epsilon} \cdot \rho$$

1. Integration:

$$\rho \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = -\frac{\rho_{eo}}{\epsilon} \cdot \int \rho d\rho = -\frac{\rho_{eo}}{\epsilon} \cdot \frac{1}{2} \rho^2 + C_1$$

$\rho > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = -\frac{\rho_{eo}}{2 \cdot \epsilon} \rho + \frac{C_1}{\rho}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}$

$$= -E_\rho$$

$$\left(E_\rho = -\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right)$$

08.12.09

ET III

hier: $\vec{E}$ stetig, d.h. $|\vec{E}| < \infty$

insbesondere $\lim_{\rho \rightarrow 0} |E_\rho| < \infty$

also $c_1 = 0$ (Vgl. A12d)
 $(E_\rho(\rho=0) = 0)$

($c_1 \neq 0$ würde eine unendlich lange
Linienladung in der z -Achse erfordern)

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = - \frac{\rho_{e0}}{2 \cdot \epsilon} \cdot \rho \quad (*)$$

2. Integration

$$\varphi_e = - \frac{\rho_{e0}}{4 \cdot \epsilon} \rho^2 + c_2$$

Wähle den Bezugspunkt bei $\rho=0$

Stetigkeits-
bedingung $\rightarrow$

d.h. $\varphi_e(\rho \rightarrow 0) = 0 \Rightarrow c_2 \stackrel{!}{=} 0$

also $\varphi_e(\rho) = - \frac{\rho_{e0}}{4 \cdot \epsilon} \cdot \rho^2$

für $0 \leq \rho \leq a$

$\uparrow$
stetige Ergänzung

(11) außen

(11) außen ($a < r$)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{Laplacegleichung})$$

$$\begin{aligned} r > 0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

1. Integration ($\int 0 dx = c$; Vgl. HoMa II)

$$r \cdot \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = c_3$$

$$\begin{aligned} r > 0 \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial \varphi_e}{\partial r}} &= \frac{c_3}{r} \end{aligned}$$

 $-E_r$: stetig bei $r=a$

$$\lim_{r \rightarrow a-0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \stackrel{!}{=} \lim_{r \rightarrow a+0} \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}$$

$\frac{E\text{-Feld}}{\text{springt}} \neq \text{nicht}$!


(Grund: Es gibt keine Flächenladung σ_e bei $r=a$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_{1n} &= D_{2n}; \quad E_{1t} = E_{2t}; \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon \\ \Rightarrow \vec{E}(r \rightarrow a-0) &= \vec{E}(r \rightarrow a+0) \end{aligned}$$

E -Feld kann springen an Flächenladungen und Materialübergängen!

08.12.09

ET III

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\rho_{eo}}{2 \cdot \epsilon} \cdot a}_{(*)} \stackrel{!}{=} \frac{c_3}{a}$$

$$\Leftrightarrow c_3 = -\frac{\rho_{eo}}{2 \cdot \epsilon} \cdot a^2$$

$$\text{also } \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} = \ominus \frac{\rho_{eo}}{2 \cdot \epsilon} \cdot \frac{a^2}{\rho} \quad \text{für } \rho > a$$

2. Integration

(φ_e stetig bei $\rho = a$)

$$\varphi_e(\rho) = \varphi_e(\rho=a) \ominus \int_{\rho'=a}^{\rho} \left(+ \frac{\rho_{eo}}{2 \epsilon} \cdot \frac{a^2}{\rho'} \right) d\rho'$$

$$= -\frac{\rho_{eo} \cdot a^2}{4 \epsilon} - \frac{\rho_{eo} \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

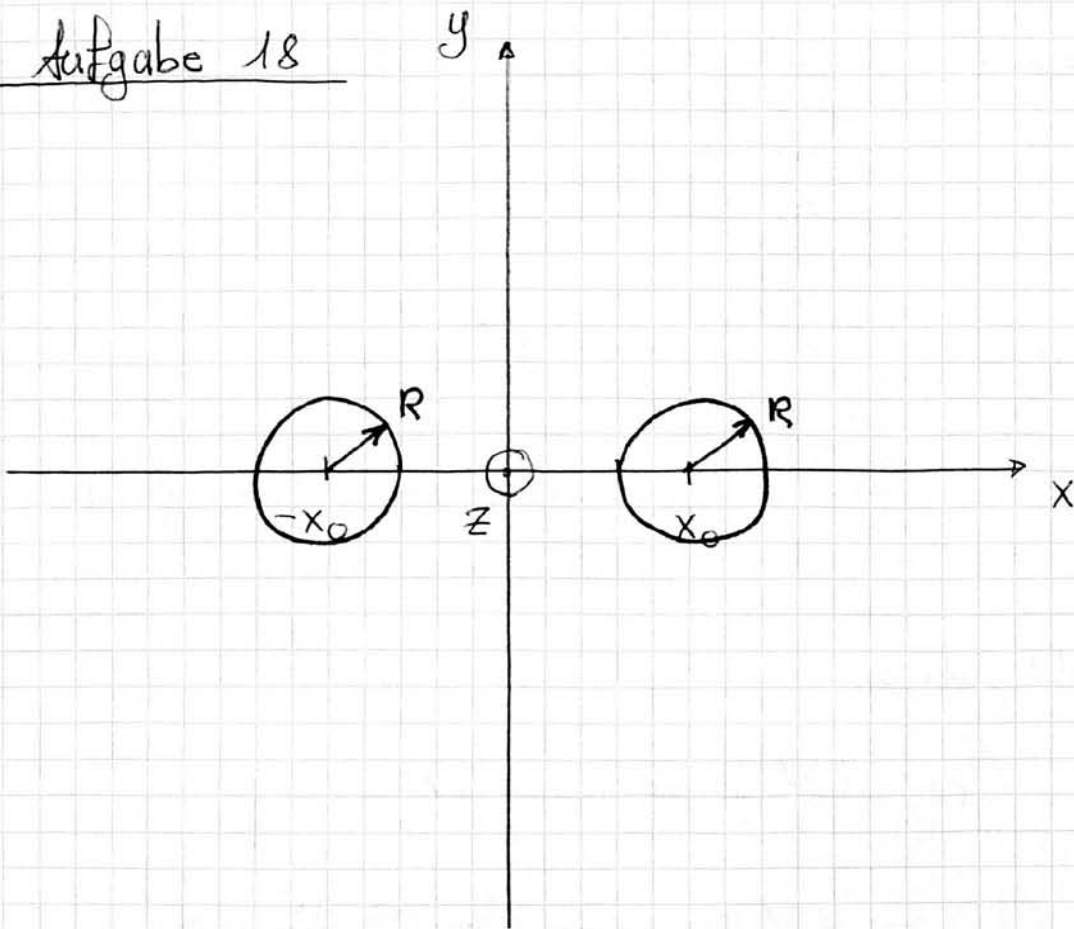
$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi_e(\rho) = -\frac{\rho_{eo} \cdot a^2}{4 \cdot \epsilon} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{a}\right)}}$$

für $a \leq \rho$

Aufgabe 18

08.12.08

ET III



Gesucht: Potenzialverlauf zwischen den Leitern
(Lösungsgebiet)

Ansatz: { Ersatzladungsanordnung die
im Lösungsgebiet das selbe
elektrische Feld erzeugt.

a.) auf Aufgabe 16

→ Äquipotenzialflächen zweier paralleler
Linienladungen $\pm q_L$ im Abstand $2a$ sind
Zylinder.

Coulombges
nicht anwen
falls $\sigma_c(F)$
nicht bekannt

"influenzierte
Ladungen"



Spiegelungs-
prinzip



bekannte
Ladungs-
anordnung

08.12.09

ET III

$$(x_A - x_0)^2 + y_A^2 = R^2$$

mit $x_0 = \frac{k^2+1}{k^2-1} a$; $R = \frac{2k}{|k^2-1|} a$

Hilfsgröße $\rightarrow$

$$k := \frac{p_2}{p_1} > 0$$

x_0 :

Mittelpunkt
Äquipotenzial
Zylinder

$k > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 > 0$ (Zylinder im rechten Halbraum)

$x_0 \neq a$

$k < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 < 0$ (Zylinder im linken Halbraum)

hier bekannt: x_0, R
gesucht k_1, k_2, a

(I) rechter Zylinder: $k_1 > 1$

$$x_0 = \frac{k_1^2+1}{k_1^2-1} a \quad ; \quad R = \frac{2k_1}{k_1^2-1} a$$

(II) linker Zylinder: $k_2 < 1$

⋮

Eliminieren von a führt auf eine quadratische Gleichung:

$$k_{1,2} = \frac{x_0}{R} \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{R^2} - 1}$$

Man kann zeigen, dass $k_1 \cdot k_2 = 1$

15.12.09

ET III

also $k_1 = \frac{1}{k_2}$

$$k_1 = \frac{x_0}{R} + \sqrt{\frac{x_0^2}{R^2} - 1} ; k_2 = \frac{x_0}{R} - \sqrt{\frac{x_0^2}{R^2} - 1}$$

3. Binomische Formel

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{x_0^2}{R^2} - \left(\frac{x_0^2}{R^2} - 1 \right) = 1$$

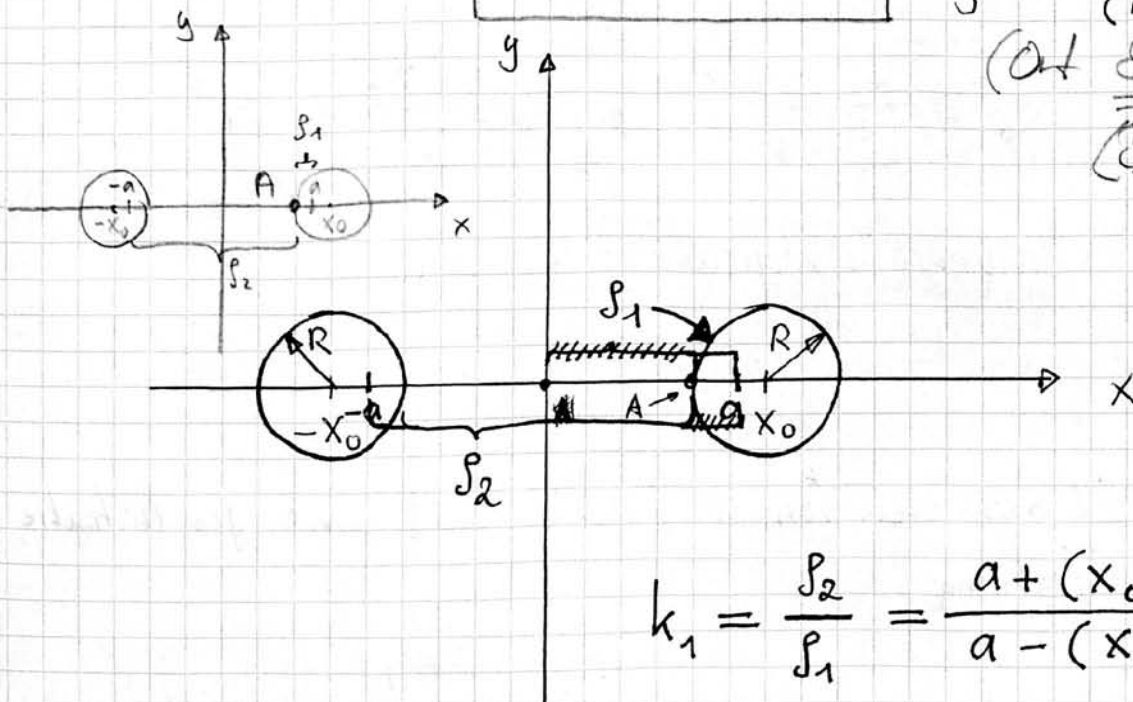
Vgl. KGÜ

$$x_0^2 = a^2 + R^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x_0^2 - R^2}$$

sollte man
sich merken!
(FS)

(Ort Ersatzlinienladung
(Bildladung))



$$k_1 = \frac{p_2}{p_1} = \frac{a + (x_0 - R)}{a - (x_0 - R)}$$

15.12.09

ET III

Zahlenbeispiel:

$$X_0^2 = a^2 + R^2$$

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

$$k_1 = \frac{4m + (5m - 3m)}{4m - (5m - 3m)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Vgl.: } k_1 &= \frac{X_0}{R} + \sqrt{\frac{X_0^2}{R^2} - 1} \\ &= \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

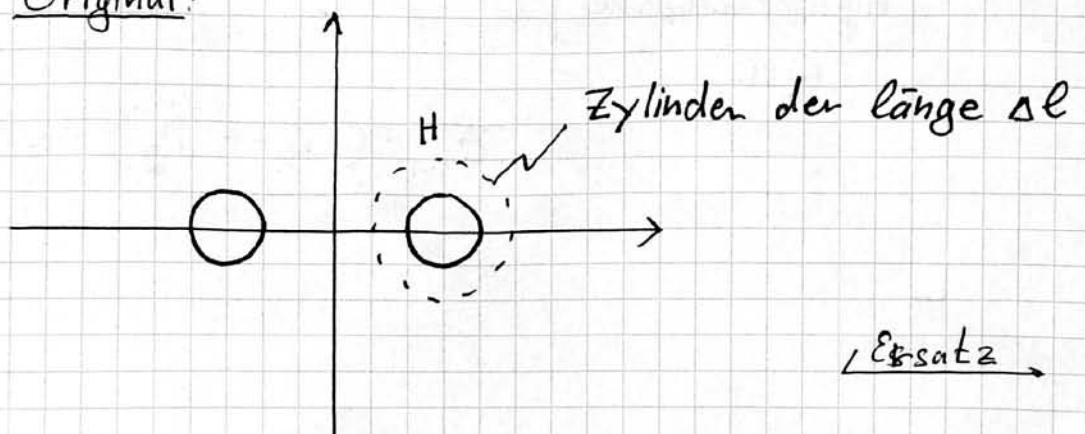
b) Potenzial laut Aufgabe 16:

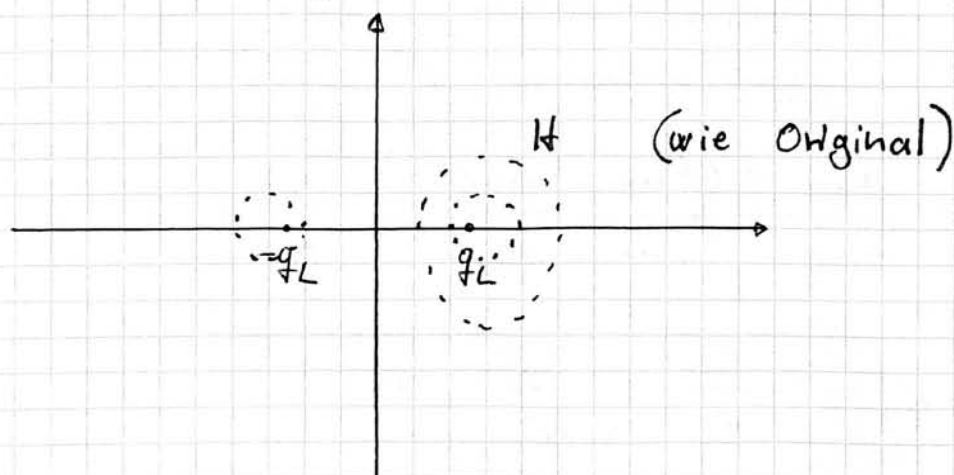
$$\varphi_e(k) = \frac{q_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln k$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= \varphi_{e1} - \varphi_{e2} = \varphi_e(k_1) - \varphi_e(k_2) \\ &= \frac{q_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln \underbrace{\left(\frac{k_1}{k_2} \right)}_{=k_1^2} = \frac{q_L}{\pi \cdot \epsilon_0} \ln k_1 \end{aligned}$$

Zylinderladung ΔQ mit Gauß'schen Satz der Elektrostatik.

Original:



Ersatzanordnung:

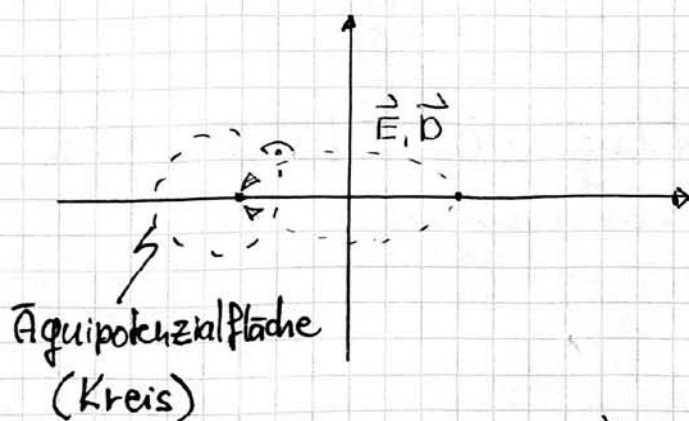
Flächung des
Linienleiters
muss der
des Zylinders
entsprechen

$$\Delta Q = \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_L \cdot \Delta l$$

beide Beiträge der
Boden- und Deckelfläche

$$\Rightarrow \Delta Q = q_L \cdot \Delta l$$

⌈ Oberflächenladung auf dem Zylinder?



$$\vec{e}_{n1} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_e$$

L

15.12.09

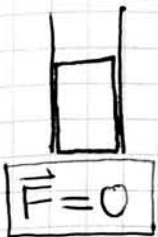
ET III

$$\begin{aligned}
 c) \quad C' &= \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{\Delta Q}{u_{12} \cdot \Delta l} \\
 &= \frac{q_L}{\frac{q_L}{\pi \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{R} + \sqrt{\frac{x_0^2}{R^2} - 1}\right)} \\
 &= \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left[\frac{x_0}{R} + \sqrt{\frac{x_0^2}{R^2} - 1}\right]} \quad (FS)
 \end{aligned}$$

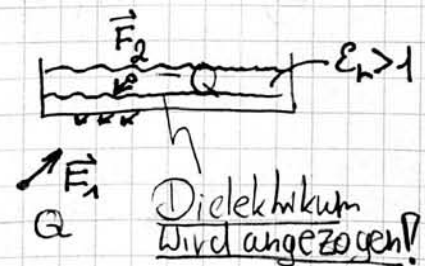
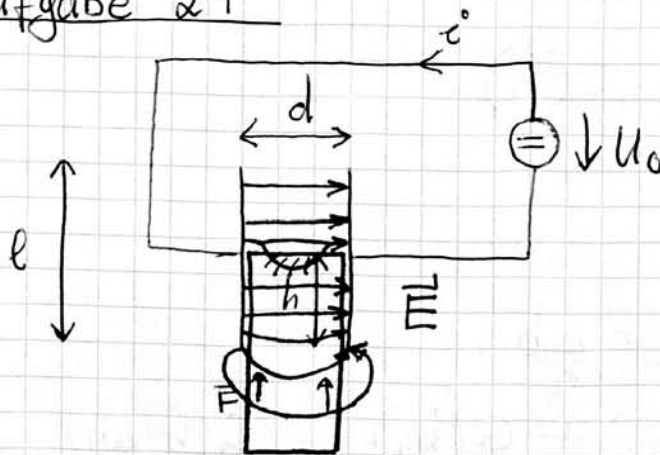
(Vgl. Skript 2-60)

Falls Dielektrikum
komplett im C

$$\Rightarrow \vec{F} = 0$$



Aufgabe 21

Merke

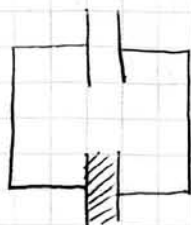
Hier ist $u_0 = \text{const}$
also $Q \neq \text{const}$

Falls keine Spannungsquelle mehr angeschlossen:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow Q &= \text{const} \\
 u &\neq \text{const}
 \end{aligned}$$

L

a)



Parallelschaltung
zweier Kondensatoren

$$C(h) = \epsilon_0 \cdot \frac{\ell(\ell-h)}{d} + \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\ell \cdot h}{d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 \cdot \ell}{d} [\ell + (\epsilon_r - 1)h]$$

$$W_{el,c} = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot C(h)$$

$$Q(h) = U_0 \cdot C(h)$$

b)

$$h_1 = h$$

$$h_2 = h + \Delta h$$

$$\Delta Q = Q(h_2) - Q(h_1) = Q(h + \Delta h) - Q(h)$$

$$= U_0 \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot \ell}{d} (\epsilon_r - 1) \cdot \Delta h \quad \text{also } \Delta Q \neq f(h)$$

$$\Delta W_Q = U_0 \cdot \Delta Q > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Spannungsquelle} \\ \text{leistet Energie Arbeit} \end{array} \right\}$$

(Allgemein; Arbeit um Ladung q im E -Feld zu verschieben)

$$\Delta W_{12} = q \cdot U_{12}$$

15.12.09

ET III

c) Betrachte abgeschlossenes System:

$$W_{\text{nachher}} = W_{\text{vorher}} - \overbrace{\int \vec{F} d\vec{s}}^{= W_{\text{mech}}}$$

↑
Kraft aus Sicht des Systems

hier:

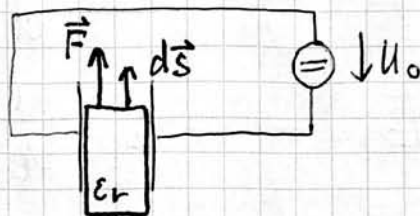
Kraft und
Bewegung
gleichgerichtet! →

$$W_{\text{el,c}}(h + \Delta h) = W_{\text{el,c}}(h) + \underbrace{\Delta W_Q}_{> 0} - \overbrace{W_{\text{mech}}}^{= dW_e}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{mech}} &= W_{\text{el,c}}(h) + \Delta W_Q - W_{\text{el,c}}(h + \Delta h) \\ &= \frac{1}{2} U_0 \left[\underbrace{Q(h) - Q(h + \Delta h)}_{-\Delta Q} \right] + U_0 \cdot \Delta Q \\ &= \frac{1}{2} U_0 \Delta Q = \frac{U_0^2}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot l}{d} \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot \Delta h > 0 \end{aligned}$$

d.h. Kraft und Richtung stimmen aus Sicht des Kondensators überein!

d.)

Kraft F auf das Dielektrikum:

$$F = \frac{dW}{ds}, \text{ hier } F = \frac{\Delta W_{\text{mech}}}{\Delta h}$$

$$F = \frac{\Delta W_{\text{mech}}}{\Delta h}$$

$$= \frac{u_0^2}{2} \frac{\epsilon_0 \cdot l}{d} (\epsilon_r - 1) = \text{const.}$$

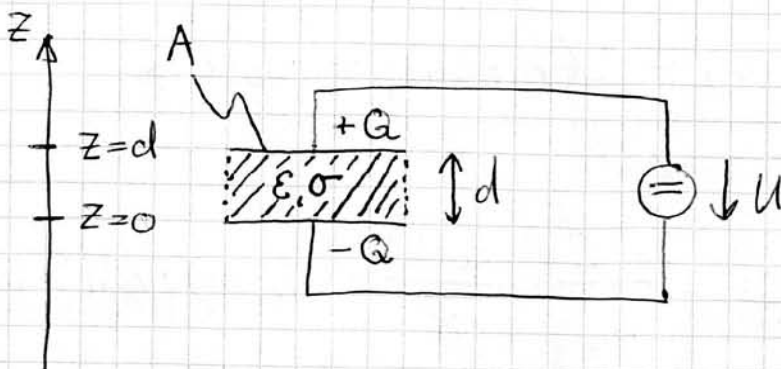
Das Dielektrikum
wird mit konstanter
Kraft in den C
hineingezogen

(Das Dielektrikum mit
dem höheren ϵ_r
dominiert)

Vgl. Aufgabe 20

$$F_z = \frac{dW_{\text{mech}}}{dz} = - \frac{dW_{\text{el}}}{dz}$$

Aufgabe 23



a.) $\vec{E} = - \frac{u}{d} \cdot \vec{e}_z$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = - \sigma \frac{u}{d} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = - \epsilon \cdot \frac{u}{d} \cdot \vec{e}_z$$

Falls σ
nicht gegeben
 $\Rightarrow$ idealer
Konden
sator

$$(\sigma = 0)$$

Selber
Feldverlauf für
 $\vec{E}$

15.12.09

ET III

Das E-Feld ist
dasselbe, egal
was für ein
Material zw.
den Platten
ist!

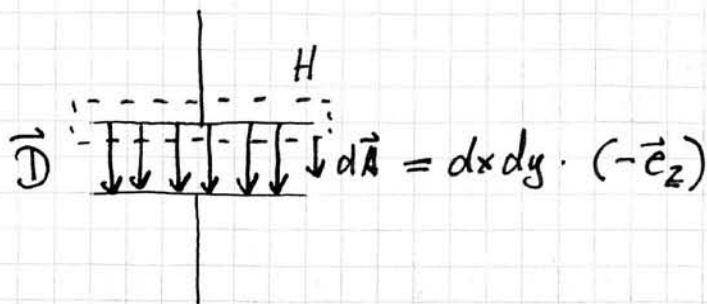
(auch $\sigma = 0$
 $\sigma \neq 0$)
(außer $\sigma \rightarrow \infty$)

Vgl.
Formel für
selbe Anordnung

Während
Strom fließt
sitzt $\pm Q$
fest auf
Platten

klar
machen

b)



$$Q = \iint_H \vec{D} d\vec{A} = \iint_{A_{\text{BODEN}}} (-\epsilon \cdot \frac{u}{d} \cdot \vec{e}_z) (-dx dy \vec{e}_z)$$

$$= \epsilon \cdot \frac{u}{d} \cdot A$$

$$C = \frac{Q}{u} = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

$$R = \frac{u}{I} = \frac{u}{\iint_{A_{\text{BODEN}}} \vec{J} d\vec{A}} = \frac{u}{\sigma \cdot \frac{u}{d} \cdot A} = \frac{d}{\sigma \cdot A}$$

Bei derselben Anordnung
gilt (mit σ, ϵ):

$$R = \frac{\epsilon}{\sigma \cdot C} \quad \text{FS}$$

c)

Ladungserhaltung:

$$I = - \frac{dQ}{dt}$$

für eine geschlossene Hüllfläche.

(Kontinuitätsgleichung)

$$I + \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \iint_H \vec{J} d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iint_H \vec{D} d\vec{A} = 0$$

(Vgl.: 3.6.1)

$$\oint_H (\vec{J} + \frac{d}{dt} \vec{D}) d\vec{A} = 0$$

$$= A \cdot \sigma \cdot E(t) + A \cdot \epsilon \cdot \frac{d}{dt} E(t) = 0$$

$$\Rightarrow \text{DGL} : \frac{\sigma}{\epsilon} E(t) + \frac{d}{dt} E(t) = 0$$

$$\text{Ansatz: } E(t) = E_0 \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

für $t \geq t_0$ gilt:

Einsetzen in DGL:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} E(t) - \frac{1}{\tau} E(t) = 0$$

$$\text{durch Vergleich: } \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

bei
allen
Kondensator
gleich, falls
ganzer
Innenraum
ausgefüllt

Anfangsbedingung:

$$E_0 = E(t=t_0) = \frac{U}{d}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(t) = \frac{U}{d} \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}(t-t_0)} \cdot (-\vec{e}_z)}}$$

für $t \geq t_0$

22.12.09

ET III

bzgl. $Q(t)$

$$Q = D \cdot A$$

$$\Rightarrow Q(t) = \epsilon \cdot E(t) \cdot A = \frac{u \cdot \epsilon \cdot A}{d} \cdot e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}(t-t_0)}$$

für $t > t_0$

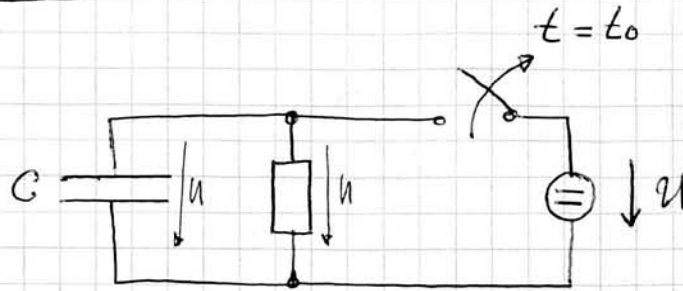
ESB:

Wichtig:

Rund C

Parallel

(selbe Spannung)



Aufgabe 19

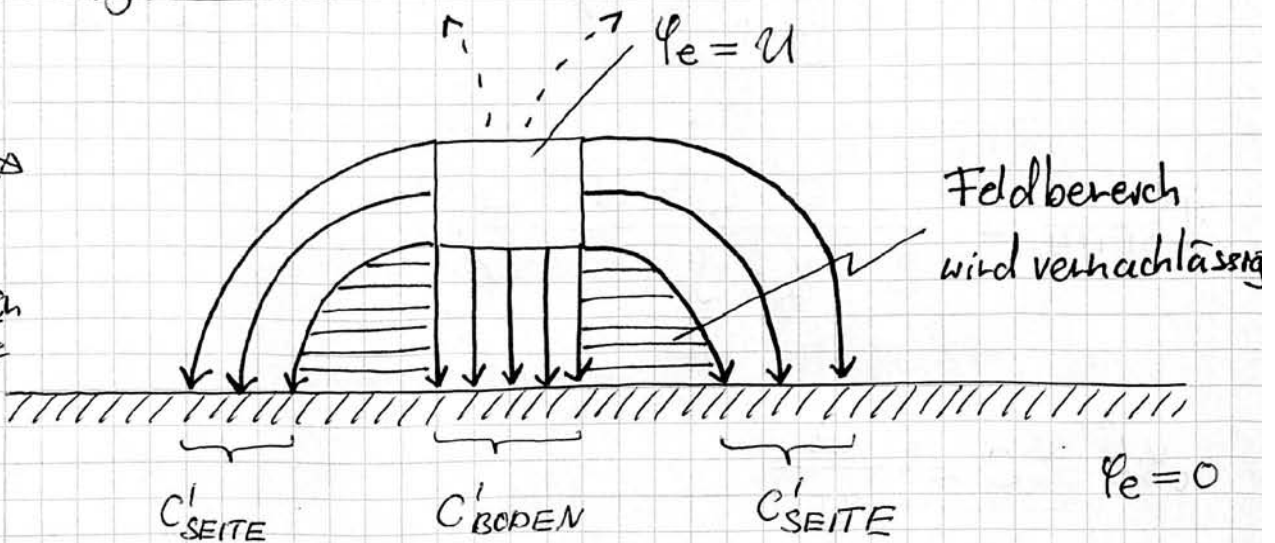
Parallel
Schaltung!

Da über allen
"C's" gleiche

Spannung!

Kapazitäts-
belag

Kapazität
pro Längeneinheit

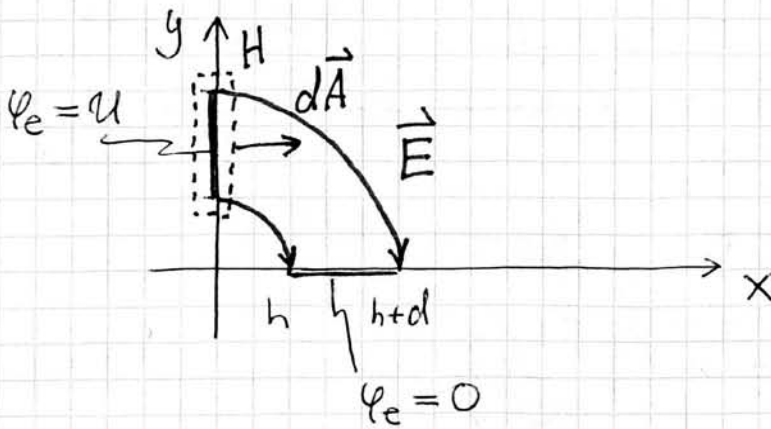


Näherung: $C' \approx C'_{BODEN} + 2 \cdot C'_{SEITE}$

$$C'_{BODEN} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{uL}{h} \cdot \frac{1}{e} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{u}{h}$$

$$= 56,7 \frac{pF}{m}$$

C'_{SEITE} entspricht dem Winkellkondensator aus Aufgabe 17 mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



$$\vec{E}_{\text{SEITE}} = - \frac{U}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\phi \quad \text{für} \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \quad h < \rho < h+d$$

$$\vec{D}_{\text{SEITE}} = - \frac{\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot U}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\phi$$

Alles aus der Übung ist als bekannt einzustufen

Mit $C = \frac{Q}{U}$

(Klausur)

$$C'_{\text{SEITE}} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U} \cdot \frac{1}{l}$$

$$d\vec{A} = \rho \cdot d\phi \cdot (-\vec{e}_\phi)$$

(Es geht auch $d\vec{A} = dz \cdot dy \cdot \vec{e}_x$)

{ Hier stimmen die Richtungen überein!
 $\vec{e}_x = -\vec{e}_\phi$

22.12.09

ET III

$$C'_{SEITE} = \frac{1}{l \cdot u} \cdot l \cdot \int_{s=h}^{h+d} \left(- \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot u}{\pi/2 \cdot s} \cdot \vec{e}_\phi \right) \cdot (-ds \cdot \vec{e}_\phi)$$

direkte
Benutzung
der Formel
erlaubt

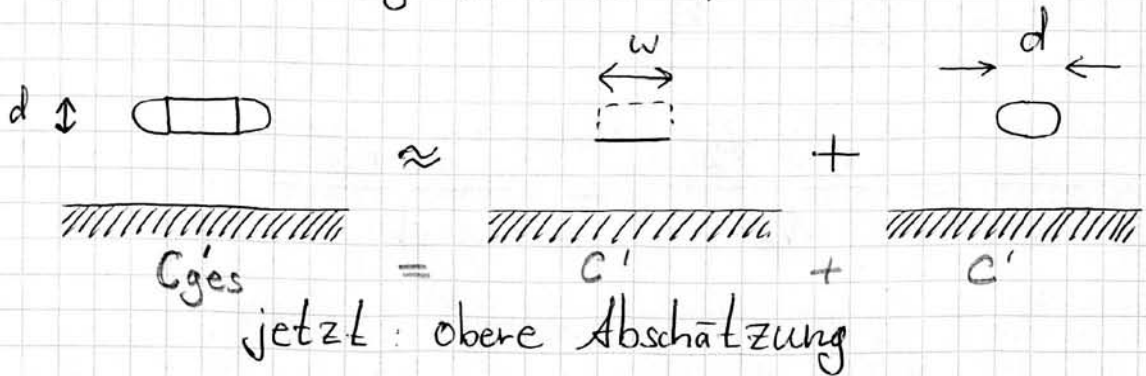
$$= \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{h+d}{h} \right) \approx \underline{\underline{15,6 \frac{pF}{m}}}$$

Also

$$C' \approx \underline{\underline{88 \frac{pF}{m}}}$$

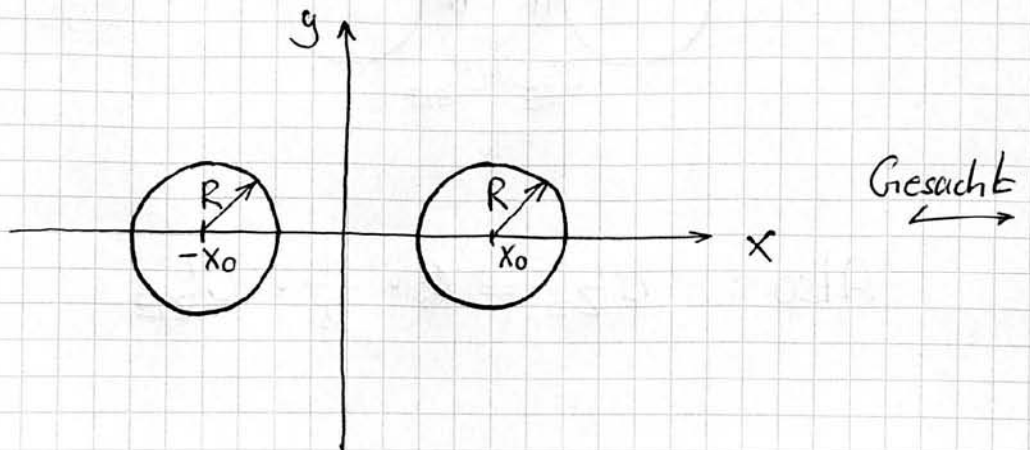
(untere Abschätzung, tatsächlicher Wert größer)

b) Modellierung des Streufeldes:

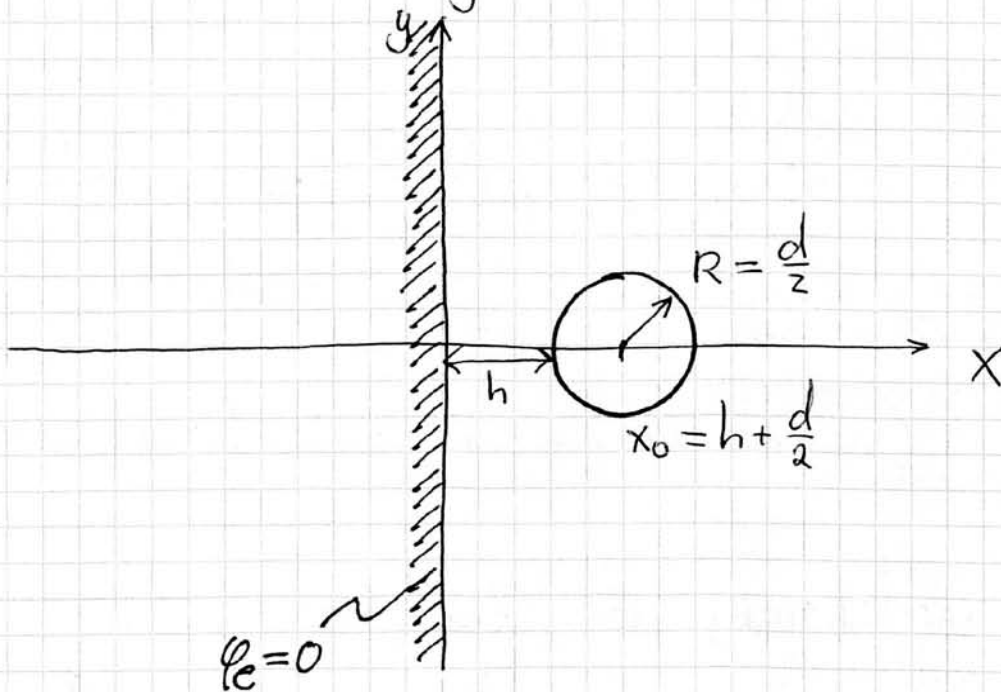


aus Aufgabe 18c) ist bekannt:

C'_{zz} zwischen zwei Zylindern
mit den Achsenabstand $2z_0$

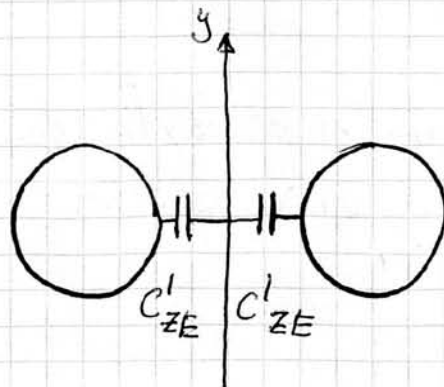


Gesucht: C'_{ZE} zwischen einem der Zylinder und der y - z -Ebene.



$$\rightarrow \frac{x_0}{R} = \frac{h + d/2}{d/2} = \frac{2h + d}{d}$$

C'_{ZZ} entspricht der Reihenschaltung zweier C'_{ZE} .



$$\text{Also: } C'_{ZZ} = \frac{1}{2} \cdot C'_{ZE}$$

22.12.09

ET III

$$\Rightarrow C'_{ZE} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\ln \left[\frac{2h+d}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h+d}{d} \right)^2 - 1} \right]}$$

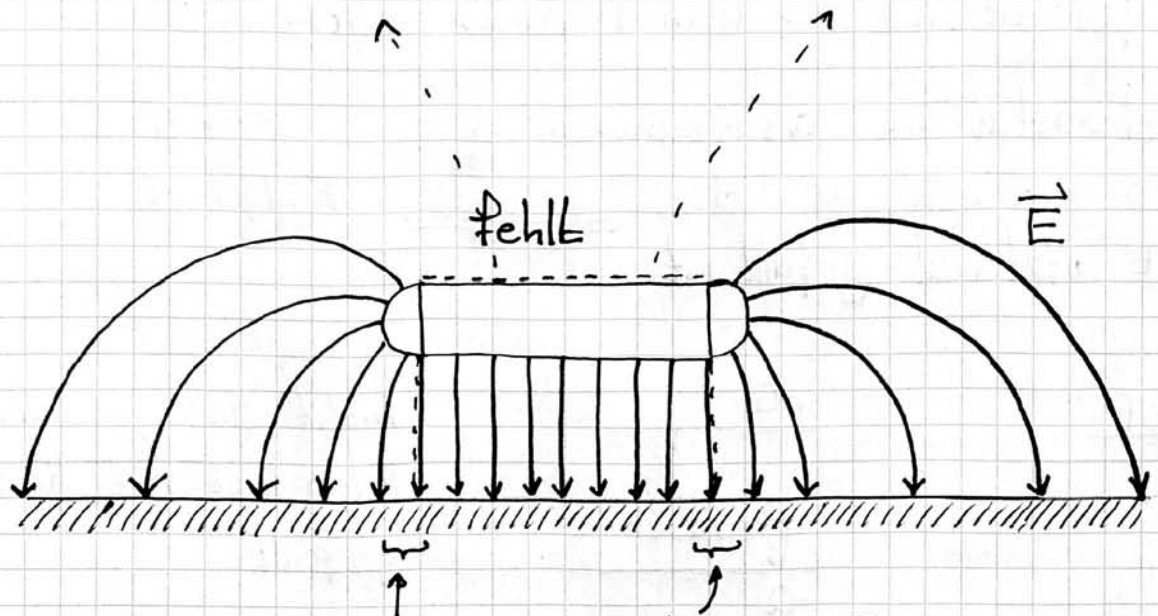
$$\approx \underline{\underline{126,2 \frac{\text{pF}}{\text{m}}}}$$

c)

$$C'_{\text{BODEN}} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{W}{h} = 56,7 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

$$C' = C'_{\text{BODEN}} + C'_{ZE} = \underline{\underline{182,9 \frac{\text{pF}}{\text{m}}}}$$

Auch hier wird das Feld der Anordnung nicht korrekt modelliert:

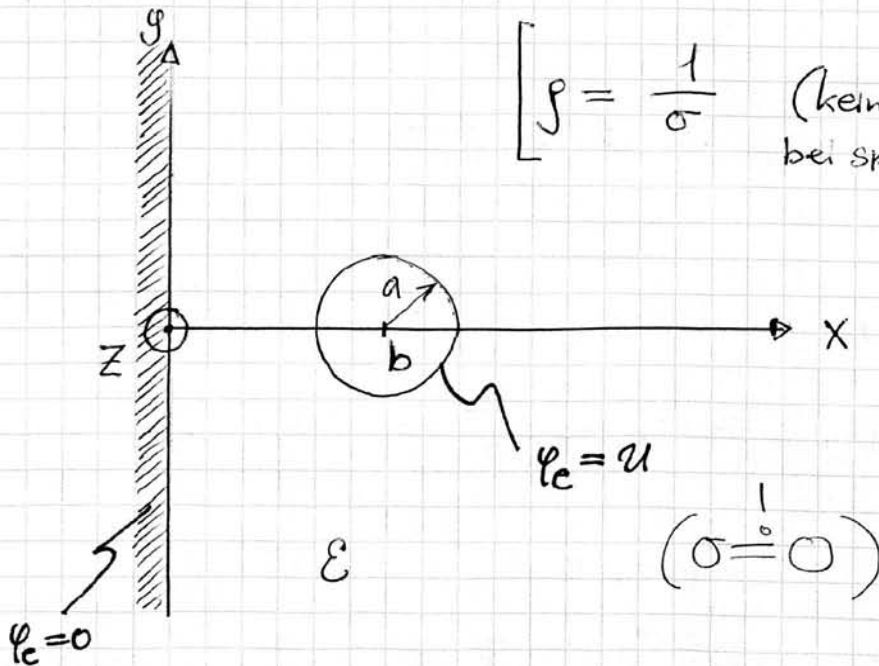


muss eig.
immer
gelten! }

Hier müsste E_z stetig sein!
($E_{z1} = E_{z2}$)

Aufgabe 25

a)



$$\left[\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{kein Indexe}) \right]$$

bei spez. Leitfähigkeit

$$(\sigma = 0)$$

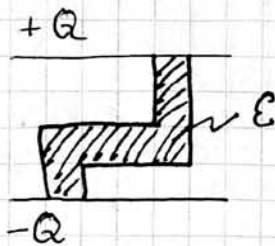
Elektrostatik $\Rightarrow$ kein fließender Strom

Elektrostatistische Ersatzanordnung :
das geht nur, weil das gesamte Feldgebiet
mit Material gefüllt ist.

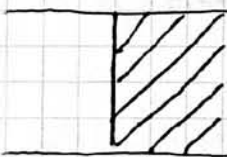
$\rho \sim \epsilon$
Feldgebiet

Wichtig

Bsp.



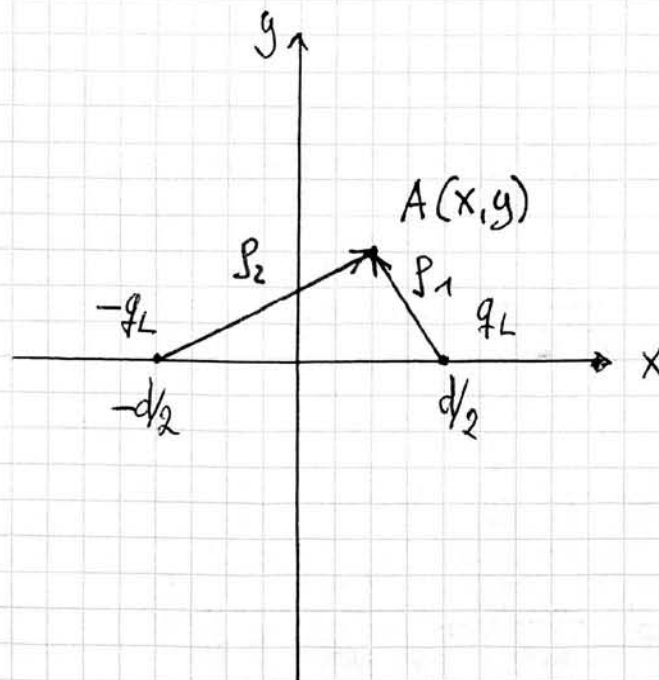
nicht das gesamte
Feldgebiet mit Material
gefüllt.



22.12.09

ET III

b) für die Ersatzanordnung
Vgl.: Aufgabe 16



2 Unbekannte: q_L, d

$$k = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$$

Bestimmung von d , Vgl. KGÜ

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & R^2 & = & x_m^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \left(\frac{d}{2}\right)^2 & & a^2 & & b^2 \end{array}$$

Mit d sind auch r_1 und r_2 bekannt.

$$r_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

22.12.09

ET III

Aus Aufgabe 18:

Spannung zwischen zwei Zylindern:

$$u_{12} = \frac{q_L}{\pi \cdot \epsilon_0} \ln(k_1)$$

hier: $u = \frac{1}{2} u_{12}$

mit $k_1 = \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$

Vgl.: Aufgabe 16:

$$\varphi_e = \frac{q_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

daraus folgt u als Potenzialdifferenz:

$$\Rightarrow q_L = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(k_1)} \cdot u$$

$$\Rightarrow \varphi_e = \frac{u}{\ln(k_1)} \cdot \cancel{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = u \quad \left. \vphantom{\frac{u}{\ln(k_1)}} \right\} \text{ muss rauskommen}$$

22.12.09

ET III

weiter zu b)

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E}$$

Möglich wäre:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } \varphi_e \\ &= -\vec{e}_x \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} - \vec{e}_y \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}\end{aligned}$$

Vgl.: (Linienpol) Aufgabe 9

Dort war der Abstand $= 2a$

(hier: d)

$$E_x = \frac{u \cdot d}{\ln(k_1)} \cdot \frac{x^2 - y^2 - \frac{1}{4}d^2}{\rho_1^2 \rho_2^2}$$

$$E_y = \frac{u \cdot d}{\ln(k_1)} \cdot \frac{2xy}{\rho_1^2 \rho_2^2}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{u \cdot d}{\rho \cdot \ln(k_1)} \cdot \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2} \left[(x^2 - y^2 - \frac{1}{4}d^2) \cdot \vec{e}_x + 2xy \vec{e}_y \right]$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

c) Ansatz: Leitwert pro Länge über
die Analogie: Kapazität pro Länge

Aufgabe 18: $C' = \frac{q_L}{u} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(k_1)}$

Vgl (3.6.A)

Leitwert pro Länge: $G' = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot C'$

$$= \frac{1}{\rho \cdot \epsilon} \cdot C'$$
$$= \frac{2\pi}{\rho \cdot \ln(k_1)}$$

$$\Rightarrow I' = G' \cdot u = \frac{u}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\ln(k_1)}$$

22.12.09

ET III

Aufgabe 22

leitend oder
nicht leitend egal
=> Dipol
(Kugel)

a) Lösungsansatz für $\vec{E}$ in Kugelkoordinaten

- innen: ($|\vec{r}| = r < R$):
homogenes Feld

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_i \cdot \vec{e}_z \\ &= E_i (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

- außen ($r > R$): Überlagerung

$$\begin{aligned}\vec{E}_a &= \vec{E}_0 + \vec{E}_p \\ &= E_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &\quad + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} (2\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

div, rot,
grad

in Kartesischen
koordinaten
(oder FS)

(Vgl. Aufgabe 14)

12.01.10

ET III

b) zwei Unbekannte: E_i, p

benötigt zwei Gleichungen aus den
Grenzflächenbedingungen

$$1) E_{i,t} = E_{a,t}$$

hier $E_\phi = 0$ innen + außen

(d.h. $\vec{E} \cdot \vec{e}_\phi = 0$, man bekommt keine Gleichung)

$$E_{i,\theta}(r=R) \stackrel{!}{=} E_{a,\theta}(r=R)$$

$$-E_i \cdot \sin \theta = -E_0 \cdot \sin \theta + \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \sin \theta$$

$$\forall \theta \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow E_i = E_0 - \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1)$$

2) Normalenkomponente von $\vec{D}$

▼ keine freien Flächenladungen vorhanden! (Nur Polarisationsladungen)

$$D_{i,n} \stackrel{!}{=} D_{a,n} \quad \text{auf dem Rand der Kugel}$$

Aus Materialgleichung:

$$\vec{D}_i = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}_i \Leftrightarrow (\underline{\underline{\vec{D}_i = \vec{E}_i \cdot \epsilon_0 + \vec{P}}})$$

$$\vec{D}_a = \epsilon_0 \cdot \vec{E}_a$$

$$D_{i,n} = \vec{D}_i \cdot \vec{e}_r$$

$$D_{a,n} = \vec{D}_a \cdot \vec{e}_r$$

$$\text{Damit } D_{i,r}(r=R) \stackrel{!}{=} D_{a,r}(r=R)$$

In Klausur:

Nur sauber rechnen, nicht über Sinn nachdenken!

dielektrisch (nichtleitende) Kugel

12.01.10

ET III

$$\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E_i \cdot \cos \theta = \epsilon_0 \cdot E_0 \cdot \cos \theta + \epsilon_0 \cdot \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R^3} 2 \cos \theta$$

$$\forall \theta \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \epsilon_r \cdot E_i = E_0 + \frac{P}{2\pi \epsilon_0 R^3} \quad (2)$$

$$c) \quad 2 \cdot (1) + (2) :$$

$$(2 + \epsilon_r) E_i = 3E_0 \Leftrightarrow E_i = \frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0$$

Einsetzen in (1)

$$\frac{3}{2 + \epsilon_r} E_0 = E_0 - \frac{P}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$

Einheiten

$$[\epsilon_r] = 1$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} 4\pi R^3 \epsilon_0 E_0$$

$\vec{p}$ entspricht dem Gesamtdipolmoment der polarisierten Kugel

$$\text{Es ist } \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

Hier ist $\vec{P}$ in der Kugel homogen, also ist $\vec{p} = V_{\text{KUGEL}} \cdot \vec{P}$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \underbrace{(\epsilon_r - 1)}_{\chi_e} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_i \quad (2.5.9)$$

$\underbrace{\frac{4}{3} \pi R^3}_{V_{\text{KUGEL}}} \underbrace{\chi_e}_{= \vec{P}} = \vec{p}$

d.) Betrachte $\epsilon_r = 1$

d.h. $\epsilon_{\text{innen}} = \epsilon_{\text{außen}} = \epsilon_0$

Die Kugel hat keinen Einfluss auf das äußere Feld $\vec{E}_0$.

$$E_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \cdot E_0 = E_0$$

D-Feldlinien
beginnen und
enden nur
an
freien Elektroden

$$p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \cdot 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0 = 0$$

e.) Betrachte $\epsilon_r \rightarrow \infty$

$$E_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \cdot E_0 \xrightarrow{\epsilon_r \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{Nicht } \vec{D}\text{-Feld})$$

$$p = \xrightarrow{\epsilon_r \rightarrow \infty} 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0$$

Analog zu einer metallisierten Kugel:

12.01.10

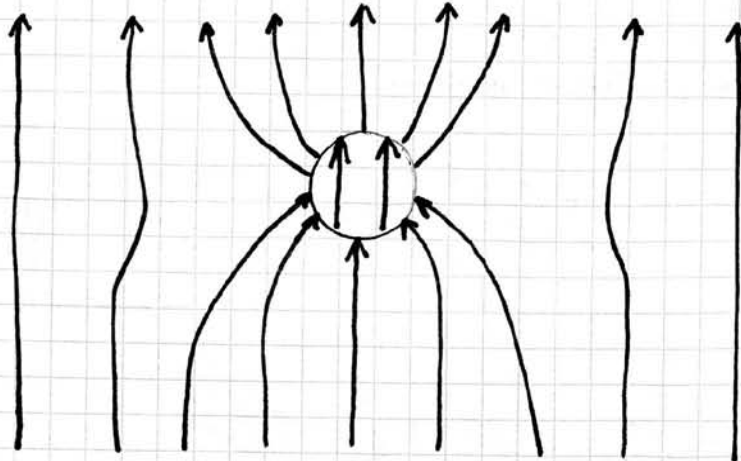
ET III

Müssen nicht
senkrecht
darauf sein!
(da Dielektrikum)

Ergänzung

Feldlinienbilder

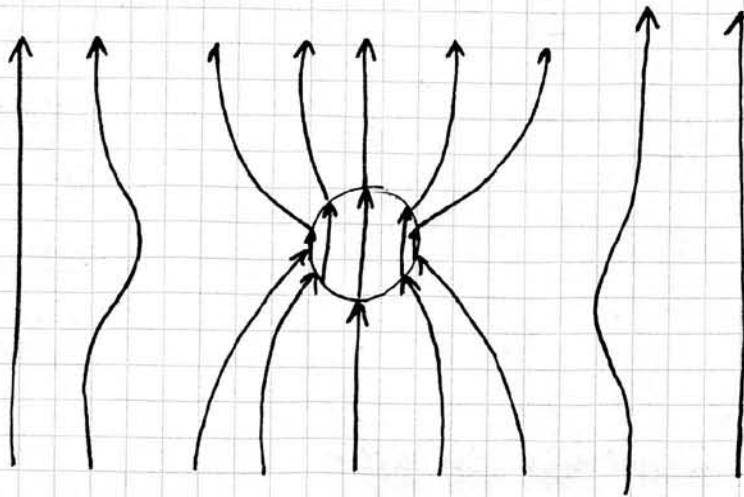
(dielektrische Kugel)



$\vec{E}$

Beim $\vec{E}$ -Feld
beginnen und
enden Feldlinien
am Dielektrikum!

E-Feldlinien
müssen nur
auf idealen
Leitern senkrecht
auf Oberflächen
sein!



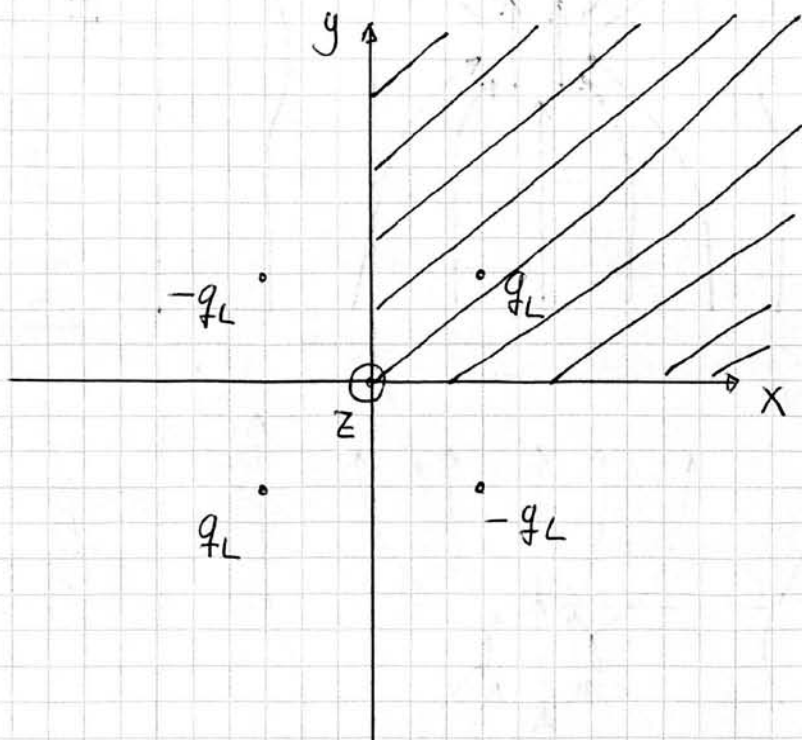
$\vec{D}$

Keine beginnenden oder endenden
 $\vec{D}$ -Feldlinien, da keine freien Ladungen
(an Grenzfläche)

Aufgabe 24

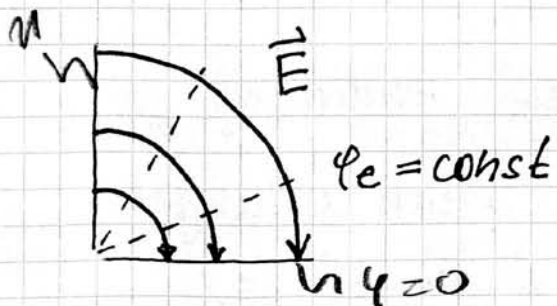
Nur Skizze, selbst rechnen

a)

Lösungs-
gebiet

Im Lösungsgebiet
dürfen keine
Bildladungen sein,
sonst Spiegelung
nicht möglich!

b) Teilproblem: Winkelkondensator



$$\varphi_{\text{ges}} = \varphi_{e,a} + \varphi_{e,b}$$

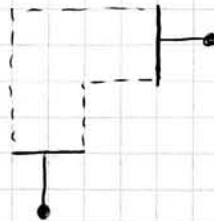
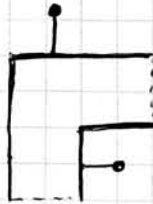
12.01.10

ET III

Aufgabe 26„analoges Problem“ : $\sigma \leftrightarrow \epsilon$

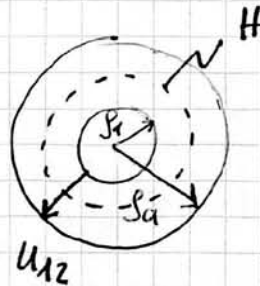
„duale Struktur“ :

Die duale
Struktur der
dualen Struktur
ist die primale
Struktur.



(Vertauschen von Feldlinien und Äquipotenziallinien)

a) Betrachte zunächst vollständigen Zylinderkondensator:



Schwerpunkts
prinzip

{ Das Feld zwischen den Elektroden entspricht dem Feld einer Linienladung in der z-Achse.

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{e}_s}{s}$$

$$C_{\text{voll}} = \frac{\oint_H \vec{D} d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} d\vec{s}} = \frac{q_L \cdot l}{U_{12}}$$

$$U_{12} = \int_{s=r_i}^{s=r_a} E_s(s) ds = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{\text{voll}} = \frac{2\pi \epsilon \cdot \ell}{\ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)}$$

(hier: Parallelschaltung) $C = C_{\text{halb}} = \frac{1}{2} C_{\text{voll}} = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot \ell}{\ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)}$

Merke
Vorgehen

$$\Rightarrow C' = \frac{C}{\epsilon} = \frac{\pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)}$$

▼ Streufelder vernachlässigt

b) Analoges Problem:

(gleiches E-Feld, anderes Material)

$$R \sim \frac{1}{\epsilon}$$

(mit Leitfähigkeit σ)

$$R' = \frac{R}{\epsilon} \sim \frac{1}{\epsilon^2} \quad (\text{nicht sinnvoll})$$

[man möchte ℓ loswerden]
(bei R')

$$G \sim \ell \quad (\text{analog zu } C \sim \ell)$$

$$G' = \frac{G}{\epsilon} \neq f(\ell) \Rightarrow G' \text{ sinnvoll}$$

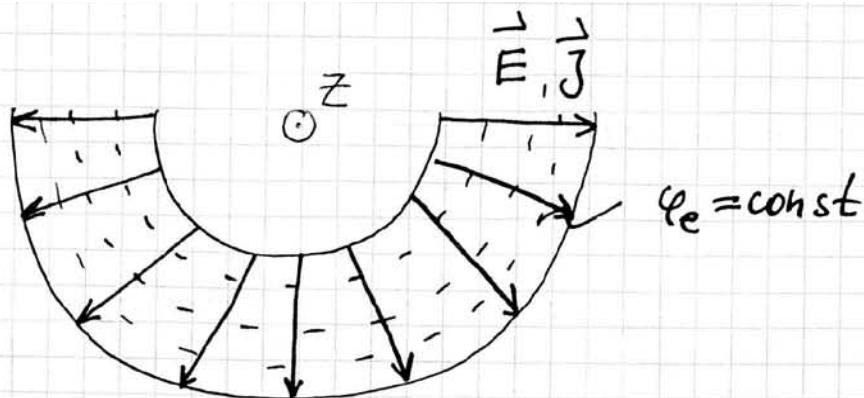
$$\text{Aus } \frac{\epsilon}{\sigma} = R \cdot C = \frac{1}{G} \cdot C = \frac{C' \cdot \ell}{G' \cdot \ell} = \frac{C'}{G'}$$

$$\Rightarrow G' = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot C' = \frac{\pi \sigma}{\ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)}$$

1201.10

ET III

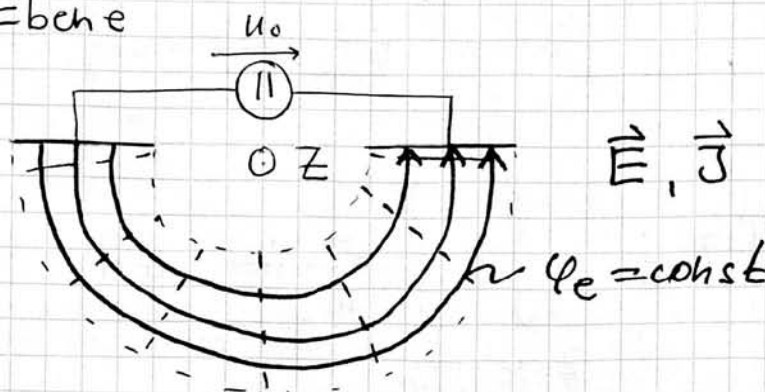
c)



Merke { $\vec{E}$ - Feld ist für G' (mit σ) und C' (ohne σ) gleich! ∇

d) Duale Struktur:

Vertauschung von Feldlinien und den Schnittlinien der Äquipotenzialflächen in der x-y-Ebene



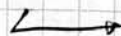
Richtung der Feldlinien abhängig von Richtung von u_0 ∇

e) Vgl. Winkelkondensator

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(s) \cdot \vec{e}_\phi$$

$$u_0 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = E_\phi(s) \cdot \pi \cdot s$$

Integration entlang eines Kreisbogens : $s = \text{const} \Rightarrow E_\phi = \text{const}$



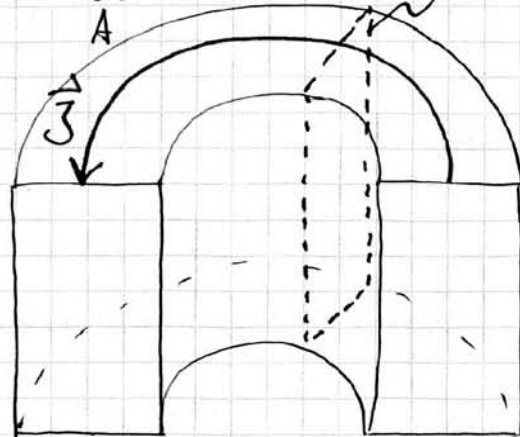
Also $E_\phi(s) = \frac{u_0}{\pi \cdot s}$

120110

ET III

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \frac{u_0}{\pi \cdot s} \vec{e}_\phi$$

$$I = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$



$$d\vec{A} = dz \cdot ds \cdot \vec{e}_\phi$$

$$I = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \int_{z=0}^l \int_{s=s_i}^{s_a} \frac{\sigma \cdot u_0}{\pi s} ds dz$$

$$= l \cdot \frac{\sigma \cdot u_0}{\pi} \ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)$$

$$G'_{e)} = \frac{G}{l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{I}{u_0} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{\pi} \ln\left(\frac{s_a}{s_i}\right)}}$$

12.01.10

ET III

Vergleich mit der Originalanordnung b):

Formelblatt
 $(R' = \frac{R}{\epsilon})$
 [einsetzen]

$$\frac{G'_e}{\sigma} = \frac{\sigma}{G'_b}$$

$$\text{analog } \frac{C'_e}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{C'_b}$$

Aufgabe 27

Geschwindigkeit
 (E_{kin}) ist
 unabhängig
 vom Abstand
 der Elektroden

$$W_{el} = -e \cdot (-U) \stackrel{!}{=} \frac{m_0 v_0^2}{2}$$

19.01.10

ET III

unabhängig
 vom Abstand

- a) Beschleunigung des Elektrons zwischen den Gittern, d.h. eine Umwandlung potenzieller Energie in kinetische Energie:

$$-e(\varphi_{\text{links}} - \varphi_{\text{rechts}}) = -e(-U) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m_0 v_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}} \quad ; \quad \vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_x$$

- b.) Lorenzkraft $\vec{F}_m$ bei $t = 0+$

$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= -e \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{B}_0) = -e v_0 B_0 (\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_z}_{= -\vec{e}_y}) \\ &= \underline{e v_0 B_0 \cdot \vec{e}_y} \end{aligned}$$

c) Zur Erinnerung:

$$W_{\text{mech}} = \int \vec{F} d\vec{s}$$

19.01.10

ET III

Da stets $\vec{F}_m \perp \vec{v}$, ändert sich ~~stets~~ nur die Richtung, aber nicht der Betrag von $\vec{v}$.

Weiterhin gilt: $F_m \sim v \cdot B_0 = \text{const}$

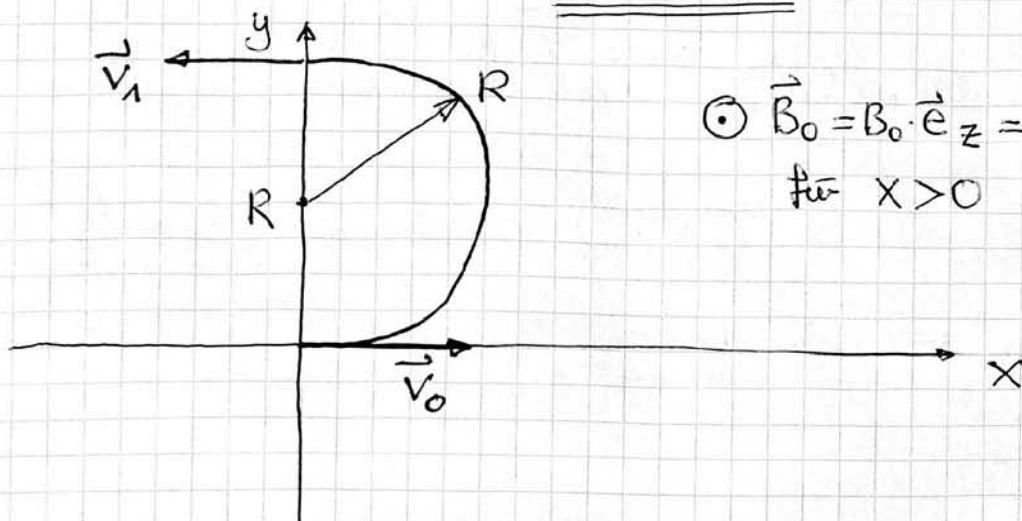
d.h. der Betrag der Zentripetalkraft ist konstant.

$\Rightarrow$ die Bahn ist kreisförmig

$$\vec{F}_z \stackrel{!}{=} \vec{F}_m \quad \text{also} \quad \frac{m_0 v_0^2}{R} \stackrel{!}{=} e v_0 B_0$$

$$R = \frac{m_0 v_0^2}{e v_0 B_0} = \frac{m_0 v_0}{e B_0}$$

} merke
Abhängigkeiten



19.01.10

ET III

d.) Austritt aus dem Magnetfeld:
 bei $x=0$, $y = 2R = 2 \cdot \frac{m_0 v_0}{e \cdot B_0}$, $z=0$

Austrittsgeschwindigkeit:

Geschwindigkeiten
 betragsmässig
 gleich

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_0 = \sqrt{\frac{2e \cdot \mathcal{U}}{m_0}} (-\vec{e}_x)$$

Flugzeit im Magnetfeld:

$$t_1 = \frac{\pi \cdot R}{v_0} = \frac{\pi \cdot m_0}{e \cdot B_0}$$

e.) Die kinetische Energie ändert sich nicht
 auf der Kreisbahn, da stets

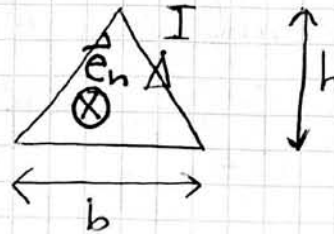
$$dW = \vec{F}_m d\vec{s} = 0$$

$$E_{kin}(t=t_1) = E_{kin}(t=t_0) = \frac{1}{2} m_0 \cdot v_0^2$$

$$= e \cdot \mathcal{U}$$

Aufgabe 29

Leiterschleife



19.01.10

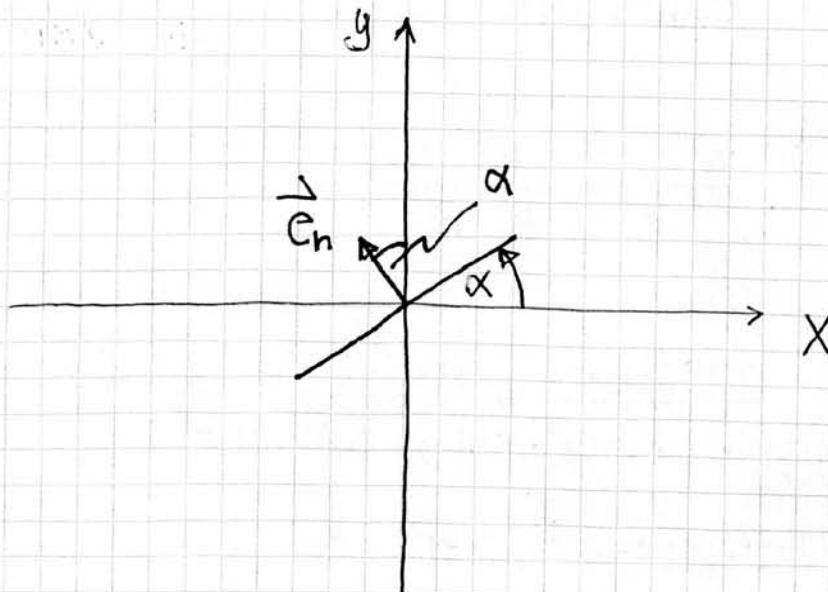
ET III

$\vec{e}_n$ und I
im

Rechtsschraubensinn

Magnetische Moment:

$$\boxed{\vec{m} = A \cdot I \cdot \vec{e}_n} \quad \text{FS}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot I \cdot \vec{e}_n$$



$\vec{e}_n = \vec{e}_\phi$
(hier)

Drehmoment
zeigt in

Drehachse ∇
(Rechtssinn)

$\alpha = \phi$

$$\vec{e}_n = -\sin \alpha \cdot \vec{e}_x + \cos \alpha \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_\phi(\alpha)$$

a) $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$ ist homogen, daher gilt

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$(\text{hier: } L_z = \vec{L} \cdot \vec{e}_z)$$

unabhängig
von der Form
der Schleife ∇
($\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$)

Formel NUR gültig
falls $\vec{B}$ homogen

19.01.10

ET III

$$\vec{L} = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot l \cdot B_0 [(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \times \vec{e}_x]$$

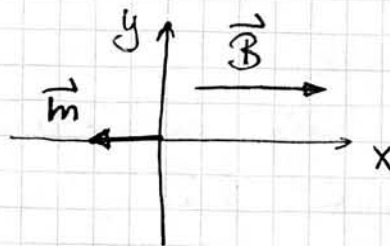
$$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot l \cdot B_0 \cdot \cos \alpha (-\vec{e}_z)$$

Merke { $\vec{m}$ wird in Richtung von $\vec{B}$ gedreht. (strebt danach)

Analog el
Dipol $\vec{p}$ im
el. Feld $\vec{E} \vec{\nabla}$

b.) $L_z \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \alpha = 0$

also $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{m} \perp \vec{B}}$
labile Lage



$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{m} \uparrow \vec{B}}$
Stabile Lage

"Pendelt
sich ein"

Stabiles Gleichgewicht:

Kleine Auslenkungen, werden durch ein
Gegendrehmoment korrigiert:

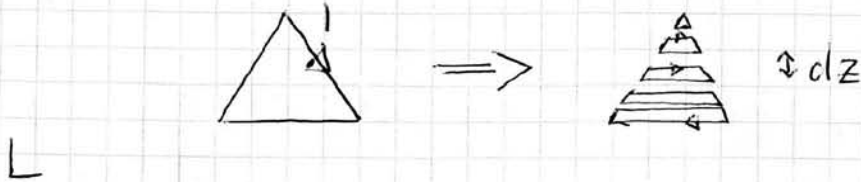
$$L_z(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) < 0$$

$$\frac{d}{d\alpha} L_z(\alpha) = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \underbrace{l \cdot B_0}_{>0} \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{<0}$$

erfüllt für $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$

c) Jetzt $\vec{B} \neq \text{const}$ ($\vec{B} = B_0 (1 + \frac{z}{h}) \vec{e}_x$) 19.01.10
ET III

Wenn man weiter mit $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{B}$ rechnen will:



Ansatz:

1) Unterteilung der Leiterschleife in Wegstücke $d\vec{s}$

2) Bestimmung der Teilkräfte

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B}) \quad \left. \vphantom{d\vec{F} = I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B})} \right\} \text{Lorenzkraft}$$

3) Bestimmung der Teildrehmomente

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

↑ Hebelarm bzgl. der Drehachse,
hier: Ursprung

4) Integration über alle $d\vec{L}$

5) hier: alles von $\vec{L}$ außer L_z
wegstreichen, bzw. $L_z = \vec{L} \cdot \vec{e}_z$

Hebelarm: $\vec{r} = \underbrace{\rho \cdot \vec{e}_\rho}_{\text{Hebelarm}} + \underbrace{z \cdot \vec{e}_z}_{\text{kein Beitrag zu } L_z}$

Hebelarm $\hat{=}$ Abstand zu
z-Achse

kein Beitrag
zu L_z (Vgl. Kreuzprodukt)

1901.10
ET III

Nur die
 ϕ -Komponente
der Kraft
trägt zum
Drehmoment
bei.

Wegen $\vec{e}_s \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z$ (L auf Hebelarm!)
trägt nur die Kraftkomponente
 dF_ϕ zu L_z bei

Jetzt gesucht: Welche Komponenten von
 $d\vec{s}$ und $\vec{B}$ tragen zu F_ϕ bei?

Wegen $\vec{e}_z \times \vec{e}_s = \vec{e}_\phi$ sind dies die beiden
Kombinationen

$ds_z \cdot B_s$
oder $ds_s \cdot B_z$
entfällt, da $\vec{B}$ keine
z-Komponente hat.

Auf den Schenkeln der Leiterschleife
ist $d\vec{s} = ds \cdot \vec{e}_s + dz \cdot \vec{e}_z$

Das Leiterstück der Dreiecksbasis
(Länge b) trägt wegen $d\vec{s} = ds \cdot \vec{e}_s$
nicht zu L_z bei.

d.) Umwandlung von $\vec{B}$ in
Zylinderkoordinaten:

19.01.10

ET III

$$\vec{B} = B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \vec{e}_x = B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) (\vec{e}_\varphi \cos \phi - \vec{e}_\phi \sin \phi)$$

$$dF_\phi = l \cdot dz \cdot B_{\phi} = l \cdot dz \cdot B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos \phi$$

$$dL_z = s \cdot dF_\phi \quad (|\vec{L}| = |s| \cdot |\vec{F}| \cdot \underbrace{|\sin \alpha|}_{=1})$$

auf den Schenkeln ist $s = s(z) = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)$

Hebelarm

$$dL_z = \frac{b}{2} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot l \cdot dz \cdot B_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos \phi$$

Kontrolle
durch
Randpunkte

e.) Begründung siehe c)

$$L_z = 2 \int_{z=0}^h dL_z = - \frac{2}{3} \cdot h \cdot b \cdot l \cdot B_0 \cdot \cos \alpha$$

für $\phi = \alpha$

$$\vec{F} = l \cdot (\vec{e} \times \vec{B})$$

Durch Vektoren dividieren
verboten!

($\hat{=}$ statt dessen Koeffizientenvergleich)

$$L_z = \int_{z=h}^0 dL_z(\phi=\alpha) + \int_{z=0}^h dL_z(\phi=\alpha+\pi)$$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos \alpha$

$$= -2 \cdot \int_{z=0}^h dL_z(\phi=\alpha) = -b \cdot l \cdot B_0 \cdot \cos \alpha \left[z - \frac{z^3}{3h^2} \right]_{z=0}^h$$

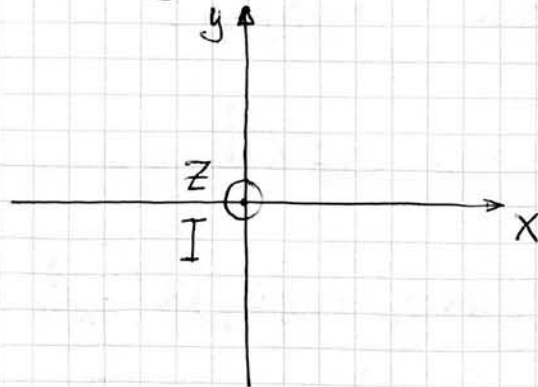
19.01.10 Aufgabe 28

ET III

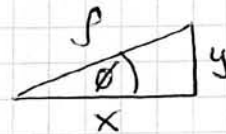
Vgl. A16 und Vgl 4-49 ff

Nur ein Leiter in der z-Achse:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$



$$r^2 = x^2 + y^2$$



$$\vec{e}_\phi = -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{H} &= \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)} (-\vec{e}_x \frac{y}{r} + \vec{e}_y \frac{x}{r}) \\ &= \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)} (-\vec{e}_x y + \vec{e}_y x) \end{aligned}$$

Verschiebung:

Ersetze l_0 durch l_1 und x durch $x+a$

Ersetze l_0 durch l_2 und x durch $x-a$

$$r_1^2 = (x+a)^2 + y^2 \quad ; \quad r_2^2 = (x-a)^2 + y^2$$

Vgl. 4.5.48 Seite 4-50

19.01.10

ET III

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \frac{I_1}{2\pi s_1^2} (-\vec{e}_x y + \vec{e}_y (x+a)) + \frac{I_2}{2\pi s_2^2} (-\vec{e}_x y + \vec{e}_y (x-a))$$

a) Definition der Feldlinie: $\left. \begin{array}{l} d\vec{s} \parallel \vec{H} \\ \Rightarrow d\vec{s} \times \vec{H} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{genauso wie} \\ \underline{\underline{\mathcal{E}\text{-Feld}}} \end{array}$

Ebene: $d\vec{s} \times \vec{H} = (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y) \times (H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y)$
 $= (dx H_y - dy H_x) \vec{e}_z \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow dx H_y = dy H_x$$

Vgl.: $\vec{E}$ -Feldlinien

26.01.11

ET III

b)

$$\int H_x dy = - \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{I_1 y}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{I_2 y}{(x-a)^2 + y^2} \right) dy$$

$$\int H_y dx = \frac{1}{2\pi} \int \left(I_1 \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + I_2 \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right) dx$$

Hinweis: $\int \frac{\overbrace{2y}^{f(y)}}{\underbrace{(x+a)^2 + y^2}_{f(y)}} dy = \ln |(x+a)^2 + y^2|$

26.01.10

ET III

$$\int H_x dy = -\frac{1}{4\pi} \left(l_1 \cdot \ln \underbrace{|(x+a)^2 + y^2|}_{s_1^2} + l_2 \ln \underbrace{|(x-a)^2 + y^2|}_{s_2^2} \right) + C_1$$

$$\int H_y dx = \frac{1}{4\pi} \left(l_1 \cdot \ln \underbrace{|(x+a)^2 + y^2|}_{s_1^2} + l_2 \cdot \ln \underbrace{|(x-a)^2 + y^2|}_{s_2^2} \right) + C_2$$

Hinweis: $\ln s_1^2 = 2 \cdot \ln s_1$

Gleichsetzen:

$$-\frac{1}{2\pi} (l_1 \ln s_1 + l_2 \ln s_2) + C_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi} (l_1 \ln s_1 + l_2 \ln s_2) + C_2$$

$$\underbrace{C_1 - C_2}_{=: C_3} = \frac{1}{\pi} \cdot (l_1 \ln s_1 + l_2 \ln s_2)$$

Fall 1: $l_1 = l_2 > 0$

$$C_4 = l_1 (\ln s_1 + \ln s_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_4}{l_1} = \ln(s_1 \cdot s_2) \Rightarrow s_1 \cdot s_2 \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Fall 2: $l_1 = -l_2 > 0$

$$C_4 = l_1 (\ln s_1 - \ln s_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_4}{l_1} = \ln\left(\frac{s_1}{s_2}\right) \Rightarrow \frac{s_1}{s_2} \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Vgl. Aufgabe 16

c) Vgl. Blatt 3, Aufgabe 16

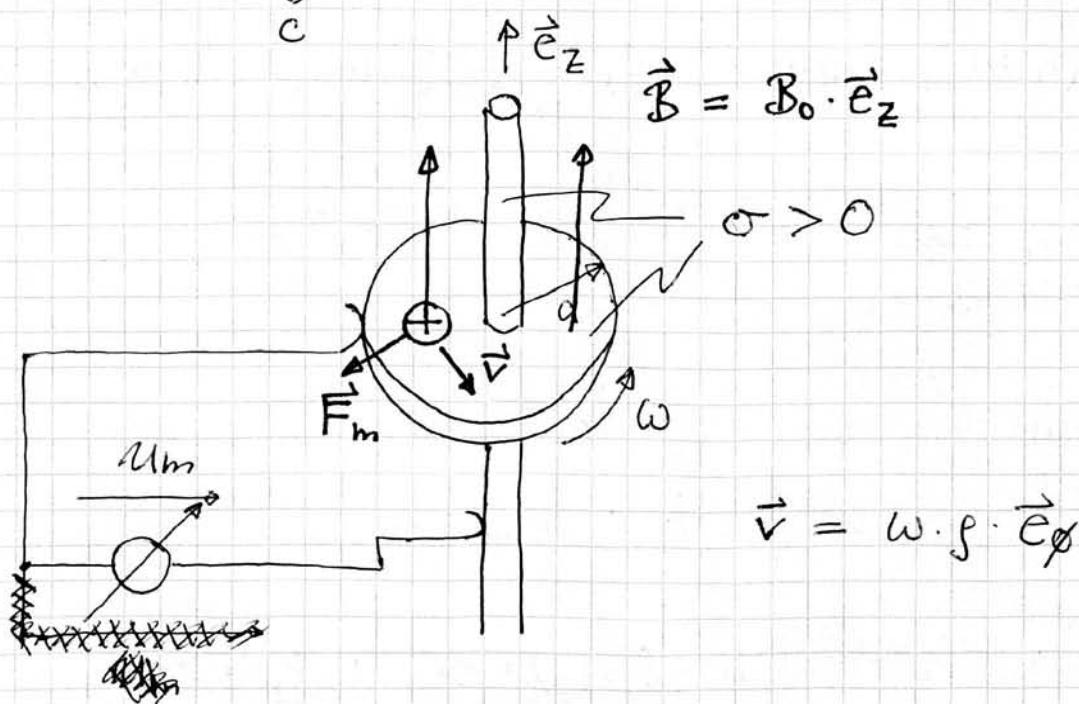
Die Schnittlinien der Äquipotenzialflächen mit der x-y-Ebene für $q_{L1} = -q_{L2}$ entsprechen den $\vec{H}$ -Feldlinien für $I_1 = -I_2$.

Appolonisch
Kreise
(4-51)

Barlow'sches Rad

(Vgl. Skript S. 5-19)

Problem: $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = U_{ind} = - \frac{d\phi}{dt}$



$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \\ &= q \cdot (\omega \cdot r \cdot \vec{e}_\phi) \times (B_0 \cdot \vec{e}_z) \\ &= q \cdot \omega \cdot r \cdot B_0 \cdot \vec{e}_s\end{aligned}$$

Falls nicht
im demselben
System
 $\Rightarrow$ Umrechnen!

26.01.10

ET III

Gesucht U_m

Problem: keine bewegte / deformierte oder von einem veränderlichen Fluss durchsetzte Schleife, also $\vec{B}(t)$.

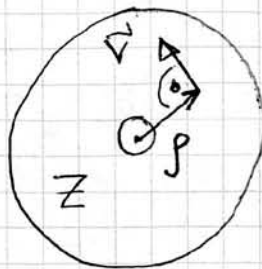
d.h. Ansatz $U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$

so nicht möglich

Lösung: Lorenzkraft auf mitrotierende Ladungsträger betrachten.

Scheibe von oben:

Kein Strom,
da Multimeter
sich wie offene
Klemmen
verhält!

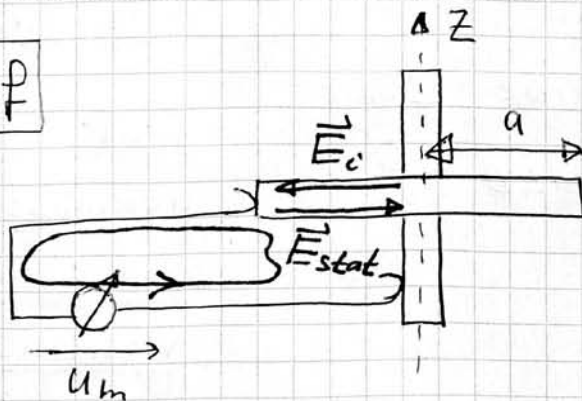


$$\vec{E}_c = \omega \cdot \rho \cdot B_0 \cdot \vec{e}_\rho$$

$$(\vec{E}_c = \vec{v} \times \vec{B})$$

Scheibe von der Seite:

Maschenumlauf
 $\vec{J} = 0 \Rightarrow - \frac{d\Phi}{dt}$



Kein Strom:

$$\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{ges} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{ges} = \vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_{stat}$$

$$= 0 \quad \underline{\underline{FS}}$$

Sobald $R \neq \infty$
gibt das nicht
mehr!

$$\vec{E}_c + \vec{E}_{stat} = 0$$

← In der Scheibe

In der Scheibe gilt:

$$\vec{E}_{\text{stat}} = -\vec{E}_i$$

$$\oint_C \vec{E}_{\text{stat}} d\vec{s} = 0 \quad \left. \vphantom{\oint_C \vec{E}_{\text{stat}} d\vec{s} = 0} \right\} \text{gilt allgemein!}$$

$$U_m + \int_{s=0}^a \vec{E}_{\text{stat}} d\vec{s} = 0$$

$$\Rightarrow U_m = \int_{s=0}^a \vec{E}_i d\vec{s} = \int_{s=0}^a E_{i,s}(s) ds$$

$$= \omega B_0 \cdot \int_{s=0}^a s' ds' = \omega B_0 \cdot \frac{a^2}{2}$$

Aufgabe 31

Das Bild der Aufgabe zeigt einen Zeitpunkt $t_{\text{BILD}} < 0$.

26.01.10

ET III

Integrationsweg
und d.h. geben
Richtung der
Induzierten
Spannung
fest!

(Rechtehandregel)

Nicht
allgemein
wichtig!

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{STAT}} d\vec{s}$$

(Allgemein)

Rückwirkung
|| schwach || Feld!

Falls Schleife
geschlossen und
induzierte Spannung
vorhanden, fließt
Strom!

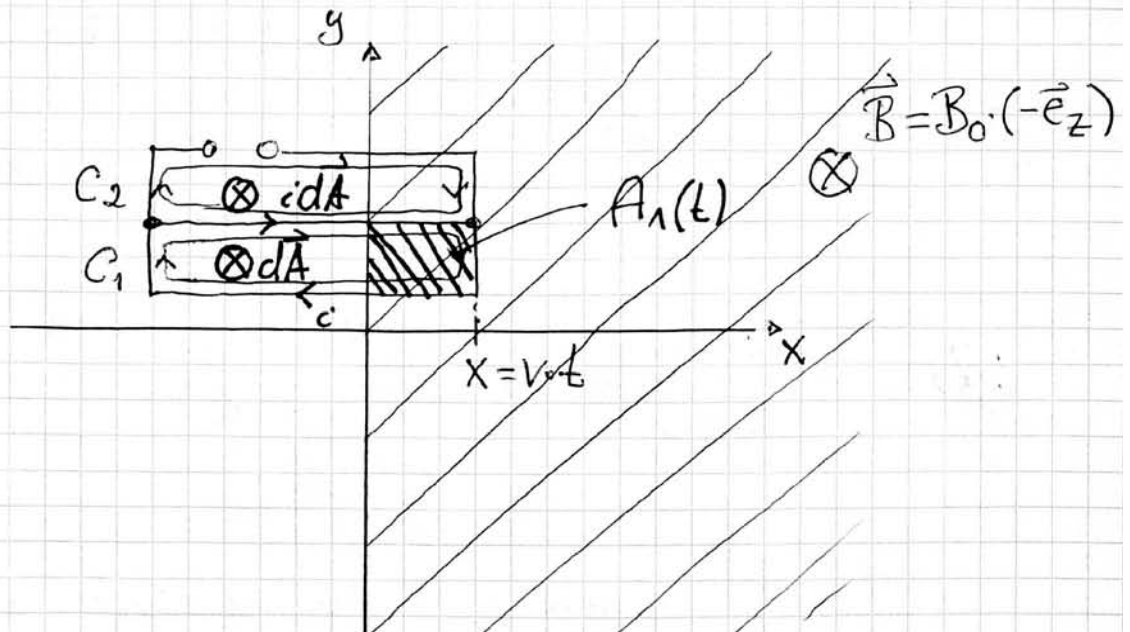
26.01.10

ET III

Mehrfach
Schleife

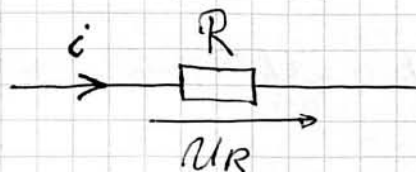
$$\psi = N \cdot \phi$$

↑
Anzahl
Schleifen



$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\phi_1(t)}{dt} = c (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

Richtung von c : VZS ← Richtung!



Rechte Seite des Induktionsgesetzes:

$$\vec{B} = \text{const} \quad \text{und} \quad \vec{B} \perp d\vec{A}$$

hier: lineare
Flächenzunahme!

$$\phi_1 = \iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 \cdot \underbrace{A_1(t)}$$

Vom magn. Fluss
durchsetzte Teilfläche

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot b \cdot a & \text{für } t \geq \frac{a}{v} \end{cases}$$

$$i \cdot R_{ges} = -\frac{d\phi_1}{dt} = \begin{cases} -B_0 \cdot b \cdot v & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \quad 261.70 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ET III}$$

$$i(t) = -\frac{B_0 \cdot b \cdot v}{R_{ges}} = \frac{1 \frac{Vs}{m^2} \cdot 0,1m \cdot 1 \frac{m}{s}}{20 \frac{V}{A}}$$

$$i(t) = \begin{cases} -5mA & \text{für } 0 \leq t \leq 0,3s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) obere Teilschleife:

$$\oint_{C_2} \vec{E} d\vec{s} = u(t) - i(t) \cdot R_1 = -\frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

Aus Symmetrie gilt: $\phi_2(t) = \phi_1(t)$

$$\Rightarrow u(t) = -\frac{d\phi_2(t)}{dt} + i(t) \cdot R_1$$

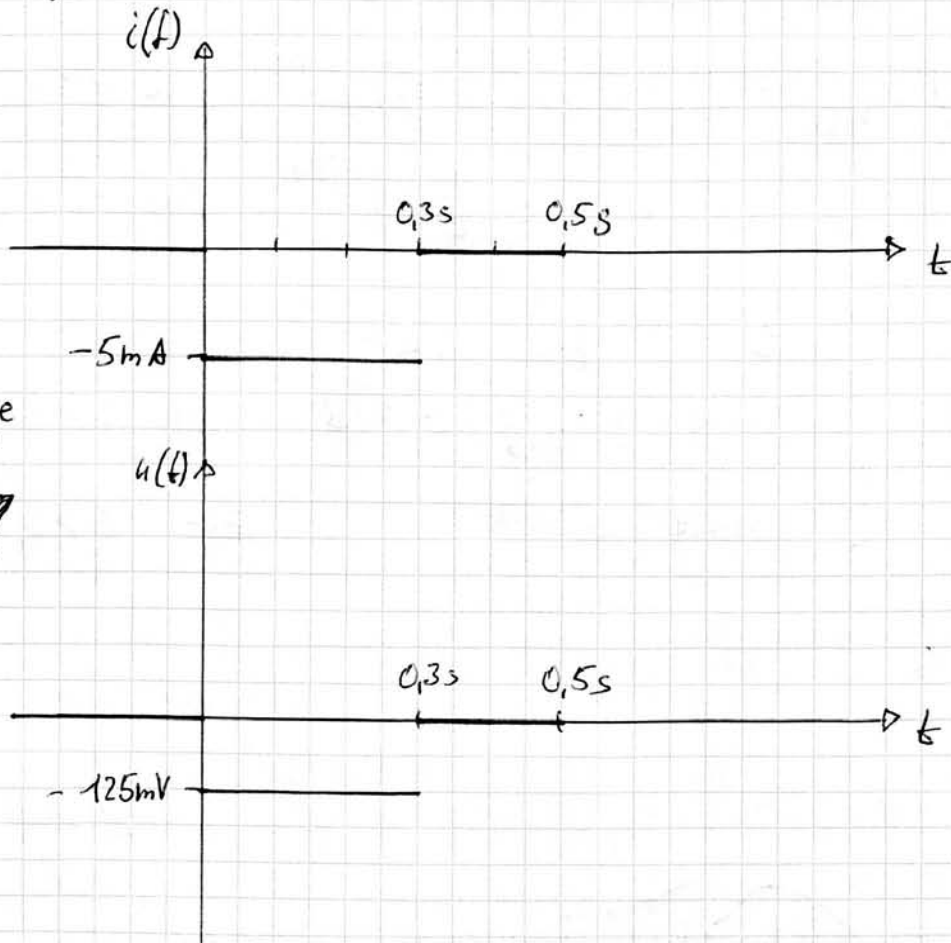
$$u(t) = \begin{cases} -B_0 \cdot b \cdot v - \frac{R_1}{R_{ges}} \cdot B_0 \cdot t \cdot v & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -125mV & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

26.01.10

ET III

c)



Lineare
Flusszunahme

$$\frac{d\phi}{dt} = \text{const}$$

da Fläche
Rechteck

d) Jetzt: $\phi_1(t) = \iint_{A_1(t)} \vec{B}(t) d\vec{A}$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot e^{-t/\tau} \cdot b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot e^{-t/\tau} \cdot b \cdot a & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}$$

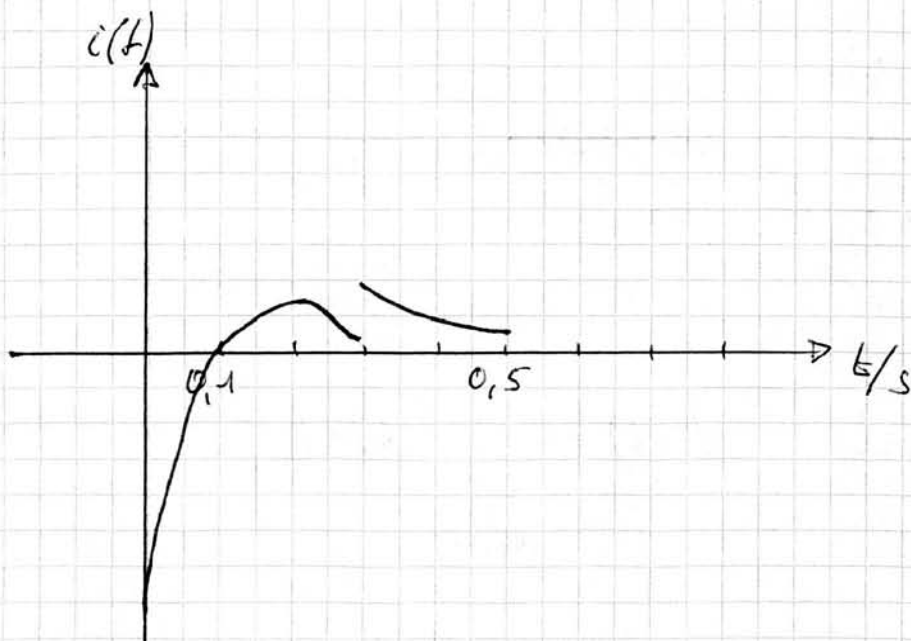
$$i(t) = -\frac{1}{R_{ges}} \cdot \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

26.01.10

ET III

$$i(t) = \frac{1}{R_{\text{ges}}} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot b \cdot v \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot b \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ -5 \text{ mA} \left(1 - \frac{t}{0,15}\right) e^{-\frac{t}{0,15}} & \text{für } 0 \leq t \leq 0,3 \text{ s} \\ 15 \text{ mA} e^{-\frac{t}{0,15}} & \text{für } t > 0,3 \text{ s} \end{cases}$$

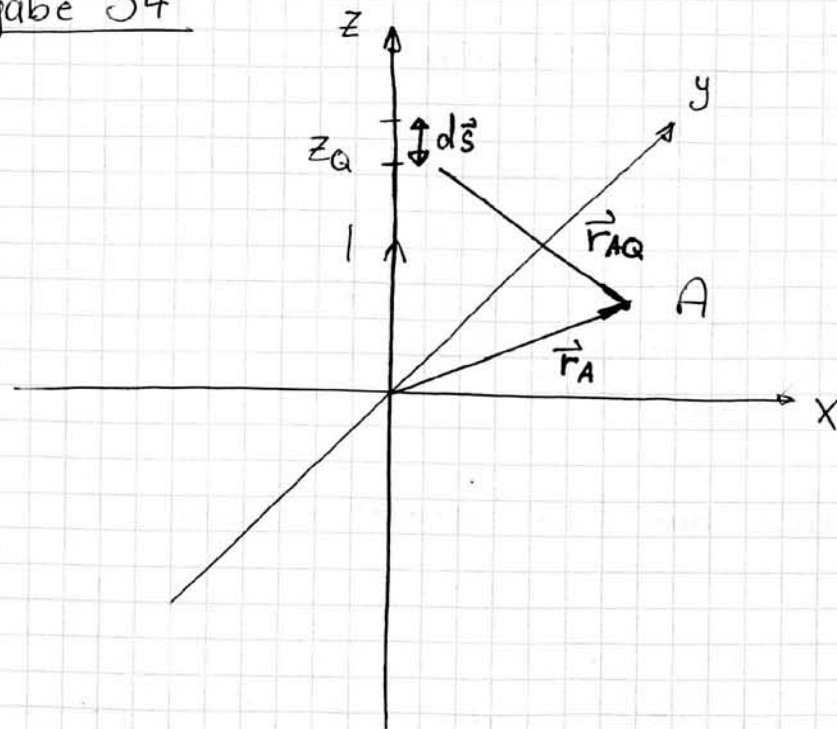


"Sprung"

02.02.10

Aufgabe 34

ET III



Genügt
zur
Berechnung
(Symmetrie)

{ Aufpunkt A befindet sich in der x-y-Ebene

Kann man
Z-Komponente
haben?

Es gilt: $\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{C_Q} \frac{d\vec{s}}{r_{AQ}}$ (4.10.12)

am Aufpunkt

C_Q ← umfasst den
(Quell-)linienstrom
einmal den Stromkreis
entlang

a) $\vec{r}_Q, \vec{r}_A$?

o.B.d.A. $z_A = 0$

$$\vec{r}_A = \rho_A \vec{e}_{\rho_A}$$

$$\vec{r}_Q = z_Q \vec{e}_z$$

$$C_Q: -\infty < z_Q < \infty$$

$$d\vec{s} = dz_Q \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = \rho_A \vec{e}_{\rho_A} - z_Q \vec{e}_z$$

$$r_{AQ} = \sqrt{\rho_A^2 + z_Q^2}$$

b) Zunächst Integration:

02.02.10

ET III

$$C_Q: -a < z_Q < a$$

$$\vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{z_Q=-a}^a \frac{dz_Q \vec{e}_z}{\sqrt{s_A^2 + z_Q^2}}$$

physikalisch nur für $a \rightarrow \infty$ sinnvoll

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mA} &= \frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\ln \left(\sqrt{s_A^2 + z_Q^2} + z_Q \right) \right]_{z_Q=-a}^a \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \ln \left(\frac{\sqrt{s_A^2 + a^2} + a}{\sqrt{s_A^2 + a^2} - a} \right) \end{aligned}$$

d) $a \gg r_A$

$$\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{für } x^2 \ll 1$$

Zähler und Nenner des $\ln(\dots)$ durch a teilen

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\left(\frac{s_A}{a}\right)^2 + 1} + 1}{\sqrt{\left(\frac{s_A}{a}\right)^2 + 1} - 1} &\stackrel{\frac{s_A}{a} \ll 1}{\approx} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{s_A}{a}\right)^2 + 1 + 1}^{\ll 1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{s_A}{a}\right)^2 + 1 - 1} \\ &\approx \frac{2}{\frac{1}{2}\left(\frac{s_A}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

02.02.10

ET III

damit

$$\vec{A}_{mA} = \vec{A}_m(\vec{r}_A) = \frac{\mu I}{4\pi} \vec{e}_z \lim_{a \rightarrow \infty} \left[2 \cdot \ln \left(\frac{2a}{s_A} \right) \right]$$

$$e) \vec{A}_{mA} = \frac{\mu I}{4\pi \frac{1}{2}} \vec{e}_z \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{2a}{s_0} \right) + \ln \left(\frac{s_0}{s_A} \right) \right]$$

 s_0 : willkürliche Konstantekonstant
bzgl. s_A

$$\vec{B}_A = \text{rot}_A \vec{A}_{mA}$$

≠ Konstante

$$\vec{A}_{mA} = \vec{C}_{\infty} + \frac{\mu I}{2\pi} \vec{e}_z \ln \left(\frac{s_0}{s_A} \right)$$

"Quellenanteil"

$$\vec{A}_{mA}' = \vec{A}_{mA} - \vec{C}_{\infty}$$

$$= -\frac{\mu I}{2\pi} \vec{e}_z \ln \left(\frac{s_A}{s_0} \right)$$

rot $\vec{A}_{mA}$ auch
mögl. dabei
fällt Quellenanteil
raus ∇

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_{mA}' = -\frac{\partial A_z'}{\partial s_A} \vec{e}_\phi$$

muss
rauskommen

$$= \frac{\mu I}{2\pi} \frac{\cancel{s_0}}{s_A} \frac{1}{\cancel{s_0}} \vec{e}_\phi = \frac{\mu I}{2\pi s_A} \vec{e}_\phi$$

vs.

Vgl. Potenzial φ_e einer unendlich langen
Linienladung q_L in der z -Achse.

Konstante

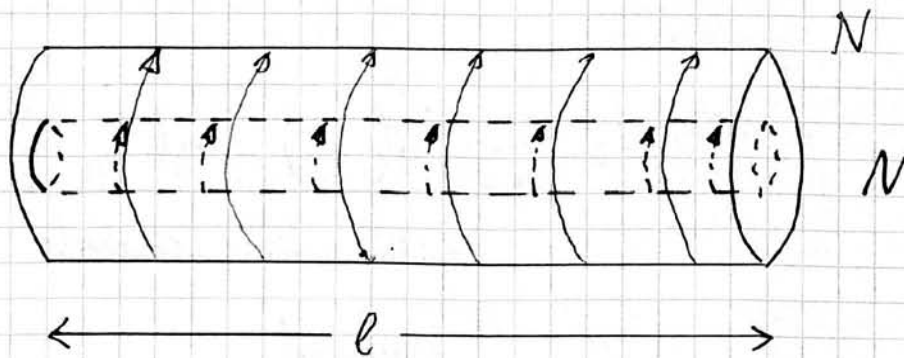
$$\varphi_e(\vec{r}_A) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{s_A}{s_0} \right)$$

Aufgabe 33

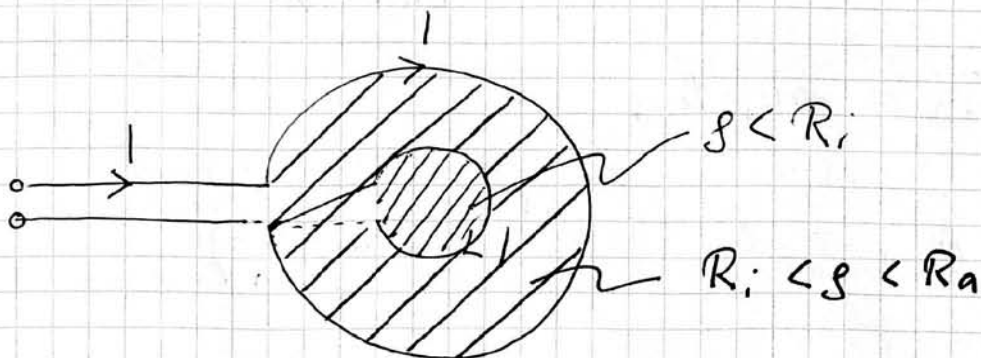
Seitenansicht

02.02.10

ET III



Reihenschaltung



(5.3.39) allg. $B = \mu_0 \cdot \frac{N I}{l}$

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \cdot \frac{(N_i + N_a) I}{l} \vec{e}_z & \text{für } 0 \leq s \leq R_i \text{ (///)} \\ \mu_0 \cdot \frac{N_a \cdot I}{l} \vec{e}_z & \text{für } R_i < s < R_a \text{ (///)} \end{cases}$$

hier: $N_i = N_a = N$

Annahme: $\vec{B} = 0$ für $s > R_a$
(außen!)

02.02.10

ET III

$$b) \quad d\vec{A} = dA \vec{e}_z$$

Gesamter Fluss in der inneren Lage: (///)

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{2N \cdot I}{e} \underbrace{\pi R_i^2}_{= A_{\text{innen}} (///)}$$

Gesamter Fluss in der äußeren Lage: (///)
+
(///)

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_{\text{ZW}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \underbrace{\Phi_1}_{= \text{innen} (///)} + \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{e} \underbrace{\pi (R_a^2 - R_i^2)}_{= A_{\text{außen}} (///)} \\ &= \mu_0 \frac{N \cdot I}{e} \pi (R_a^2 + R_i^2) \end{aligned}$$

gesamter
Fluss, welcher
die Fläche
 $A = \pi R_a^2$
durchfließt

nicht vergessen
Innenfläche
raus ziehen!

Verkettung
 $\Leftrightarrow$

Flußsumme
Strom und

Strom
summiert
Fluß



Φ_1 ist vollständig mit der inneren Lage (Wicklung) verkettet:

$$\Psi_i = N_i \cdot \Phi_1 = \underline{\underline{\frac{\mu_0 2N^2 I \pi R_i^2}{e}}}$$

Φ_2 ist vollständig mit der äußeren Lage verkettet:

$$\Psi_a = N_a \cdot \Phi_2 = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N^2 I \pi (R_a^2 + R_i^2)}{e}}}$$

$$c) \quad \Psi_{\text{ges}} = \Psi_i + \Psi_a = \mu_0 \frac{N^2 I}{e} \pi (3R_i^2 + R_a^2)$$

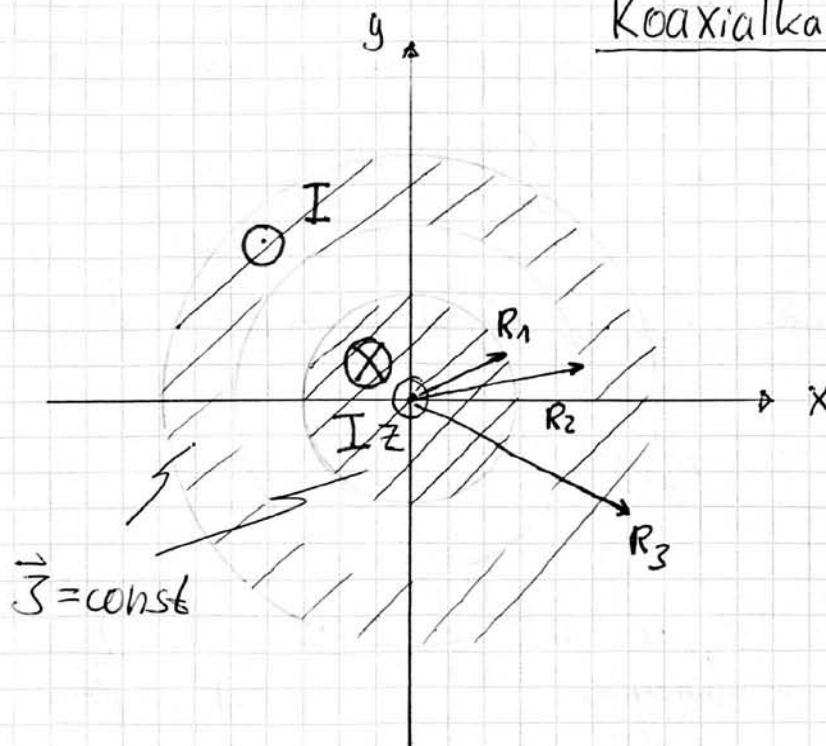
$$L_{\text{ges}} = \frac{\Psi_{\text{ges}}}{I} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N^2 \pi}{e} (3R_i^2 + R_a^2)}}$$

Aufgabe 32

02.02.10

ET III

Koaxialkabel



Aus Symmetrie: $\vec{H} = H_\phi(s) \vec{e}_\phi$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = H_\phi(s) 2\pi s = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$

$$d\vec{s} = s d\phi \vec{e}_\phi$$

$$d\vec{A} = s d\phi ds \vec{e}_z$$

$$\underline{\text{lein}} \left\{ \begin{array}{ll} -I \frac{\pi s^2}{\pi R_1^2} & \text{für } 0 \leq s < R_1 \\ -I & \text{für } R_1 < s < R_2 \\ -I + I \frac{\pi s^2 - \pi R_2^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} & \text{für } R_2 < s < R_3 \\ 0 & \text{für } s > R_3 \end{array} \right.$$

02.02.10

ET III

$$\vec{H} = \frac{I_{\text{ein}}}{2\pi s} \vec{e}_\phi \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} = \begin{cases} -\mu_0 I \frac{s}{2\pi R_1^2} \vec{e}_\phi & \text{für } s < R_1 \\ -\mu_0 I \cdot \frac{1}{2\pi s} \vec{e}_\phi & \text{für } R_1 < s < R_2 \\ -\mu_0 I \frac{R_3^2 - s^2}{R_3^2 - R_2^2} \frac{1}{2\pi s} \vec{e}_\phi & \text{für } R_2 < s < R_3 \\ 0 & \text{für } s > R_3 \end{cases}$$

a) Berechne Induktivität eines Abschnitts der Länge l

Induktivität⇓
außen(Nur B-Feld →
kein J)

Äußere Induktivität : $L_a = \frac{\Psi_a}{I}$
(dort wo $\vec{B} = 0$)

Der Fluss ϕ_a nur im Zwischenraum!
($R_1 < s < R_2$)

innere
(B und
J-Feld)Denn $\vec{B}(s > R_3) = 0$

ϕ_a ist mit dem gesamten Strom verknüpft.
($N=1$)

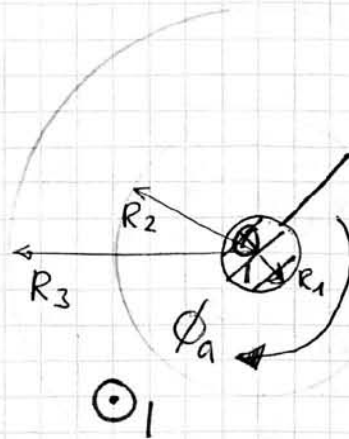
$$\Rightarrow \Psi_a = \phi_a$$

bzgl. äußere
Induktivität

(dort wo
 $\vec{J}=0$)

02.02.10

ET III



nur

Zwischenraum

$$d\vec{A} = l \cdot d\phi \cdot (-\vec{e}_\phi)$$

so gewählt
dass $\phi_a > 0$

$$\begin{aligned} \phi_a &= \iint_A \vec{B} d\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell \int_{s=R_1}^{R_2} \frac{1}{s} \vec{e}_\phi ds (-\vec{e}_\phi) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ell \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow L_a = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{L_a' = \frac{L_a}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

mus
 > 0
sein
(vgl. e)

bzgl. innere
Induktivität

Zur Berechnung der inneren Induktivität
des Innenleiters:

- Aufteilung von I in Teilströme ($dI = J dA$)

ODER

- Aufteilung von ϕ in Teilflüsse ($d\phi = B dA$)

Verkettet
 $d\phi = B dA$
"Strom fäch.
mit B-Feld-
linien
verkettet"



Topologisch

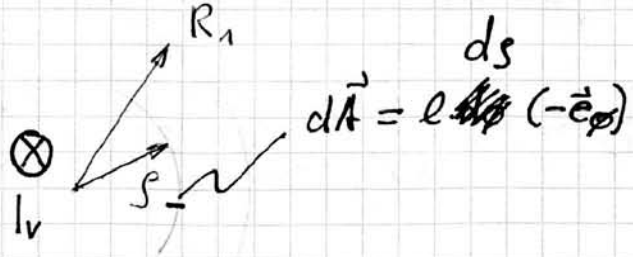
02.02.10

ET III

Hier betrachtet: Teilflüsse $d\phi$

$$I_v = I \cdot \frac{\pi s^2}{\pi R_1^2}$$

$$I_v = I_v(s)$$



$$d\phi = \vec{B} d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \underbrace{l \cdot s \cdot ds}_{= dA \cdot s = l \cdot ds \cdot s}$$

$$d\psi = d\phi \cdot \frac{I_v}{I} = d\phi \cdot \frac{s^2}{R_1^2}$$

Der
Verketete
Anteil!

Wichtig

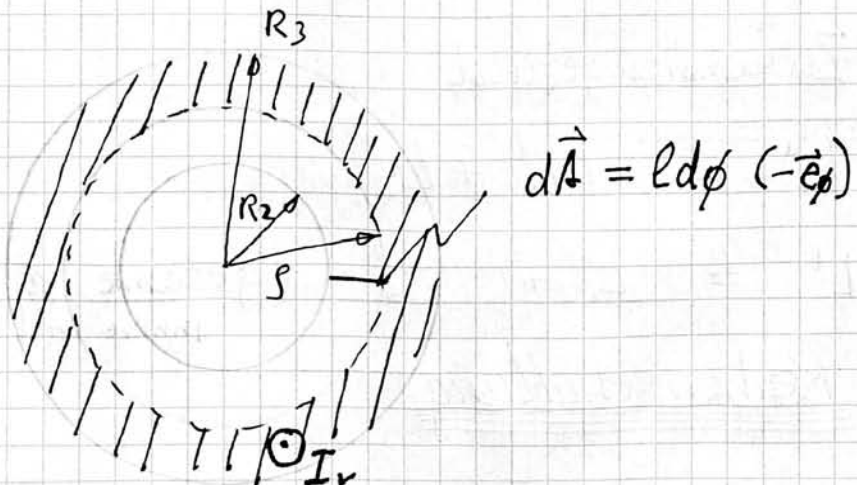
Innenleiter:

$$\psi_{i1} = \int_{s=0}^{s_1} d\psi = \frac{\mu_0 I}{8\pi} l \quad (\text{Seite 5-35})$$

$$L_{i1} = \frac{\psi_{i1}}{I} \quad L'_{i1} = \frac{L_{i1}}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} \neq f(R_1)$$

Beachte!

Innere Induktivität des Außenleiters:



|| Stromkreis muss den betrachteten Fluss umfassen:

$$I_v = I \frac{\pi R_3^2 - \pi s^2}{\pi R_3^2 - \pi R_2^2} = I \cdot \left(1 - \frac{\pi(s^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \right) \quad \text{im } \infty \quad \nabla$$

$$d\psi = d\phi \cdot \frac{I_v}{I}$$

Merke Kunstgriff

$$d\phi = \vec{B} d\vec{A}$$

im Bereich

$$R_2 < s < R_3$$

Außenleiter:

$$\psi_{12} = \int_{s=R_2}^{R_3} d\psi$$

$$= \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \left[\frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{4} \frac{R_2^2 - 3R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I}$$

$$L_{12}' = \frac{L_{12}}{l}$$

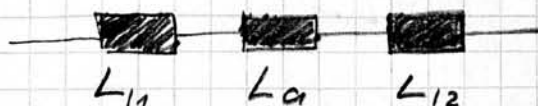
Zusammengefasst:

$$L_i' = L_{i1}' + L_{i2}'$$

$$L' = L_i' + L_a' \quad (\text{gesamte langenbezogene innere Induktivitat})$$

Reihenschaltung

ESB:



02.02.10

ET III

b)

$$W_m = \iiint_V \overbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}^{W_m} dV$$

$$dV = s d\phi ds dz$$

$$dV = 2\pi s \ell ds$$

$$W_m = \frac{\pi \ell}{\mu_0} \int_{R_2}^{R_3} B^2(s) s ds$$

$$= \frac{\ell \mu_0 I^2}{4\pi} \left[\int_{s=0}^{R_1} \frac{s^3}{R_1^4} ds + \int_{s=R_1}^{R_2} \frac{ds}{s} + \int_{s=R_2}^{R_3} \frac{1}{s} \frac{R_3^4 - 2R_3^2 s^2 + s^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} ds \right]$$

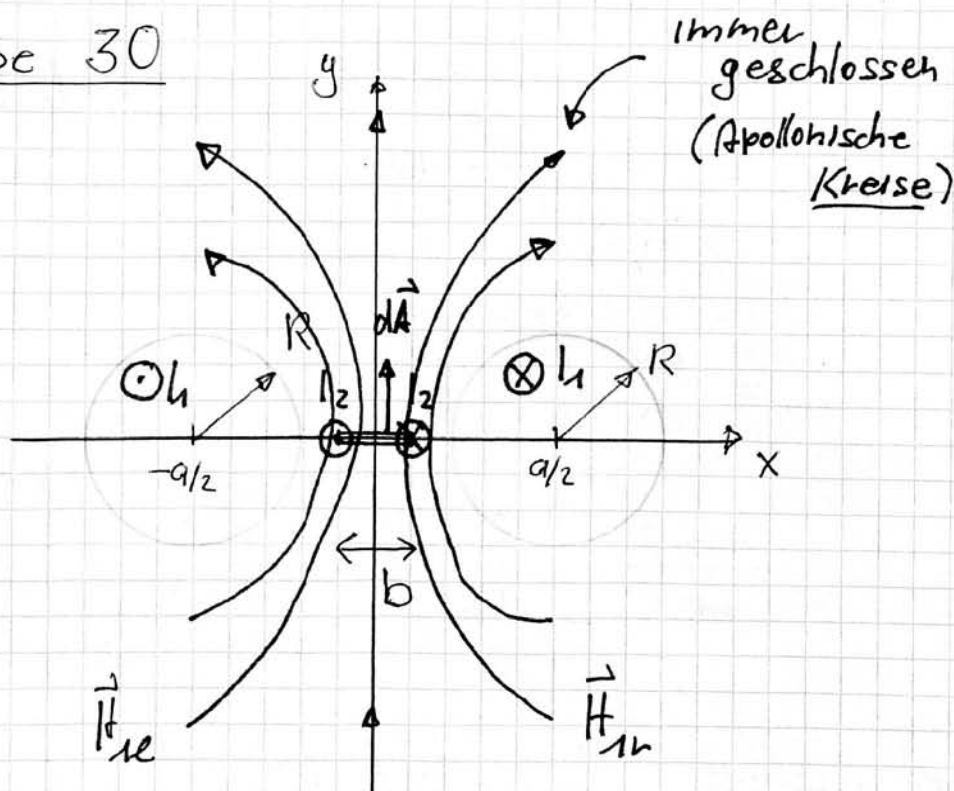
Weg
einsichtigen
↓

Außerdem gilt: $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L' \ell I^2 \quad (\wedge)$
(gleichsetzen)

$$\Rightarrow \underline{\underline{L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + R_3^4 \frac{1}{(R_3^2 + R_2^2)^2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{4} \frac{R_2^2 - 3R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]}}$$

Aufgabe 30

a)



$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1c} + \vec{H}_{1n}$$

allg: Leiter in der z-Achse: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$

$$\vec{H}_1(x) = \frac{I_1}{2\pi(x + \frac{a}{2})} \vec{e}_y + \frac{I_1}{2\pi(\frac{a}{2} - x)} \vec{e}_y$$

b) Gesucht:

pro Länge

(Gegeninduktivität)

 L_{21} erzeugt von
durchsetzt

$$d\vec{A} = dx \cdot l \cdot \vec{e}_y$$

Annahme (später kürzen)

$$\phi_{21} = \iint_{A_2} \mu_0 \vec{H}_1 d\vec{A} = \quad \hookrightarrow$$

02.02.10

ET III

$$\begin{aligned}\phi_{21} &= \ell \cdot \mu_0 \int_{x=-b/2}^{b/2} \left(\frac{I_1}{2\pi(x + \frac{a}{2})} + \frac{I_1}{2\pi(\frac{a}{2} - x)} \right) dx \\ &= \frac{\ell}{2\pi} \mu_0 I_1 \left[\ln\left(x + \frac{a}{2}\right) - \ln\left(\frac{a}{2} - x\right) \right]_{x=-b/2}^{b/2} \\ &\Rightarrow \phi_{21} = 2 \cdot \frac{\ell \mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}\end{aligned}$$

innere Ableitung

hier:

ϕ_{21} ist vollständig mit den Leiterschleife 2 verkettet:



$$\psi_{21} = \phi_{21}$$

Selbstinduktivität — Nur 1 Windung ($N=1$)
 L_{11} — dünne Leiter

$$L'_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1 \cdot \ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{a+b}{a-b} \right)$$

Es gilt immer

$$\boxed{L'_{12} = L'_{21}}$$

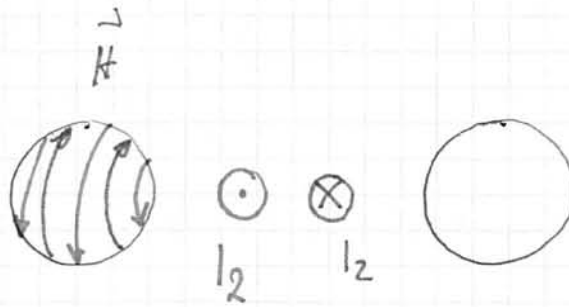
Hier ist aber die Berechnung von L'_{12} wesentlich schwerer. ($\Leftarrow$)

Demnach gilt auch immer $\psi_{12} = \psi_{21}$ ∇
 (falls $I_1 = I_2$)

Berechnung von L'_{12} erheblich schwieriger!

02.02.10

ET III



Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

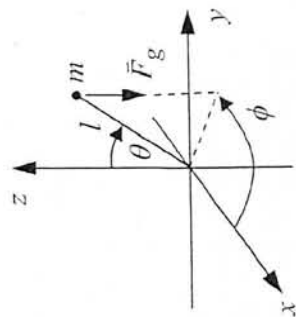
WS 09/10 - Blatt 1

Aufgabe 1

- Geben Sie das in Zylinderkoordinaten $\vec{r}(\rho, \phi, z)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\phi$ in kartesischen Koordinaten an.
- Geben Sie das in Kugelkoordinaten $\vec{r}(r, \theta, \phi)$ vorliegende Vektorfeld $\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r$ in kartesischen Koordinaten an.
- Geben Sie das Vektorfeld $\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{1}{r_{AQ}^2} \cdot \vec{e}_{r_{AQ}}$ für $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$ in kartesischen Koordinaten (x_A, y_A, z_A) an.

Aufgabe 2

Ein starrer, masseloser Stab der Länge l trägt an einem Ende die Masse m . Das andere Ende ist drehbar im Koordinatenursprung gelagert. Auf die Masse m wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_g = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$.



Berechnen Sie die Zugkraft auf den Stab $F_l = \vec{F}_g \cdot \frac{\vec{l}}{l}$ und das Drehmoment im Ursprung $\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F}_g$.
HINWEIS: Der Hebelarm ist $\vec{l} = l \cdot \vec{e}_r$.

Aufgabe 3

Eine Kugel mit dem Radius R trägt auf der Oberfläche die Flächenladungsdichte $\sigma_e(\theta) = \sigma_{e0} \cdot \cos \theta$.

Das Innere der Kugel ($r < R$) ist ladungsfrei.

- Welche Ladung Q_1 trägt die obere Hälfte der Kugel ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)?

HINWEIS: Verwenden Sie bei der Integration die Substitution $u = \sin \theta$.

- Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

Anstelle der Flächenladung hat die Kugel nun die Raumladung

$$\rho_e(r) = \rho_{e0} \cdot r/R.$$

- Wie groß ist jetzt die Gesamtladung der Kugel?

HINWEIS: Der Mittelpunkt der Kugel liegt im Koordinatenursprung.

Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

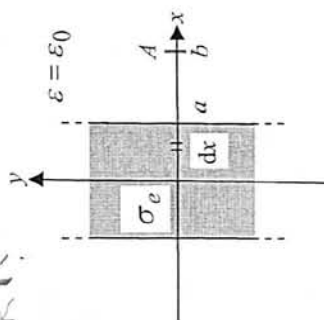
Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme

Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll

WS 09/10 - Blatt 2

Aufgabe 7

Ein in y -Richtung unendlich ausgedehntes Band der Breite $2a$ befindet sich in der x - y -Ebene symmetrisch zur y -Achse (s. Abb.). Das Band trägt die Flächenladungsdichte $\sigma_e > 0$. Gesucht ist die elektrostatische Feldstärke $\vec{E}$ in einem Punkt $A(b, 0, 0)$ auf der x -Achse.



- Welchen Ladungsbelag trägt ein in y -Richtung ebenfalls unendlich ausgedehntes Stück des Bandes der infinitesimalen Breite dx ?
- Geben Sie einen Ausdruck für den Betrag dE des von einem solchen Teilstück hervorgerufenen elektrostatischen Feldes im Punkt A an. Verwenden Sie dazu den bekannten Ausdruck für das elektrostatische Feld einer unendlich langen, geraden Linienladung.
- Bestimmen Sie $\vec{E}$ durch Integration über $d\vec{E} = dE \cdot \vec{e}_x$.
- Zeigen Sie, dass sich für $b \gg a$ wiederum das Feld einer Linienladung ergibt. Wie groß ist der äquivalente Ladungsbelag q_L ?

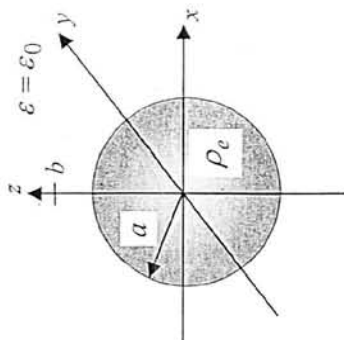
HINWEIS:

Verwenden Sie die folgende Näherung für $x = \pm \frac{a}{b}$

$$\ln(1+x) \approx x \quad \text{für } |x| \ll 1$$

Aufgabe 8

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ außerhalb einer kugelförmigen, homogenen Raumladungverteilung ρ_e mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung soll mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 bestimmt werden. Aus Symmetriegründen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Aufpunkt $A(0, 0, b)$ mit $b > a$ gewählt werden.



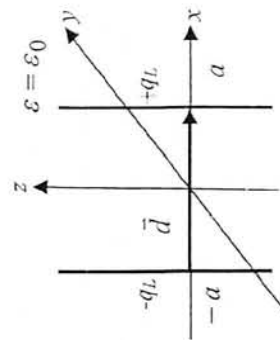
- Die Kugel soll zunächst in Kreisscheiben parallel zur x - y -Ebene mit der infinitesimalen Dicke dz zerlegt werden. Geben Sie für eine solche Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, 0, z)$ den Radius $R(z)$ und die äquivalente Flächenladungsdichte $d\sigma_e$ an.
- Wie groß ist der von dieser Kreisscheibe erzeugte Feldstärkebeitrag $d\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0, 0, b)$?
- Berechnen Sie $\vec{E}(0, 0, b)$ durch Integration über $d\vec{E}$.

HINWEIS:

$$\int \frac{B-x}{\sqrt{A^2+B^2-2Bx}} \cdot dx = \frac{1}{3B} \cdot \left(x + \frac{A^2-2B^2}{B} \right) \cdot \sqrt{A^2+B^2-2Bx}$$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie in kartesischen Koordinaten das elektrische Feld eines Linienipols als Grenzübergang einer Anordnung mit zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Linienladungen mit Ladungsbelägen entgegengesetzten Vorzeichens (s. Abb.):



$$d = |\vec{d}| \rightarrow 0, \quad q_L \rightarrow \infty,$$

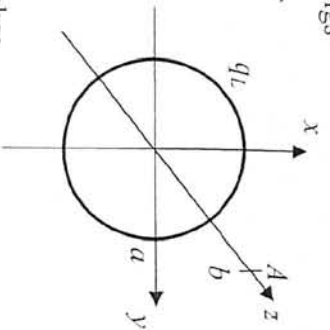
$$p_L = |\vec{p}_L| = |q_L \cdot \vec{d}| = \text{const};$$

($\vec{p}_L$ heisst Linienipolmoment, $a = d/2$).

Aufgabe 4 RRRR

Eine kreisförmige Linienladung mit dem Ladungsbetrag $q_L \neq f(r)$ und dem Radius a liegt in der x - y -Ebene. Im gesamten Raum gilt $\epsilon = \epsilon_0$.

- a) Welches Koordinatensystem ist hier zweckmäßig? Formulieren Sie den Vektor von einem infinitesimalen Ladungselement dQ zu einem Aufpunkt $A(0,0,b)$ auf der z -Achse.

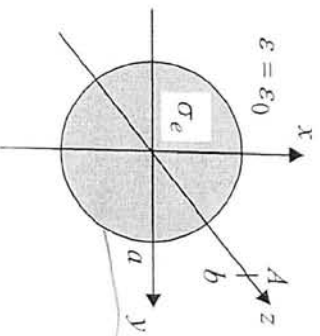


- b) Geben Sie das elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ der Linienladung an.
c) Welches elektrostatische Feld $\vec{E}(0,0,b)$ ergibt sich näherungsweise für $b \gg a$ (im Fernfeld)?

Aufgabe 5 RRRR

Eine kreisförmige Scheibe mit dem Radius a und der Flächenladungsdichte σ_e befindet sich in der x - y -Ebene. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems (vgl. Abb.).

- a) Formulieren Sie dQ , $\vec{r}_{AQ}$ und die Integrationsgrenzen zur Bestimmung von $\vec{E}$ im Aufpunkt $A(0,0,b)$ für $b > 0$.



- b) Welche Teilintegration ist aus Symmetriegründen trivial? Wie lässt sich das Integral mit dem Ergebnis aus Aufgabe 4 formulieren?

- c) Wie groß ist $\vec{E}(0,0,b)$? Was ergibt sich für das Fernfeld ($b \gg a$) auf der z -Achse?

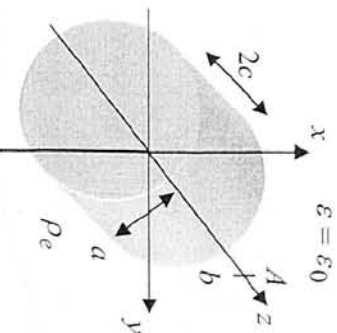
HINWEISE: $\int x \cdot (x^2 + A^2)^{-3/2} dx = -(x^2 + A^2)^{-1/2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{für } |x| \ll 1$$

Aufgabe 6

(Hausaufgabe) RRRR

Ein Zylinder mit der homogenen Raumladungsdichte ρ_e hat den Radius a und die Länge $2c$ in z -Richtung. Sein Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Mithilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5 soll das auf der z -Achse im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte elektrostatische Feld für $b > c$ berechnet werden (s. Abb.).



- a) Welche Flächenladungsdichte $d\sigma_e$ hat ein näherungsweise als Kreisfläche betrachteter Teilzylinder mit dem Radius a und der infinitesimalen Länge dz ? Geben Sie die von einem solchen Teilzylinder mit dem Mittelpunkt $(0,0,z)$ im Punkt $A(0,0,b)$ erzeugte Feldstärke $d\vec{E}$ an.

- b) Berechnen Sie nun $\vec{E}(0,0,b)$ durch Integration über $d\vec{E}$ im Intervall $-c \leq z \leq c$.

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\rho_e}{2\epsilon_0} \cdot \left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2} \right) \cdot \vec{e}_z$$

$$b > c$$

Die Feldlinien der elektrischen Feldstärke lassen sich für ein ebenes Problem ($z = 0, E_z = 0$) durch die Differentialgleichung $E_\varphi \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi \cdot E_\rho$ in Zylinderkoordinaten beschreiben.

- a) Formulieren Sie die elektrische Feldstärke des idealen Liniendipols aus Aufgabe 9 in Zylinderkoordinaten.

HINWEIS: $\vec{E} = p_L \cdot ((x^2 - y^2) \cdot \vec{e}_x + 2xy \cdot \vec{e}_y) / (2\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2)^2)$

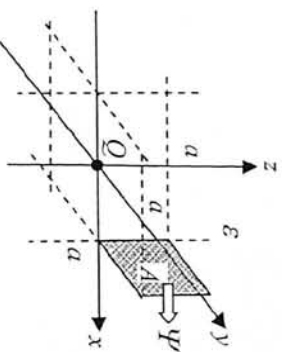
- b) Setzen Sie dieses Ergebnis in die Differentialgleichung ein und ermitteln Sie durch Trennung der Variablen und Integration einen Ausdruck für die Punkte der Feldlinien in Zylinderkoordinaten.

- c) Transformieren Sie dieses Ergebnis in kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Feldlinien Kreise in der x - y -Ebene sind.

Aufgabe 11

Im Ursprung des Koordinatensystems befindet sich eine Punktladung Q , der Raum hat überall die Permittivität ϵ (s. Abb.).

- a) Bestimmen Sie den elektrischen Fluss Ψ durch eine quadratische Fläche A der Kantenlänge a ($x = a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$).



- b) Was gilt für den elektrischen Fluss durch die geschlossene Hüllfläche eines Würfels mit der Kantenlänge $2a$?

HINWEIS: $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$, $\int \frac{1}{(x^2 + B^2)^{3/2}} \cdot dx = \frac{x}{B^2 \cdot \sqrt{x^2 + B^2}}$,

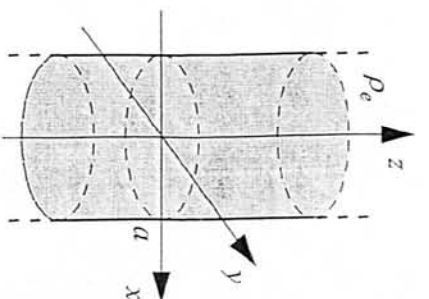
$$\int \frac{1}{(x^2 + B^2) \cdot \sqrt{x^2 + 2B^2}} \cdot dx = \frac{1}{2B^2} \cdot \arctan \left(\frac{x \cdot \sqrt{x^2 + 2B^2}}{B^2} \right).$$

- a) Bestimmen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 8 und Aufgabe 11, diesmal mithilfe des Gauß'schen Satzes der Elektrostatik.

- b) Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel aus Aufgabe 8?

- c) Bestimmen Sie das elektrische Feld einer in der x - y -Ebene unendlich ausgedehnten, homogenen Flächenladung mit der Flächenladungsdichte σ_e .

- d) Bestimmen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ einer axial unendlich ausgedehnten, zylinderförmigen, homogenen Raumladungsverteilung mit dem Radius a und der Raumladungsdichte ρ_e (s. Abb.) im Innen- und Außenraum.



Aufgabe 13

- a) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der kugelförmigen Raumladungsverteilung aus Aufgabe 8 durch Integration der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$. Legen Sie dabei den Bezugspunkt P_0 in den Ursprung des Koordinatensystems.

- b) Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie durch Gradientenbildung aus φ_e wieder $\vec{E}$ berechnen.

- c) Was ergibt sich, wenn P_0 auf dem Kugelrand bzw. im Unendlichen liegt?

- d) Skizzieren Sie $|\vec{E}|$ und φ_e in Abhängigkeit von r für die drei verschiedenen Bezugspunkte.

Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 3

Aufgabe 14

Betrachtet werden zwei Punktladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen $\pm Q$ auf der z -Achse im Abstand d symmetrisch zum Ursprung (Bild 1).

a) Formulieren Sie das elektrostatische Potential φ_e dieser Anordnung in Abhängigkeit von r_1 und r_2 .

b) Ermitteln Sie mithilfe des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ die Abstände r_1 und r_2 und geben Sie deren Kehrwerte als Funktion von $1/r$ und θ an.

Verwenden Sie für die Ausdrücke $1/r_1$ und $1/r_2$ die Näherung

$$\left(1 + \frac{d}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r} \quad (\text{falls } \frac{d}{r} \ll 1).$$

c) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_D eines Punktdipols als Grenzwert $d \rightarrow 0$ bei konstantem Dipolmoment $p = Q \cdot d$.

d) Geben Sie die Komponenten der elektrischen Feldstärke $\vec{E}_D$ durch Gradientenbildung von φ_D in Kugelkoordinaten an. Was fällt bei der Abhängigkeit von $|\vec{E}_D|$ bzw. φ_D von r auf?

Aufgabe 15

Gegeben ist die zylinderförmige Raumladungsverteilung aus Aufgabe 12 d.

a) Formulieren Sie die Poisson- und Laplace-Gleichung in einem geeigneten Koordinatensystem. Welche Terme entfallen aus Symmetriegründen?

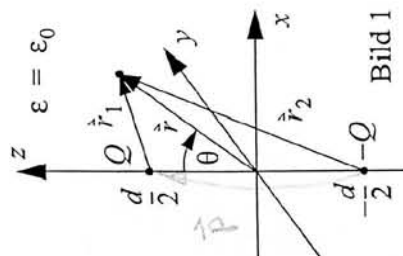


Bild 1

b) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der Raumladungsverteilung im Innen- und Außenraum mit dem Ergebnis aus a) durch zweifache Integration. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten so, dass $\vec{E}$ und φ_e überall stetig sind. Wählen Sie $\varphi_e = 0$ auf der z -Achse.

Aufgabe 16

Gesucht ist das elektrostatische Potential φ_e von zwei parallelen, in z -Richtung unendlich ausgedehnten Linienladungen: q_L schneidet die x -Achse bei $x = a$, $-q_L$ bei $x = -a$. Im Koordinatenursprung soll $\varphi_e = 0$ gelten.

a) Formulieren Sie φ_e in Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2 , wobei ρ_1 und ρ_2 den jeweiligen Abstand des Aufpunktes von q_L bzw. $-q_L$ beschreiben.

HINWEIS: Das Potential einer Linienladung q_L in der z -Achse mit dem Be-

$$\text{zugspunkt bei } \rho_0 \text{ lautet } \varphi_e = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

b) Zeigen Sie, dass für jede Äquipotentialfläche gilt: $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = k^2$ mit $k = \text{const.}$

c) Formulieren Sie die Bedingung aus b) in kartesischen Koordinaten.

d) Bringen Sie die Gleichung aus c) in die Form $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ und bestimmen Sie die Größen x_0 und R in Abhängigkeit von k .

e) Welche geometrische Form haben die Äquipotentialflächen dieser Anordnung?

Aufgabe 17

Betrachtet wird ein Winkeldkondensator mit dem Öffnungswinkel α und Kondensatorplatten der Länge a , der Ausdehnung in z -Richtung b und dem Abstand ρ_0 vom Ursprung (Bild 2). Zwischen den Platten liegt die Spannung U an. Es sollen keine Streueffekte an den Rändern des Kondensators auftreten, d. h. im Innen- und Außenraum gilt $\vec{E} = E_\phi(\rho, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$.

Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 4

Aufgabe 21

(Hausaufgabe) R

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge l im Abstand d ist bis zur Höhe h mit einem Dielektrikum der relativen Permittivität ϵ_r gefüllt (Bild 1). Zwischen den Platten liegt die konstante Spannung U_0 an. Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

a) Berechnen Sie die Kapazität $C(h)$, die Energie $W_C(h)$ und die Ladung $Q(h)$ des Kondensators abhängig von der Position des Dielektrikums.

b) Das Dielektrikum wird von h_1 bis h_2 ($h_2 > h_1$) in den Kondensator geschoben. Welche Ladung ΔQ wird dafür von der Spannungsquelle geliefert? Um welchen Beitrag ΔW_Q ändert sich die Energie der Spannungsquelle?

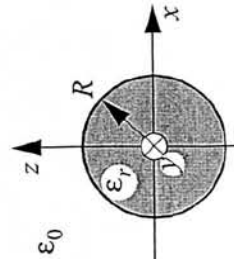
c) Welche mechanische Arbeit $W_{\text{mech}} > 0$ wird beim Verschieben gewonnen? Stellen Sie dazu eine Energiebilanz auf.

d) Geben Sie abhängig von h die auf das Dielektrikum ausgeübte Kraft an.

Aufgabe 22

wechmal R

In ein ursprünglich homogenes elektrostatisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \hat{e}_z$ wird eine dielektrische Kugel mit dem Radius R und der Permittivität $\epsilon_r \cdot \epsilon_0$ eingebracht (Bild 2). Außerhalb der Kugel gilt $\epsilon = \epsilon_0$. Für das resultierende elektrostatische Feld der Anordnung kann der folgende I. Näherungsansatz gewählt werden:



für $|r| > R$ (außen). $\vec{E}_D$ beschreibt dabei das elektrische Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = p \cdot \hat{e}_z$ (vgl. Aufgabe 14).

- Formulieren Sie den Lösungsansatz innerhalb und außerhalb der Kugel in Kugelkoordinaten.
- Stellen Sie mit den Grenzflächenbedingungen für die elektrische Feldstärke und die elektrische Flussdichte an der Kugeloberfläche ($r = R$) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten E_i und p auf.
- Berechnen Sie die Unbekannten E_i und p in Abhängigkeit von den bekannten Größen E_0 und ϵ_r .
- Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) für den Spezialfall $\epsilon_r = 1$.
- Was ergibt sich für den Grenzfall $\epsilon_r \rightarrow \infty$?

Aufgabe 23

(Hausaufgabe)

Zwischen zwei ideal leitenden, parallelen Platten mit der Fläche A und dem Abstand d befindet sich ein Medium mit der Leitfähigkeit σ und der Permittivität ϵ . Die Platten werden an eine Spannungsquelle U angeschlossen. Streueffekte sind zu vernachlässigen.

- Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ und die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ zwischen den Platten.
- Welche Ladung $\pm Q$ tragen die Platten? Wie groß sind die Kapazität C und der elektrische Widerstand R der Anordnung? Geben Sie einen Zusammenhang zwischen R und C an.
- Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird die Spannungsquelle abgetrennt. Geben Sie den zeitlichen Verlauf von $Q(t)$ und $\vec{E}(t)$ an.

a) Bestimmen Sie $\vec{E}$ und das elektrostatische Potential φ_e in Zylinderkoordinaten im Innen- und Außenraum des Kondensators.

b) Geben Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ unmittelbar ober- und unterhalb der unteren Platte an. Wie groß ist die Ladung Q auf der unteren Platte?

c) Was ergibt sich für die Kapazität C des Kondensators?

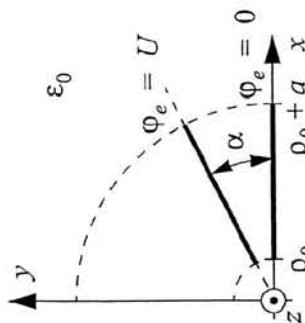


Bild 2

Aufgabe 18

Gegeben sind zwei parallele, in z -Richtung unendlich ausgedehnte Zylinderleiter mit dem Radius R und dem Achsenabstand $2x_0$, mit $x_0 > R$.

a) Für welche Parameter k_1 und k_2 in Abhängigkeit von R und x_0 stimmen die Äquipotentialflächen einer Anordnung aus zwei Linienladungen $\pm q_L$ mit den Oberflächen der Zylinderleiter überein? Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 16.

b) Welche elektrische Spannung U_{12} besteht zwischen den beiden Äquipotentialflächen in Abhängigkeit von q_L ? Welche Ladung $\pm \Delta Q$ pro Länge Δl müssen die Zylinderleiter tragen, damit sich im Außenraum der gleiche Feldverlauf ergibt?

c) Wie groß ist der Kapazitätsbelag $C' = \Delta C / \Delta l$ der Anordnung? Verwenden Sie dazu den Ansatz $\Delta C = \Delta Q / U_{12}$.

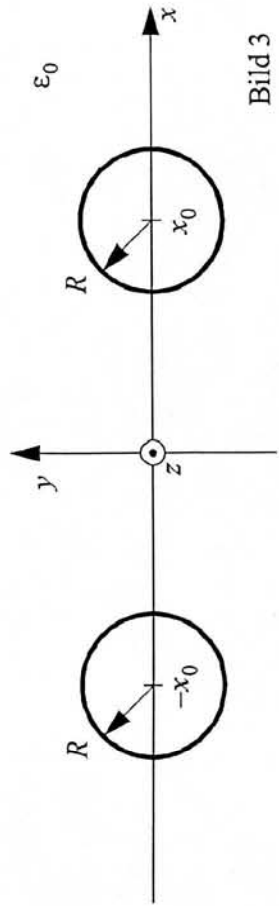


Bild 3

Aufgabe 19

Eine Leiterbahn einer integrierten Schaltung (Bild 4) mit den Abmessungen $w=0.4\mu\text{m}$, $d=0.25\mu\text{m}$ verläuft im Abstand $h=0.25\mu\text{m}$ über einer leitenden Ebene. Das Isoliermaterial zwischen Leiterbahn und Ebene ist SiO_2 mit $\epsilon_r \approx 4$.

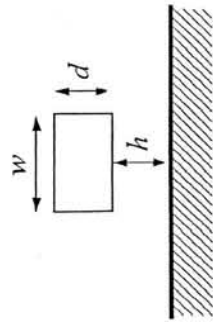


Bild 4

a) Bestimmen Sie den Kapazitätsbelag C' der Anordnung näherungsweise, indem Sie die Bodenfläche und die Seitenflächen des Leiters als Elektroden von Platten- bzw. Winkelkondensatoren zur Ebene betrachten.

Alternativ kann C' durch eine andere Näherung berechnet werden (Bild 5).

b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 18c den Kapazitätsbelag eines Zylinders mit dem Durchmesser d im Abstand h über einer Ebene.

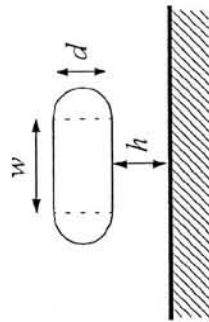


Bild 5

c) Berechnen Sie C' , indem Sie die Leiterbahn als Kombination einer plattenförmigen und einer zylinderförmigen Elektrode betrachten.

Aufgabe 20 (Zusatz)

Die Elektroden eines luftgefüllten Plattenkondensators mit der Fläche A im Abstand d tragen die Ladung $\pm Q = \text{const.}$ Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie?

Bestimmen Sie die Kraft F zwischen den Platten mit der Methode der virtuellen Verschiebung.

Aufgabe 24 (Hausaufgabe)

Eine unendlich lange Linienladung q_L befindet sich jeweils im Abstand a vor zwei rechtwinklig angeordneten, leitenden Halbebenen (Bild 3). Eine Halbebene hat das Potential U , die andere das Potential Null. Es gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

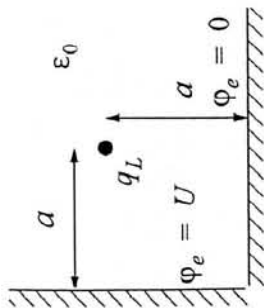


Bild 3

- Bestimmen Sie das elektrische Feld der Linienladung zunächst für $U = 0$ mithilfe der Spiegelungsmethode.
- Berechnen Sie das gesamte elektrische Feld durch Überlagerung des Feldes aus a) mit dem eines Winkelkondensators für $U > 0$.

Aufgabe 25 (Hausaufgabe)

Zwischen einem axial unendlich ausgedehnten, $\varphi_e = U$ ideal leitenden Zylinder mit dem Radius a und einer dazu parallelen, ideal leitenden, geerdeten Ebene im Abstand $b - a$ liegt die Spannung U an. Der Halbraum um den Zylinder herum hat den spezifischen Widerstand ρ (Bild 4).

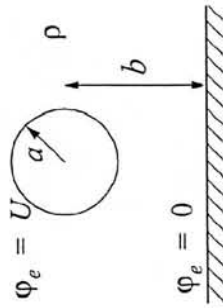


Bild 4

- Welchem elektrostatischen Problem entspricht diese Anordnung?
- Bestimmen Sie das elektrische Potential φ_e und das stationäre Strömungsfeld $\vec{J}$ zwischen Zylinder und Ebene.
- Welcher Strom pro Längeneinheit I tritt aus dem Zylinder aus?

Aufgabe 26 R

Gegeben ist ein halber Zylinderkondensator mit dem Innenradius ρ_i , dem Außenradius ρ_a und der Länge l (Bild 5). Der Kondensator ist mit einem Material der Permittivität ε gefüllt. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

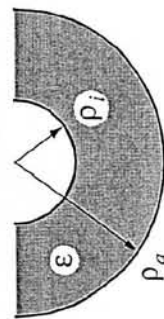


Bild 5

- Wie groß sind die Kapazität C bzw. die längenbezogene Kapazität C' der Anordnung?
- Betrachten Sie das analoge Problem des stationären Strömungsfeldes, d.h. das Füllmaterial hat die Leitfähigkeit σ . Ist hier die Angabe eines längenbezogenen Widerstandes (R') oder eines längenbezogenen Leitwertes (G') sinnvoll? Bestimmen Sie diese Größe.
- Skizzieren Sie die Feldlinien und die Lage der Äquipotentialflächen des entsprechenden stationären Strömungsfeldes.
- Welches ist die duale Struktur der Anordnung?
- Bestimmen Sie den längenbezogenen Leitwert G' dieser Anordnung.

Aufgabe 27

Ein Elektron (Ladung $-e$, Masse m_0) wird zwischen zwei Metallgittern mit der Spannung U beschleunigt und erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}_0$, welches nur im Bereich $x \geq 0$ existiert (Bild 6).

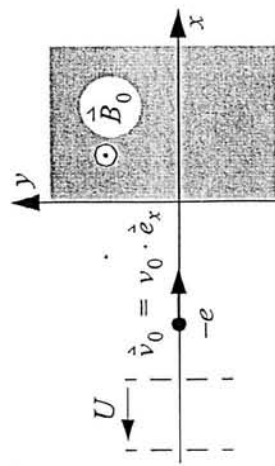


Bild 6

- Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_0 \ll c$ beim Eintritt in das Magnetfeld?
- Berechnen Sie die Lorentz-Kraft $\vec{F}_0$, die für $t = 0$ auf das Elektron wirkt.
- Warum bewegt sich das Elektron im Bereich des Magnetfeldes auf einer Kreisbahn? Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn.

HINWEIS: Zentripetalkraft einer Kreisbahn mit Radius R : $F_z = m_0 \cdot v^2 / R$

- Wozu, zu welchem Zeitpunkt t_1 und in welcher Richtung verlässt das Elektron das Magnetfeld?
- Welche kinetische Energie hat das Elektron vor dem Eintritt in das Magnetfeld und nach dem Austritt?

Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 5

Aufgabe 28

Gegeben sind zwei in z -Richtung unendlich ausgedehnte, parallele Leiter mit Abstand $2a$, die von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen werden (Bild 1). Ausgehend von der in der Vorlesung hergeleiteten Gesamtfeldstärke $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ ist eine parametrische Darstellung der Feldlinien von $\vec{H}_{\text{ges}}$ für $I_1 = I_2 > 0$ bzw. $I_1 = -I_2 > 0$ gesucht. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass entlang einer Feldlinie von $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ gilt:

$$H_x \cdot dy = H_y \cdot dx.$$

b) Berechnen Sie dann mithilfe einer Feldlinie von $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ Integration $\int H_x \cdot dy = \int H_y \cdot dx$ die parametrische Darstellung der Feldlinien.

HINWEIS: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$

c) Welche Dualitäten zum elektrostatischen Feld ergeben sich?

Aufgabe 29

(Hausaufgabe)

Eine dreieckige, gleichschenklige Leiterschleife der Höhe h und Breite b ist drehbar um die z -Achse gelagert (Bild 2). Sie wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$.

a) Welches mechanische Drehmoment $\vec{L} = L_z \cdot \vec{e}_z$ wirkt auf die Schleife?

b) Für welche Winkel α_1, α_2 ist das Drehmoment Null? In welcher Lage

Im Folgenden ist das Magnetfeld ortsabhängig mit $\vec{B} = B_0 \cdot (1 + z/h) \cdot \vec{e}_x$. Gesucht wird wiederum das Drehmoment L_z um die z -Achse.

c) Zunächst soll der Beitrag dL_z eines infinitesimalen Leiterstücks ds berechnet werden. Welche Komponente (in Zylinderkoordinaten) der Kraft $d\vec{F} = I \cdot ds \times \vec{B}$ trägt zu dL_z bei? Aus welchen Komponenten von ds und $\vec{B}$ ergibt sich diese Komponente von $d\vec{F}$?

d) Berechnen Sie die gesuchte Komponente von $d\vec{F}$ und daraus dL_z .

e) Begründen Sie, warum das in der x - y -Ebene liegende Schleifensegment nicht zu L_z beiträgt. Bestimmen Sie L_z durch Integration über z .

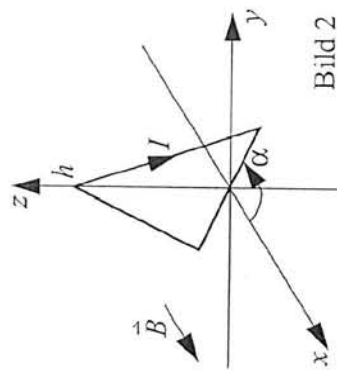


Bild 2

Aufgabe 30

Die beiden äußeren Leiter der abgebildeten Zweidrahtleitung haben den Radius R und den Achsenabstand a .

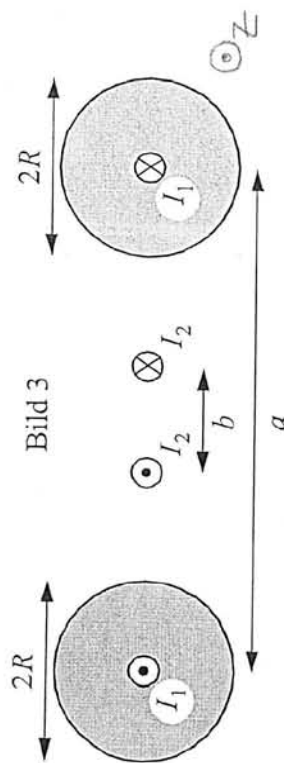


Bild 3

Sie dienen als Hin- und Rückleiter für den Strom I_1 . In der Mitte der äußeren Zweidrahtleitung befindet sich eine weitere Zweidrahtleitung mit sehr dünnen Leitern im Abstand b und dem Strom I_2 (Bild 3).

a) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1$, die die äußere Zweidrahtleitung zwischen den beiden inneren Leitern erzeugt.

b) Berechnen Sie die längenbezogene äußere Gegeninduktivität L'_{21} der Gesamtanordnung. Bestimmen Sie daraus L'_{12} .

Zusatzübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09 / 10 - Blatt 6

Aufgabe 34

Gesucht ist das magnetische Vektorpotential $\vec{A}_{mA}$ in einem Aufpunkt A eines unendlich ausgedehnten Linienstroms I in der z -Achse (Bild 1). Der Aufpunkt kann aus Symmetriegründen in die x - y -Ebene gelegt werden. Es gilt:

$$\vec{A}_{mA} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_{C_Q} \frac{d\vec{s}}{r_{AQ}}$$

Dabei umfasst C_Q den gesamten Linienstrom.

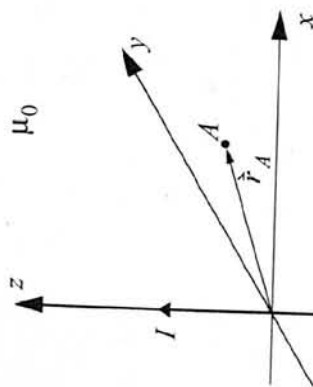


Bild 1

- Geben Sie die Quell- und Aufpunktvektoren $\vec{r}_Q$ und $\vec{r}_A$ in Zylinderkoordinaten an.
- Zunächst soll das Integral für $\vec{A}_{mA}$ über ein endliches Stück des Linienstroms berechnet werden, $-a \leq z_Q \leq a$. Stellen Sie einen entsprechenden Integralausdruck auf.
- Lösen Sie das Integral unter Beibehaltung der Länge a .

HINWEIS: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

- Betrachten Sie den Fall $a \gg r_A$. Formulieren Sie das Ergebnis so, dass Sie die unten angegebene Näherung verwenden können.

HINWEIS: $\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ für $x^2 \ll 1$

- Zerlegen Sie den Ausdruck für $\vec{A}_{mA}$ in eine Summe aus einem konstanten Anteil und einem von $\vec{r}_A$ abhängigen Teil. Welcher Anteil erfüllt $\vec{B}_A = \text{rot } \vec{A}_{mA}$ für die Berechnung des Magnetfeldes?

Aufgabe 31 (Hausaufgabe)

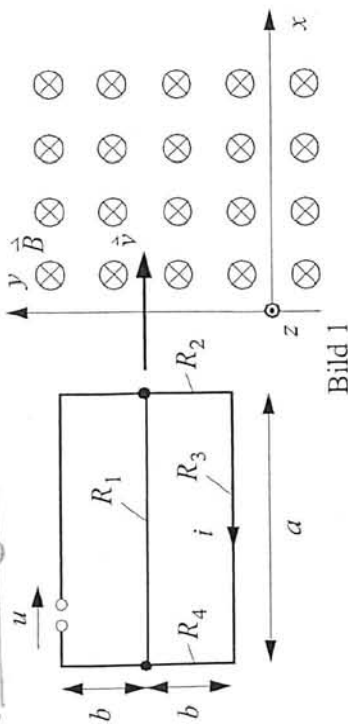


Bild 1

Eine Drahtschleife besteht aus zwei Maschen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in das Magnetfeld $\vec{B}$, das sich über die gesamte rechte Halbebene ($x \geq 0$) erstreckt (Bild 1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt die rechte Kante der Schleife in das Feld ein. Das vom Strom i verursachte Magnetfeld ist zu vernachlässigen.

- Wie groß ist der Strom i für $a = 30\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $v = 1\text{ms}^{-1}$, $B = 1\text{T}$ und $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$?
- Was ergibt sich damit für die Spannung u ?
- Skizzieren Sie $i(t)$ und $u(t)$ im Zeitbereich $0 \leq t \leq 0,5\text{s}$.
- Welcher Strom $i(t)$ ergibt sich, falls $B(t) = 1\text{T} \cdot e^{-t/\tau}$ mit $\tau = 0,1\text{s}$?

Aufgabe 32

(Hausaufgabe)

Gegeben ist ein unendlich langes Koaxialkabel, dessen Innenleiter mit Radius R_1 den Strom I führt. Der Außenleiter (R_2, R_3) dient als Rückleiter (Bild 2).

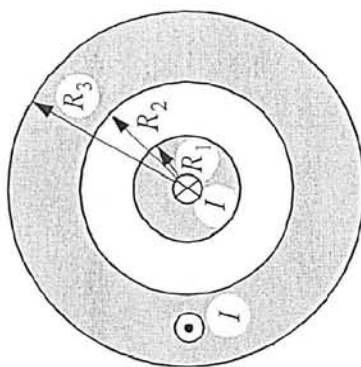


Bild 2

- Berechnen Sie die längenbezogene innere und äußere Induktivität. Verwenden Sie dabei zunächst die Definition der Induktivität über die Flussverknüpfung.
- Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Definition der Induktivität über die Energie des magnetischen Feldes.

Aufgabe 33

Eine schlanke Zylinderspule der Länge l ist in zwei Lagen mit je N Windungen gewickelt (Bild 3).

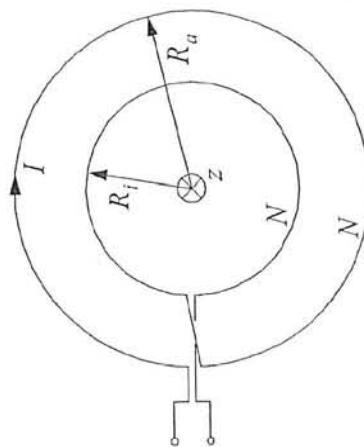


Bild 3

- Wie groß ist die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ für $\rho < R_i$ und für $R_i < \rho < R_a$?
- Berechnen Sie die verketteten Flüsse Ψ_i und Ψ_a der inneren und der äußeren Lage.
- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Induktivität der Spule.

ketov@gmx.de

27.10.09 (1)

Kleingruppe 1

- a) Im gegebenen Beispiel müssen verschobene Felder beschrieben werden. Verschiebungen lassen sich in Kugelkoordinaten nur sehr umständlich beschreiben, da $\vec{e}$ nicht fest sind. ($\Rightarrow$ Kartesische Koord.)

$\epsilon_0 \hat{=} \text{Vakuum}$
($\epsilon = \epsilon_0$)

Kugelsymmetrische Anordnungen lassen sich leicht in Kugelkoordinaten beschreiben. (z.B. Punktladung im Ursprung)

"Punktladung verschoben"

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_A}{r_A^3} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A \cdot \vec{e}_x + Y_A \cdot \vec{e}_y + Z_A \cdot \vec{e}_z}{[X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{E}_1 &= \frac{Q_1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{A1}}{r_{A1}^3} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(X_A - a) \cdot \vec{e}_x + Y_A \cdot \vec{e}_y + Z_A \cdot \vec{e}_z}{[(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{E}_2 &= \frac{Q_2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{A2}}{r_{A2}^3} = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A \cdot \vec{e}_x + (Y_A - a) \cdot \vec{e}_y + Z_A \cdot \vec{e}_z}{[X_A^2 + (Y_A - a)^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

da $\epsilon = \epsilon_0$, $\vec{r}_{A1} = \vec{r}_A - \vec{r}_a = X_A \cdot \vec{e}_x + Y_A \cdot \vec{e}_y + Z_A \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_x$
NUR in kartesischen allg. gültig!

c) $\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (Superposition)

$$\begin{aligned} &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(X_A - a) \vec{e}_x + Y_A \cdot \vec{e}_y + Z_A \vec{e}_z}{[(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{X_A \vec{e}_x + (Y_A - a) \vec{e}_y + Z_A \vec{e}_z}{[X_A^2 + (Y_A - a)^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{(X_A - a)}{[(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{X_A}{[X_A^2 + (Y_A - a)^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{e}_x + \\ &\quad \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{Y_A}{[(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Y_A - a}{[X_A^2 + (Y_A - a)^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{e}_y + \\ &\quad \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{Z_A}{[(X_A - a)^2 + Y_A^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Z_A}{[X_A^2 + (Y_A - a)^2 + Z_A^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

- ② a) $E_y = 0$, da Vektoren $\vec{r}_{AqL}$ keine y-Komponente haben. Kleingruppe
 $E_z = 0$, da sich immer zwei Vektoren finden, dessen z-Komponente jeweils entgegengerichtet sind.

$$b) \quad d\vec{E} = \frac{dQ}{\epsilon_0 \cdot 4\pi} \cdot \frac{\vec{r}_{AqL}}{r_{AqL}^3} = \frac{dQ}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A \cdot \vec{e}_x - z_q \cdot \vec{e}_z}{[X_A^2 + z_q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Coulomb-Gesetz mit „dE“, „dQ“

$$q_L = \frac{dQ}{dz}$$

$$\vec{r}_{AqL} = X_A \cdot \vec{e}_x - z_q \cdot \vec{e}_z$$

$$dE_x = d\vec{E} \cdot \vec{e}_x = \frac{q_L \cdot dz}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A \cdot \overbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}^{=1} - z_q \cdot \overbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}^{=0}}{[X_A^2 + z_q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{q_L \cdot dz}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A}{[X_A^2 + z_q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

c) „über Quellgebiet integrieren“

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{z=-a}^a \frac{q_L \cdot dz}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{X_A \cdot \vec{e}_x - z_q \cdot \vec{e}_z}{[X_A^2 + z_q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

symmetrisches Integral
= 0

Sind eig.
2. Integrale!

$$= \frac{q_L \cdot X_A \cdot \vec{e}_x}{4\pi \cdot \epsilon_0} \int_{z=-a}^a \frac{dz}{[X_A^2 + z_q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$dE_x = d\vec{E} \cdot \vec{e}_x$
auch mögl.
„aus Sym. folgt“

$$= \frac{q_L \cdot X_A \cdot \vec{e}_x}{4\pi \cdot \epsilon_0} \left[\frac{z}{X_A^2 \sqrt{X_A^2 + z^2}} \right]_{z=-a}^a$$

Vgl. mit
 ∞ langer
Linienladung
→

$$= \frac{q_L \cdot X_A \cdot \vec{e}_x}{2 \cdot 4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2} a}{X_A^2 \sqrt{X_A^2 + a^2}} = \frac{q_L \cdot a}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot X_A \cdot \sqrt{X_A^2 + a^2}} \cdot \vec{e}_x$$

27.10.09

Kleingruppe

Nicht das
kompl. Feld! }

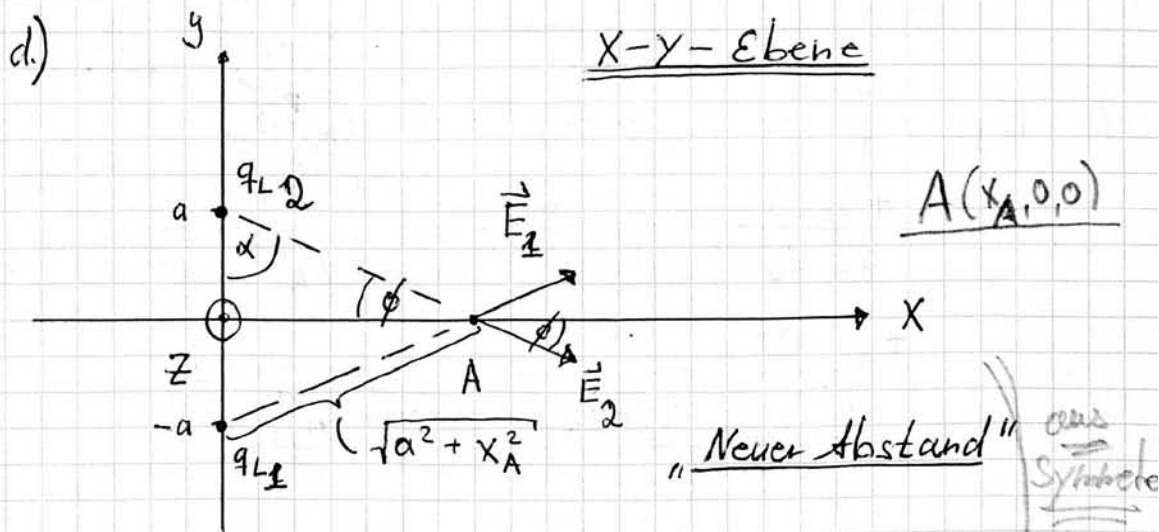
Mit Bedacht
X setzen!

Anmerkung:

$$\vec{E}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_x + y_0 \cdot \vec{e}_y + z_0 \cdot \vec{e}_z$$

$$E_x = \underbrace{x_0}_{\text{"Projektion"}} = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = x_0 \cdot \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} + y_0 \cdot \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} + z_0 \cdot \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x}_{=0}$$

d.)



e) neuer Abstand $d = \sqrt{a^2 + x_A^2}$

$\Delta \ln \tilde{E}$ aus c) für $X_{A,3}$

Beachte:

Nur Betrag bekannt!

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{q_L \cdot a}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x_A^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x_A^2 + a^2}}$$

~~$$\vec{E}_{ges} = (|\vec{E}_1| + |\vec{E}_2|) \cdot \vec{e}_x = 2 \cdot |\vec{E}_1| \cdot \vec{e}_x$$~~

$$E_y = E_z = 0$$

$$= \frac{q_L \cdot a \cdot \vec{e}_x}{\pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{1 \cdot x_A}{\sqrt{a^2 + x_A^2}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_A^2}}$$

Alternativ
Strahlensatz:

$$\frac{E_{1x}}{|E_1|} = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + a^2}}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{e}_x = E_{1x} = |\vec{E}_1| \cdot \cos \phi = |\vec{E}_1| \cdot \frac{X_A}{\sqrt{X_A^2 + a^2}}$$

$$= \frac{q_L a \cdot X_A}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2 + X_A^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + X_A^2}}$$

$$\vec{F}_{ges} = (E_{1x} + E_{2x}) \cdot \vec{e}_x = 2 \cdot E_{1x} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{q_L \cdot a \cdot X_A \cdot \vec{e}_x}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2 + X_A^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + X_A^2}}$$

f)

$$E_x = E_z = 0$$

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{q_L \cdot a}{2\pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x_A^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_A^2}}$$

27.10.09

Kleingruppe

$$E_{1y} = \vec{E}_1 \cdot \vec{e}_y = |\vec{E}_1| \cdot \underbrace{\cos(\alpha)}_{\text{beachte Winkel}} = |\vec{E}_1| \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x_A^2}} = E_{2y}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{ges}} &= (E_{1y} + E_{2y})(+\vec{e}_y) = 2 \cdot E_{1y}(\vec{e}_y) \\ &= \frac{+q_L \cdot a^2}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + x_A^2}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_A^2}} \cdot \vec{e}_y \\ &= \frac{+q_L \cdot a^2}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2 + x_A^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_A^2}} \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Nur im
homogenen
Feld!

28.10.09

Kleingruppe

③ „Auf einen Dipol wirkt keine resultierende Gesamtkraft“

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \vec{E} \cdot Q_1 = E_0 \cdot \vec{e}_x \cdot \underbrace{q_{L1} \cdot 2a}_{q_{L1} = \frac{Q_1}{2a}} \\ &= -\vec{F}_2, \quad \text{da } q_{L1} = -q_{L2} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Abstand zw. den Ladungen
(auf q_{L2} hin)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{d} \times \vec{F}_1 = (2a \cdot \vec{e}_y) \times (E_0 \cdot \vec{e}_x \cdot q_{L1} \cdot 2a) \\ &= -2a \cdot E_0 \cdot q_{L1} \cdot 2a (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) \\ &= +4a^2 E_0 \cdot q_{L1} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Aus 2.f.

$$b) \quad \vec{F}_Q = \vec{E}_{\text{ges}} \cdot Q = \frac{+q_L \cdot a^2 \cdot Q}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2 + x_Q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_Q^2}} \cdot \vec{e}_y$$

„actio est reactio“

$$x_Q = x_A$$

$$\vec{F}_{\text{ges}} = -\vec{F}_Q = \frac{-q_L \cdot a^2}{\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1 \cdot Q}{a^2 + x_Q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x_Q^2}} \cdot \vec{e}_y$$

04.11.09

(4)

Gaußscher Satz

Kleingruppe a)

2

Immer gültig!

$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \iiint_V \rho_e dV \quad (= Q_{\text{ein}})$$

"Standard Trick"

Hülle beliebig wählbar!

$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = \oint_H \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \frac{\epsilon(\vec{r}) \cdot E(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2}{\uparrow \text{weil } \vec{E} \parallel d\vec{A} \text{ und } \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \text{const. auf } H}$$

Integration da Ladung inhomogen!

$$\iiint_V \rho_e dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^r \rho_{e0} \cdot \frac{r^2}{a^2} \cdot \underbrace{r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi}_{\text{Funktionaldeterminante}} = dV$$

"E-Feld auf Hülle konstant"

$$= \frac{\rho_{e0} \cdot 2\pi}{a^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \int_{r=0}^r r^4 dr d\theta = \frac{4}{5} \cdot \frac{\pi \cdot \rho_{e0} \cdot r^5}{a^2}$$

Nur Beträge

$$\textcircled{\text{I}} \quad 0 \leq r < a$$

kein $\frac{4}{3}\pi \rho_{e0} \frac{r^5}{a^2}$ da inhomogen!

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{\text{I}}(r) = \frac{\rho_{e0}}{20 \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} \cdot r^3}}$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad a < r \leq b : \text{Ladung nur in I. (Ladung der Kugel) \quad \text{gesamten}}$$

$$\iiint_V \rho_e(r) dV = \frac{4}{5} \cdot \pi \cdot \rho_{e0} \cdot a^3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{\text{II}}(r) = \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot k \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad r > b$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{\text{III}}(r) = \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}}}$$

Kreuzprodukt (X)

XYZXYZ

p o z p o z

r o o r o o

+ -

Vorzeichen

z I.

 $\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$

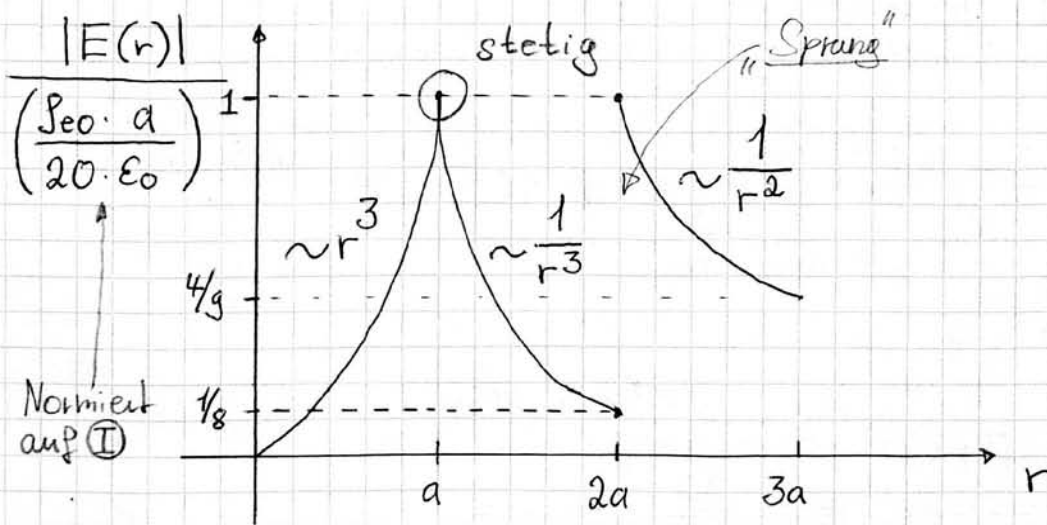
$$b) \quad E_I(a) \stackrel{!}{=} E_{II}(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_{eo} \cdot a^3}{5k \cdot \epsilon_0 \cdot a^3} = \frac{\rho_{eo} \cdot a^3}{20a^2 \cdot \epsilon_0} \Rightarrow 5k = \frac{20}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{k = \frac{4}{a}}$$

"E-Feld muss nicht stetig sein!"
(D-Feld auch nicht!)

$$E_I(r) = \frac{\rho_{eo} \cdot r^3}{20 \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} ; E_{II}(r) = \frac{\rho_{eo} \cdot a^4}{20 \epsilon_0 r^3} ; E_{III}(r) = \frac{\rho_{eo} \cdot a^3}{5 \epsilon_0 \cdot r^2}$$



c.)

I $0 \leq r < a$

$$\phi_I(r) = \phi_e(r=0) - \int_0^r \vec{E}_I \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Bezugspunkt}}{=} 0 - \int_0^r E_I dr$$

$$= \frac{-\rho_{eo}}{20 \cdot \epsilon_0 \cdot a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^r = \underline{\underline{-\frac{\rho_{eo} \cdot r^4}{80 \cdot \epsilon_0 \cdot a^2}}}$$

II $a < r < b$

$$\phi_{II}(r) = \phi_I(a) - \int_a^r \frac{\rho_{eo} \cdot a^4}{20 \epsilon_0 \cdot r^3} dr = \underline{\underline{-3 \frac{\rho_{eo} \cdot a^2}{80 \epsilon_0} + \frac{\rho_{eo} \cdot a^4}{40 \epsilon_0 \cdot r^2}}}$$

04.11.09

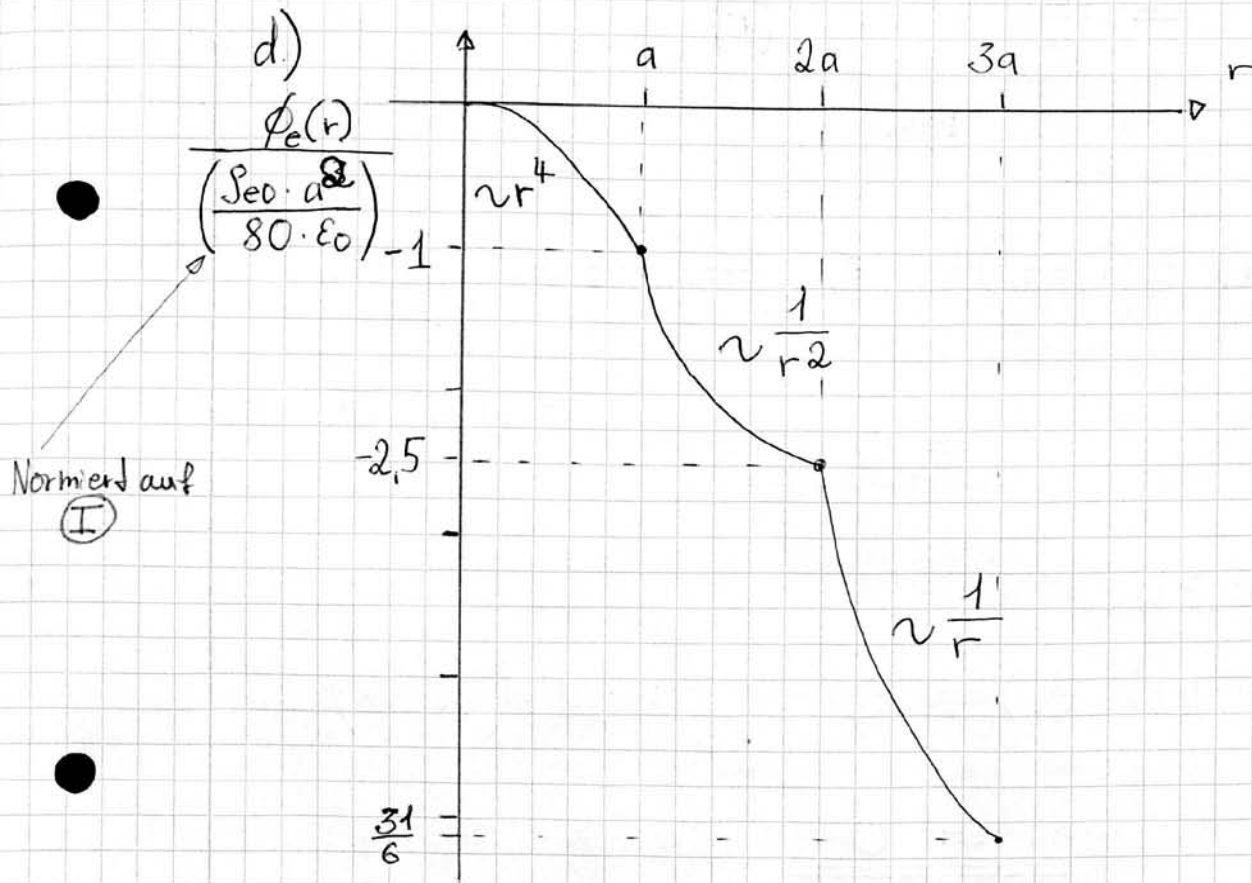
III $r > b$

Kleingruppe

$$\phi_{\text{III}}(r) = \phi_{\text{II}}(2a) - \int_{r=2a}^r \frac{\rho_{\text{eo}} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr$$

$$= -\frac{21}{160} \cdot \frac{\rho_{\text{eo}} \cdot a^2}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{eo}} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

$\vec{E} = -\text{grad}\phi$ „Elektrostatistisches Potenzial immer stetig!“



e)

Eine Ersatzpunktladung im Ursprung mit

$$\underline{Q = \frac{4}{5} \pi \rho_{\text{eo}} \cdot a^3} \quad \left. \vphantom{Q = \frac{4}{5} \pi \rho_{\text{eo}} \cdot a^3}} \right\} \begin{array}{l} \text{Aussage des} \\ \text{Gauß'schen Satzes} \end{array}$$

f.) Aus Kugelsymmetrie folgt:

04.11.09
Kleingruppe

$$D_\theta = D_\phi = 0 \quad ; \quad D_r = \varepsilon(r) \cdot E(r)$$

Formelsammlung

Beachte

① $0 \leq r < a$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}(r) &= \operatorname{div} (\varepsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) = \underline{4 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_{eo}}{20 \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2}} \cdot \operatorname{div}(r^3 \vec{e}_r) \\ &= \underline{\frac{\rho_{eo}}{a^2} \cdot r^2 = \rho_c(r)} \quad \text{Siehe Aufgabenstellung} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r^3) \\ &= 5 \cdot r^2 \end{aligned}$$

② $a < r < b$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varepsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) &= k \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_{eo} \cdot a^3}{5k \cdot \varepsilon_0} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \\ &= \underline{\underline{0}} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{r^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

③ $r > b$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\varepsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) &= \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho_{eo} \cdot a^3}{5 \cdot \varepsilon_0} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \right) \\ &= \underline{\underline{0}} \quad (\text{Da keine Ladung in diesem Raum}) \end{aligned}$$

$\operatorname{div} \hat{=} \text{„Quellendichte“}$

09.11.09

Kleingruppe

3

Rotationssym.

Zylinderkoord.

Polarisations
VektorE-Feld gegen-
gerichtet

(im Feld des Dipols)

gilt nicht
immer!

(bzgl. Außenfeld)

Nicht
ausrechnen!

(5)

a.) $d\vec{p} = \vec{P} \cdot dV_Q$

 $A(0,0,z_A)$

$$d\phi_A = \frac{d\vec{p}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

$$\vec{r}_{AQ} = z_A \cdot \vec{e}_z - z_Q \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$$
$$= (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}$$

$$= \frac{d\vec{p}}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

b.)

$$d\phi_A = \frac{\vec{P} \cdot dV_Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{P_0 \cdot \vec{e}_z}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q}}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \underbrace{\rho_Q \cdot d\rho_Q \cdot d\phi_Q \cdot dz_Q}_{= dV_Q}$$

$$= \frac{P_0}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \rho_Q}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot d\rho_Q d\phi_Q dz_Q \quad (\text{Formelsammlung})$$

für $z_A > 0$

c.)

$$\phi_A(0,0,z_A) = \int_{V_Q} d\phi_A = \int_{z_Q=-a}^0 \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \int_{\rho_Q=0}^R \frac{P_0}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q)}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dV_Q$$

$$= \int_{\rho_Q=0}^R \int_{z_Q=-a}^0 \frac{P_0}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \rho_Q}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dz_Q \cdot d\rho_Q$$

— „Polarisation P_0 entspricht der Oberflächenladungsdichte σ_e einer Kreisscheibe“ —

($\sigma_e \stackrel{!}{=} P_0$, Vgl.: Auf. 5c, Großgruppe)

$$[\sigma_e] = [P_0] = \frac{As}{m^2}$$

$$d) \phi_A(0,0,z_A) = \int_{\rho_Q=0}^R \int_{z_Q=-a}^0 \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(z_A - z_Q) \cdot \rho_Q}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dz_Q \cdot d\rho_Q$$

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^R \rho_Q \int_{z_Q=-a}^0 \frac{z_A - z_Q}{[(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2]^{\frac{3}{2}}} dz_Q \cdot d\rho_Q$$

Signalwort:

 $\rho_e \Rightarrow$ Gauss

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^R \rho_Q \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(z_A - z_Q)^2 + \rho_Q^2}} \right]_{z_Q=-a}^0 d\rho_Q$$

Nur Scheibe
in x-y-Ebene
bringt Beitrag!
(da Dipole)

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^R \rho_Q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z_A + a)^2 + \rho_Q^2}} \right) d\rho_Q$$

für $a \rightarrow \infty$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \rightarrow 0$$

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \int_{\rho_Q=0}^R \frac{\rho_Q}{\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}} \cdot d\rho_Q = \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \left[\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2} \right]_{\rho_Q=0}^R$$

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} (\sqrt{z_A^2 + R^2} - z_A)$$

Vgl. Aufgabe 5c: (Wichtig!)
(Ergebnis!)

e) Aus Rotationssymmetrie folgt:

$$\vec{E}(0,0,z_A) = E_z(0,0,z_A) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi$$

$$\vec{E}(0,0,z_A) = -\text{grad} \phi_A(0,0,z_A)$$

Formelsammlung

Gradient bei
verschiedenen
Systemen
unterschiedlich!

folgt aus
Symmetrie

$$= -\vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z_A} \left(\frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} (\sqrt{z_A^2 + R^2} - z_A) \right)$$

$$= -\vec{e}_z \cdot \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \left(\frac{1}{2} (z_A^2 + R^2)^{-1/2} \cdot 2z_A - 1 \right)$$

$$= \frac{\rho_0}{2 \cdot \epsilon_0} \left(1 - \frac{z_A}{\sqrt{z_A^2 + R^2}} \right) \cdot \vec{e}_z \stackrel{!}{=} \frac{\rho_0}{2 \epsilon_0} \quad (\text{Vgl.: 5c})$$

16.11.09
Kleingruppe
4

⑥ „Gauß-Fläche mit Symmetrieeigenschaften der Ladung oft nützlich!“

a) $\oint_H \epsilon \cdot \vec{E} d\vec{A} = E_s(\rho) \cdot \epsilon \cdot 2\pi \cdot \rho \cdot d$
 $\triangle \uparrow$
 $= Q = q_L \cdot d$ für $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$

Da Feld auf Zylinderoberfläche konstant und Radialfeld.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(\rho) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\rho}} \quad \text{für } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$$

q_L, ϵ, ρ_e
unabhängig
von der
Dimension!

$d\vec{s}$
↓
Formelsammlung

Signalwort:

- q_L
- E-Feld

↓
Gauß

$$u = \int \vec{E}(\rho) \cdot d\vec{s} = \int_{\rho=\rho_1}^{\rho_2} \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon \cdot \rho} d\rho$$

Maler
Vorgehen

$$= \underline{\underline{\frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}}$$

b)

$$\underline{\underline{\vec{E}(\rho) = \vec{E} = \frac{u}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \cdot \rho} \cdot \vec{e}_\rho}} \quad \text{für } \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$$

Streufelder
vernachlässigen

↓
Dort kein
E-Feld

c) $|\vec{E}|$ maximal bei $\rho = \rho_1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\vec{E}| = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon \cdot \rho_1}}}$$

d)

$$C_1 = \frac{Q}{u} = \frac{q_L \cdot d}{\frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} = \underline{\underline{\frac{d \cdot 2\pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}}}$$

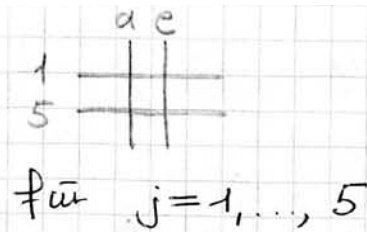
„Kochrezept“

$$e) \quad \phi_{aj} = \phi_{ej}$$

$$\phi_{bj} = \phi_{dj}$$

$$\phi_{x1} = \phi_{x5}$$

$$\phi_{x2} = \phi_{x4}$$



für $x=a, \dots, e$

$\Rightarrow$ 4 Punkte müssen berechnet werden.

$$f) \quad \phi_0 = \frac{1}{4} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

Differenzverfahren

da $\Delta \phi = 0$ und Randwerte angegeben
keine Minima dazwischen!

Berechne z.B.: a_1, b_1, c_1, d_2

$$\phi_{a1} = \frac{1}{4} (2 \cdot \phi_{b1})$$

$$\phi_{b1} = \frac{1}{4} (\phi_{a1} + \phi_{c1} + \phi_{d2})$$

$$\phi_{c1} = \frac{1}{4} (U + 2 \cdot \phi_{b1})$$

$$\phi_{d2} = \frac{1}{4} (2U + 2 \cdot \phi_{b1})$$

$$\phi_{b2} = \phi_{d2}$$

$$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = 0$$

falls ladungsfreier Raum ($\rho_e = 0$)

24.11.09
Kleingruppe
5

⑦ $\int_{\Gamma_a} \vec{E} d\vec{s} = 0$ Γ_a : Weg auf Äquipotentialfläche
 — „Potential auf diesen Flächen konstant“ —

a)
E-Feld von ∞ langer Linienladung $\parallel$ zur Z-Achse

FS $\rightarrow$

$$\vec{E}_0 = \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_s}{s}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{qL}{2\pi \epsilon_0} \frac{\vec{e}_{s_1}}{s_1}$$

„Relativverschiebung
des Ursprungs“

Addition in
Zylinder oder
Kugelkoordinat.
 $\Rightarrow$ FALSCH

$$\begin{aligned} \phi_1(s_1) &= \underbrace{\varphi_1(s_{10})}_{=0} - \int_{s'_1=a}^{s_1} \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \frac{ds'_1}{s'_1} \\ &= - \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{s_1}{a}\right) \end{aligned}$$

Nicht
vergessen!

b)

$$\varphi_2(s_2) = \varphi_2(s_{20}) + \int_{s'_2}^{s_2} \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \frac{ds'_2}{s'_2}$$

Beachte $s \geq 0 \rightarrow s'_2 = a$

$$= \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{s_2}{a}\right)$$

Nur mögl. falls gleicher Bezugspunkt

$$\Rightarrow \varphi_{\text{ges}}(s_1, s_2) \stackrel{!}{=} \varphi_1(s_1) + \varphi_2(s_2) = \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{s_2}{a} \cdot \frac{a}{s_1}\right)$$

$$= \frac{qL}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$$

c) Elektroden müssen auf Äquipotentialflächen liegen.

24.11.09
Kleingruppe

$$a = \sqrt{x_m^2 - R^2} = \sqrt{x_{m,i}^2 - R_i^2} = 12 \rho_0$$

$$\Rightarrow 2a = 24 \rho_0$$

$$a = \sqrt{x_{m,A}^2 - R_A^2} = 12 \rho_0 \Rightarrow \underline{\underline{2a = 24 \rho_0}}$$

Muss für beide Elektroden gelten, sonst unlösbar!

d)

$$U = \varphi_i - \varphi_a = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\ln\left(\frac{\rho_{2,i}}{\rho_{1,i}}\right) - \ln\left(\frac{\rho_{2,a}}{\rho_{1,a}}\right) \right)$$

┌

$$\rho_{2,i} = a + x_{m,i} - R_i = 12 \rho_0 + 13 \rho_0 - 5 \rho_0 = 20 \rho_0$$

$$\rho_{1,i} = a - (x_{m,i} - R_i) = 12 \rho_0 - 13 \rho_0 + 5 \rho_0 = 4 \rho_0$$

$$\rho_{2,a} = a + x_{m,a} - R_a = 12 \rho_0 + 15 \rho_0 - 9 \rho_0 = 18 \rho_0$$

$$\rho_{1,a} = a - (x_{m,a} - R_a) = 12 \rho_0 - 15 \rho_0 + 9 \rho_0 = 6 \rho_0$$

└

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \left(\ln\left(\frac{20}{4}\right) - \ln\left(\frac{18}{6}\right) \right) = \underline{\underline{\frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)}}$$

muss mach
können

$$C_E = \frac{Q}{U} = \frac{q_L \cdot l}{\frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \underline{\underline{\frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}}}$$

24.11.09

Kleingruppe

e)

$$U_K = \int_{r'=R_i}^{R_a} E_0(r') dr' = \int_{r'=R_i}^{R_a} \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \frac{dr'}{r'}$$

$$= \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right) = \frac{q_L}{2\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

Vgl. Vorzeichen
mit ϕ

$$C_K = \frac{Q}{U_K} = \frac{q_L \cdot l}{\frac{q_L}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{9}{5}\right)} = \underline{\underline{\frac{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}}}$$

$$< C_E$$

⑧ „ Aus der Symmetrie der Anordnung folgt: $\vec{J}(\vec{r}) = J_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$ “ 30.11.09
Kleingruppe

a) $l = l' \cdot \overbrace{\ell}^{\text{fiktive Länge}} = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \iint_A J_\rho dA$

$$= \int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} J_\rho \cdot \rho \cdot d\phi dz = J_\rho \cdot \rho \cdot \ell \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{J}(\rho > 0) = \frac{l'}{\rho \cdot 2\pi} \cdot \vec{e}_\rho$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}} \leftarrow \text{lokale Ohmsche Gesetz}$$

$$\vec{E} = \frac{l'}{2\pi \rho \cdot \sigma_0 \cdot (1 + \frac{\rho}{R})} \cdot \vec{e}_\rho \quad \text{für } 0 < \rho < R$$

$$\vec{E} = \frac{l'}{4\pi \rho \cdot \sigma_0} \cdot \vec{e}_\rho \quad \text{für } \rho \geq R$$

b)

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{l' \cdot \epsilon_0}{2\pi \rho \cdot \sigma_0 (1 + \frac{\rho}{R})} \cdot \vec{e}_\rho \quad \text{für } 0 < \rho < R$$

$$\vec{D} = \frac{l' \cdot \epsilon_0}{4\pi R \sigma_0} \cdot \vec{e}_\rho \quad \text{für } \rho \geq R$$

30.11.09

Kleingruppe

c)

$$\begin{aligned}
 j_e (0 < \rho < R) &= \operatorname{div} \frac{l' \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{e}_\rho}{2\pi \cdot \rho \cdot \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)} \\
 &= \frac{l' \cdot \epsilon_0}{2\pi \cdot \sigma_0 \cdot \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho}{R}} \right) \\
 &= \frac{l' \cdot \epsilon_0 \cdot R}{2\pi \cdot \sigma_0 \cdot \rho} \cdot \frac{-1}{\left(R + \rho\right)^2} = - \frac{l' \cdot \epsilon_0}{2\pi \cdot \sigma_0 \cdot \rho \cdot R \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^2}
 \end{aligned}$$

dielektrische
Absorption →

$$\begin{aligned}
 j_e (\rho > R) &= \operatorname{div} \frac{l' \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{e}_\rho}{4\pi R \sigma_0} \quad \left. \begin{array}{l} \text{obwohl kein} \\ \rho! \end{array} \right\} \\
 &= \frac{l' \cdot \epsilon_0}{4\pi \cdot R \cdot \sigma_0 \cdot \rho} \quad \left(\text{aber } \vec{e}_\rho! \right)
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 q_L \cdot l &= Q_{\text{ein}} = \oint_H \underbrace{\vec{D}(0 < \rho < R)}_{\rho \rightarrow 0} \cdot d\vec{A} \\
 &\stackrel{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}}{=} \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{l' \cdot \epsilon_0}{2\pi \cdot \rho \cdot \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)} \cdot \rho \cdot d\phi \cdot dz \quad \begin{array}{l} \text{für} \\ \rho \rightarrow 0 \end{array} \\
 &= \frac{l' \cdot \epsilon_0 \cdot l}{\sigma_0 \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)} \xrightarrow{\text{für } \rho \rightarrow 0} \frac{l' \cdot \epsilon_0 \cdot l}{\sigma_0} \\
 \Rightarrow \quad q_L &= \frac{l' \cdot \epsilon_0}{\sigma_0}
 \end{aligned}$$

ρ muss gegen Null laufen
da sonst Ladungen aus
dem Dielektrikum
mitgezählt werden!

e) $\vec{D} \sim \frac{1}{\rho} \Rightarrow \rho=0 \text{ und } \rho \rightarrow 0 \text{ ungeeignet}$

als Bezugspunkt, da $\int \vec{D} d\vec{s}$ nicht konvergiert. ($\varphi_e(\rho) = -\int_{\rho_0}^{\rho} E_s ds$ konvergiert

(10) (9)

weder für $\rho_0 \rightarrow \infty$ noch $\rho_0 \rightarrow 0$) 09.12.09

Kleingruppe

7

a) $\oiint_A \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \epsilon_0 d\vec{A} = E_r(r, t) \cdot \epsilon_0 \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{ein}} = Q_1(t)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q_1(t)}{4\pi \epsilon_0 \cdot r^2}}}$ für $r_1 < r < r_2$
 $t > 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \epsilon_0 = \frac{Q_1(t)}{4\pi r^2}}}$

Beachte:

Außenfeld immer gleich!

Nur Modellierung

b) $\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}}$ „Haben alle die selbe Richtung!“

⌈ Kontinuitätsgleichung:

Gauß'scher Satz der Vektoranalysis

Gilt nur für ideale Materialien!

$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) = 0 \Leftrightarrow \oiint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \right) d\vec{A} = 0$

Bsp: Stationärer geschlossener Stromkreis: $\left(\frac{\partial}{\partial t} \times = 0 \right)$

Immer gültig!

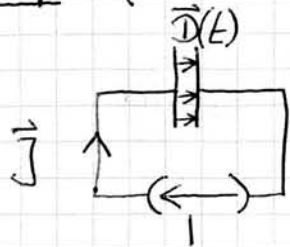
$\text{div}(\vec{J}) = 0 \Rightarrow \oiint_H \vec{J} d\vec{A} = 0 \Rightarrow \sum_i I_i = 0$

08.12.09

Kleingruppe

Vgl.
Aufgabe 2WS 06/07
Herrmann

Bsp: (nichtstationär)



$$\operatorname{div} \vec{J} \neq 0$$

$$\operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Das D-Feld wird von den hinzukommenden Ladungen verstärkt.

– „Alles was reinkommt muss auch wieder rauskommen“

L

$$\oint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A} = \oint_H \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} D_r + \frac{\partial D_r}{\partial t} \right) dA \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} D_r(t, r) + \frac{\partial}{\partial t} D_r(t, r) = 0$$

Das Q
genauso
aufgestellt und
lösbar!

c)

$$D_r(r, t) = D_0(r) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \left. \vphantom{D_r(r, t)} \right\} \underline{\underline{\text{DGL ANSATZ}}}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} D_0(r) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + D_0(r) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

$$D_0(r) = \frac{Q_0}{4\pi r^2}$$

für $r_1 < r < r_2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \cdot \exp\left(-t \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \cdot \vec{e}_r}}$$

für $r_1 < r < r_2$

d)

$$I(t) = \oiint_A \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \oiint_A \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\vec{\sigma}}{\epsilon_0} \cdot d\vec{A}$$

$$= \oiint_A \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{4\pi r^2} \exp\left(-t \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \cdot dA$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot Q_0 \cdot \exp\left(-t \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)}}, \quad t > 0$$

$$U_{12}(t) = \int \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{Q_0}{4\pi \cdot \epsilon_0 r^2} \cdot \exp\left(-t \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) dr$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi \cdot \epsilon_0} \exp\left(-t \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=r_1}^{r_2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{Q_0}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot \exp\left(-t \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)}}, \quad t > 0$$

e)

Im stationären Fall ist ein Leiter feldfrei! ⚡
 Sonst müssten sich Ladungen bewegen.

Q_0 sitzt homogen verteilt auf der Außenhaut.

$$\text{Vgl. } \vec{D}(\vec{r}, t \rightarrow \infty) = 0$$

Beim idealen Leiter $\sigma \rightarrow \infty$, somit immer sofort feldfrei.

09.12.09

Kleingruppe

beim idealen
Kondensator

f) Ein Plattenkondensator ist im inneren Feld frei, wenn beide Elektroden die gleiche Ladung tragen. Für $t \rightarrow \infty$ sammeln sich somit $\frac{Q_0}{2}$ Ladungen (homogen).

14.12.09

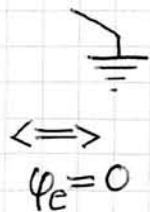
Kleingruppe

8

(10)

a) Die Feldlinien stehen senkrecht auf der Kugeloberfläche. Das Feld hat nur eine radiale Komponente. (Auf Oberfläche Kugel)
 $(E_t = 0)$ ✓

„Auf einer Leiteroberfläche gilt: $\varphi_e = \text{const}$,
daraus folgt $E_t = 0$ “



b) Es muss eine Ersatzladung innerhalb der Kugel auf der x-Achse angenommen werden.

Grenzen
vertauscht

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{R^2}{x_1} \\ x_2' &= \frac{R^2}{x_2} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{FS}}$$

c)

$$x' = \frac{R^2}{x} \quad \text{für } x_2' < x' < x_1'$$

infinite
Längen
müssen
positiv sein! →

$$\left| \frac{dx'}{dx} \right| = \frac{R^2}{x^2} \Rightarrow \underline{\underline{dx' = \frac{R^2}{x^2} \cdot dx}}$$

d)

$$dQ' = -dQ \cdot \frac{R}{x}$$

gegeben
 $dQ = q_L \cdot dx$

$$dQ'(x, dx) = -q_L \cdot dx \cdot \frac{R}{x}$$

$$dQ' \stackrel{e)}{=} -q_L \cdot dx' \cdot \frac{x}{R}$$

$$dQ'(x', dx') = -q_L \cdot R \cdot \frac{dx'}{x'} \quad \leftarrow \text{MUSS "negativ" sein! (Bildladung)}$$

e)

Merke

$$|q'_L(x')| = \left| \frac{dQ'(x')}{dx'} \right| = q_L \cdot R \cdot \frac{1}{x'}$$

$$\Rightarrow \underline{q'_L(x') = -q_L \cdot \frac{R}{x'}}$$

← Nicht konstant!
 wg. Spiegelung an Kugel

f)

Nur in E_y -Richtung. (da Leiter)

— „Bildladung (= Ersatzladung Q') erzeugt dasselbe Feld für $|\vec{r}| > R$ wie Originalanordnung“ —

— „Influenz: Das Feld der Linienladung verschiebt Ladungen auf der Oberfläche der Kugel, so dass der Innenraum feldfrei ($|\vec{r}| < R$) ist.“ —

21.12.09

(11)

Kleingruppe

8

a)

$$I = \iint_A \vec{J}(\rho, \phi) d\vec{A} = \int_{z=0}^{z_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} J_\rho(\rho, \phi) \underbrace{\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho}_{=1} \rho d\phi dz$$

$$= J_\rho(\rho, \phi) \cdot \rho \cdot z_0 \cdot 2\pi$$

$$A_{\text{Zylinder}} = 2\pi \rho \cdot z_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{J}(\rho, \phi) = \frac{I}{2\pi \rho \cdot z_0} \cdot \vec{e}_\rho \quad \text{für } \rho_1 < \rho < \rho_2, \quad 0 < z < z_0}}}$$

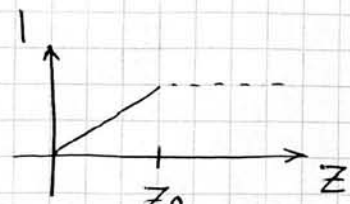
b)

Strom ist gleichmässig auf Zylinderfläche für $z > z_0$

J_A :
Flächensstrom

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{J}_A(z > z_0) = \frac{-I}{2\pi \cdot \rho_1} \cdot \vec{e}_z}}}$$

In jedem infinitesimalen Stück dz für $0 < z < z_0$ fließt der gleiche Strom dI ab von $\rho = \rho_1$.

$$I(\rho = \rho_1, 0 < z < z_0) = I \cdot \frac{z}{z_0}$$


Folgt auch aus a): $\vec{J} \neq f(z) \Rightarrow E \neq f(z)$
 $\Rightarrow \varphi = \text{const}$ bei $\rho = \rho_1 \Rightarrow dI = \text{const}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{J}_A(0 < z < z_0) = \frac{-I}{2\pi \rho_1} \cdot \frac{z}{z_0} \cdot \vec{e}_z}}}$$

c) Durchflutungsgesetz

21.12.09

Kleingruppe

c)

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_{\text{ein}}$$

„Rechte-Hand-Regel“



– „Wähle geschlossene Kurve C so, dass $\vec{H} = \text{const.}$ “ – Vgl. Gauss
auf der Kurve

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \oint_C H_\phi ds = H_\phi \oint_C \vec{e}_\phi d\vec{s} = H_\phi \underbrace{2\pi \rho}_{(-2\pi \rho)} = I_{\text{ein}} = -I$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{H} = \frac{-I}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_\phi}} \quad \text{für } \rho_1 < \rho < \rho_2, \quad z_0 < z$$

$$\text{für } \rho > \rho_2: \quad I_{\text{ein}} = I - I = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{H} = 0}} \quad \text{für } \rho > \rho_2$$

z.B.:

Koaxialkabe

d.)

$H_\rho = 0$ Durch Kompensation der Ströme im Leiter.

Durch die von einem Umlauf C aufgespannte Fläche (infinitesimal dünn) tritt nur der Anteil $I(z)$ des Flächenstroms, aber nicht die Stromdichte aus a.) } wichtig!

Der Zusammenhang zwischen dem Umlaufsinn von C und der Orientierung der Fläche ($d\vec{A}$) wird durch eine Rechtsschraube wiedergegeben.

21.12.09

Kleingruppe

Strom unabh.
vom Radius
der Fläche

$$\Rightarrow I(z) = \int_A (0 < z < z_0) \cdot 2\pi s_1 \cdot \vec{e}_z$$

$$= -I \cdot \frac{z}{z_0}$$

↑
Richtung der
aufgespannten
Fläche

$$= I_{\text{ein}} = \int_C \vec{H} d\vec{s} = H_\phi \cdot 2\pi s$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(s_1 < s < s_2) = \frac{-I \cdot \frac{z}{z_0}}{2\pi s} \cdot \vec{e}_\phi \quad \text{für } 0 < z < z_0}}$$

e) Dielektrische Absorption (im stationären Fall)

Alternativ

$$\text{div } \vec{D} = \rho_e$$

$$\text{div } \vec{J} \cdot \frac{\epsilon}{\sigma} = \rho_e$$

$$\rho_e(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \cdot \text{grad} \left(\frac{\epsilon(\vec{r})}{\sigma(\vec{r})} \right)$$

$$= \frac{I}{2\pi s \cdot z_0} \cdot \vec{e}_s \cdot \text{grad} \left(\frac{\epsilon_0}{\sigma_0 \cdot s_1^2 / s^2} \right)$$

$$= \frac{I}{2\pi s \cdot z_0} \cdot \underbrace{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_s}_{=1} \cdot \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \cdot \frac{2s}{s_1^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{I}{\pi \cdot z_0 \cdot s_1^2} \cdot \frac{\epsilon_0}{\sigma_0}}}$$

— „Dielektrische Absorption kann NUR in einem
inhomogenen Medium stattfinden“ —

12

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_{\text{ein}} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

110110

Kleingruppe

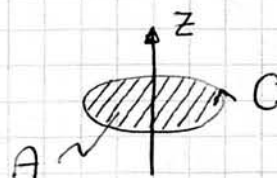
Immer gültig!

— " Dabei umschließt die Kurve C die Fläche A im Rechtsschraubensinn " —

- a) Die Anordnung und damit $\vec{H}$ sind invariant bzgl. einer Verschiebung in z -Richtung und einer Drehung um die z -Achse. $\vec{H} = H(r, \phi)$

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_r \vec{e}_r + H_\phi \vec{e}_\phi + H_z \vec{e}_z$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$



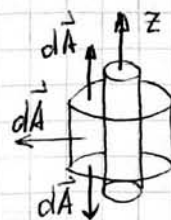
$$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_z$$

$$H_\phi(r) \cdot 2\pi r = 0, \text{ da } \vec{J} \perp d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_\phi(r) = 0}} \text{ für } r \leq R \text{ und } r > R$$

b)

$$\oint_A \vec{H} d\vec{A} \stackrel{!}{=} 0$$



$$\oint_A \vec{H} d\vec{A} = \iint_{A_{\text{mantel}}} H_r dA + \underbrace{\iint_{A_{\text{DECKEL}}} H_z dA - \iint_{A_{\text{BODEN}}} H_z dA}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow H_r(r) \cdot 2\pi r \cdot h = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_r(r) = 0}}$$

11.01.10

Kleingruppe

c)

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \left(= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Alternativ:

$$\vec{J}_A = \sigma_e \cdot \vec{v}$$

$$= \sigma_e \cdot \omega \cdot R \vec{e}_\phi$$

$$I_A = \frac{Q_A}{T} = \frac{\sigma_e \cdot 2\pi R \cdot h}{2\pi} \cdot \omega = \underline{\underline{\sigma_e R \cdot h \cdot \omega}}$$

d)

In der eingezeichneten Fläche zeigt $d\vec{A}$ in $\vec{e}_\phi$ -Richtung und bildet eine Rechtsschraube mit der C-Kurve

Nur der Weg C_1 liefert einen Beitrag, da sonst $H=0$ oder $d\vec{s} \perp \vec{H}$.

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = \int_{C_1} H_z(\rho_1) \underbrace{ds}_{=dz} + \int_{C_2} H_z \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\rho}_{=0} ds + \underbrace{\left(\int_{C_3} H_z(\rho_2) dz \right)}_{=0} + 0$$

$$= H_z(\rho_1) \cdot h \stackrel{!}{=} I_A = \sigma_e R \cdot h \cdot \omega$$

$\rho_1 < R$

KONSTANT
HOMOGEN

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(0 \leq \rho < R) = \sigma_e R \cdot \omega \cdot \vec{e}_z}}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=I}$

Die bewegte Flächenladung entspricht den Wicklungen um einen Schenkel in denen ein Strom I fließt (Die Form des Feldes ist ähnlich)
[Im Inneren von einer schlanken Spule gilt $H_i = \frac{NI}{l}$]

e)

$$\vec{J} = \vec{v} \cdot \rho_e$$

$$\vec{J}_A = \vec{v} \cdot \sigma_e$$

110110

Kleingruppe

$$\vec{v}(\vec{r}) = \rho_{e0} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\phi \quad \left(\text{aus } \omega = \frac{v}{r} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{J}(r < R) = \rho_{e0} \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = H_z(r_1) \cdot h \stackrel{!}{=} \iint_A \vec{J} d\vec{A}$$

$$= \int_0^h \int_{r_1}^R \rho_{e0} \cdot r \cdot \omega \underbrace{\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi}_{=1} \cdot dr dz$$

$$= \rho_{e0} \cdot h \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} (R^2 - r_1^2)$$

In der z-Achse
am stärkstennicht
konstant
(Raumladung)
(unabhängig
von μ)

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\rho_{e0} \cdot \omega}{2} (R^2 - r^2) \cdot \vec{e}_z; \text{ für } r < R}}$$

$$f.) \quad \oint_C \vec{H} d\vec{s} = \iint_A (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\vec{e}_\phi \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$= -\vec{e}_\phi \cdot (-\rho_{e0} \cdot \omega \cdot r)$$

$$= \rho_{e0} \cdot r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\phi = \underline{\underline{\vec{J}(r < R)}}$$

11.01.10

Kleingruppe

g)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} = j_e(\rho) \cdot \vec{v} = j_e(\rho) \cdot \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\text{rot } \vec{H} = -\vec{e}_\phi \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$= -\vec{e}_\phi \cdot \omega \cdot j_{e0} \left(2\rho - 3 \cdot \frac{\rho^2}{R} \right)$$

$$= \omega \cdot \rho \cdot j_{e0} \left(\frac{3\rho}{R} - 2 \right) \vec{e}_\phi \quad \text{"Koeffizientenvergleich"}$$

Durch Vektoren
teilen verboten

$$j_e(\rho) = \frac{\vec{J}}{\omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\phi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{j_e(\rho) = j_{e0} \left(\frac{3\rho}{R} - 2 \right)}}$$

Durch Vektoren teilen ist strikt verboten.

Strom allg. ist kein Vektor, obwohl er Richtung aufweist!

(13)

Biot - Savart - Gesetz

18.01.10

Kleingruppe

10

$$\vec{H}_A(\vec{r}_A) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A_Q} \frac{\vec{J}'_Q \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} dA_Q$$

 $\vec{J}'_Q \hat{=}$ Flächenstromdichte

„Die Vektoren $\vec{r}_{AQ}$, welche vom erzeugenden Strom $\vec{J}'_Q$ zum Aufpunkt zeigen, werden im Kreuzprodukt aufsummiert“ ($\hat{=}$ formal: Coulomb-Gesetz über erzeugende Ladung)

$$[\vec{J}'_Q] = \frac{A}{m}$$

a) $\vec{v} = \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\phi_Q}$

$$\Rightarrow \vec{J}'_Q = \sigma_e \cdot \omega \cdot \rho_Q \cdot \vec{e}_{\phi_Q}$$

Index Q bedeutet vom Ursprung aus gesehen (da Vektoren nicht einheitlich in Zylinderkoordinaten)

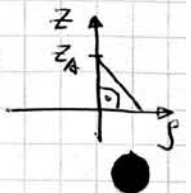
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$$

b) $\vec{r}_{AQ} = z_A \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_{\rho_Q} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q$

In Zylinderkoordinaten allgemein nicht richtig!

$r_{AQ} = \sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}$
Pythagoras

Bei schrägen Dreiecken Cosinussatz!



$$\begin{aligned} \vec{J}'_Q \times \vec{r}_{AQ} &= \sigma_e \omega \rho_Q \vec{e}_{\phi_Q} \times (z_A \vec{e}_z - \rho_Q \vec{e}_{\rho_Q}) \\ &= \sigma_e \omega \rho_Q (z_A \vec{e}_{\rho_Q} + \rho_Q \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$dA_Q = \rho_Q d\phi_Q d\rho_Q$$

Bei Biot Savart strikt

Zwischen Größen auf Quelle oder Aufpunkt

bezogen unterscheiden (A/Q)

18.01.10

Kleingruppe

$$\Rightarrow \vec{H}_A(\vec{r}_A) = \frac{\sigma_e \omega}{4\pi} \int_{\rho_Q=0}^a \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \frac{z_A \rho_Q \vec{e}_{\rho_Q} + \rho_Q^2 \vec{e}_z}{[z_A^2 + \rho_Q^2]^{3/2}} \rho_Q d\phi_Q d\rho_Q$$

c)

$$\vec{H}_A(\vec{r}_A) = H_{A,z} \cdot \vec{e}_z \quad \text{folgt aus Rotationssymmetrie}$$

$$H_{A,z} = \frac{\sigma_e \omega}{4\pi} \int_{\rho_Q=0}^a \int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \frac{\rho_Q^3}{[z_A^2 + \rho_Q^2]^{3/2}} d\phi_Q d\rho_Q$$

$$= \frac{\sigma_e \omega}{2} \left[\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2} + \frac{z_A^2}{\sqrt{z_A^2 + \rho_Q^2}} \right]_{\rho_Q=0}^a$$

$$= \frac{\sigma_e \omega}{2} \left[\sqrt{z_A^2 + a^2} + \frac{z_A^2}{\sqrt{z_A^2 + a^2}} - z_A - \frac{z_A^2}{z_A} \right]$$

$$= \frac{\sigma_e \omega}{2} \left(\frac{2z_A^2 + a^2}{\sqrt{z_A^2 + a^2}} - 2z_A \right)$$

d)

Vgl. Vorgehen

Coulomb-Gesetz

$$\rho_e \cdot dz_Q = d\sigma_e$$

$$z_A \rightsquigarrow z_A - z_Q$$

$$\Rightarrow d\vec{H}_A(\vec{r}_A) = \frac{\rho_e dz_Q \omega}{2} \left(\frac{2(z_A - z_Q)^2 + a^2}{\sqrt{(z_A - z_Q)^2 + a^2}} - 2(z_A - z_Q) \right) \cdot \vec{e}_z$$

(14)

Magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_m$$

Magnetische Fluß

$$\Phi(t) = \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \oint_C \vec{A}_m d\vec{s}$$

— „Dabei berandet C die Fläche A im Rechtsschraubensinn.“

25.01.10

Kleingruppe

11

$\text{div rot } \vec{v} =$
da $\text{div } \vec{B} = 0$
(immer)

} Stokes

a)

$$\underline{z(t) = z_0 - v_0 t}$$

$$\Phi(t) = \iint_A \vec{B} d\vec{A} = \oint_C \vec{A}_m(\rho_A = R, z_A = z(t)) \cdot d\vec{s}$$

magn. Mono

m
entspricht

Permanenmag

$$\left. \begin{aligned} d\vec{A} &= \rho \cdot d\phi \cdot dz \cdot \vec{e}_z \\ d\vec{s} &= R \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi \end{aligned} \right\} \underline{\text{Rechtsschraube}}$$

$$\Phi(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{R}{[R^2 + (z(t))^2]^{3/2}} \underbrace{\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi \cdot R \cdot d\phi}_{=1}$$

$$= \frac{\mu_0 m_0}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (z_0 - v_0 t)^2]^{3/2}}$$

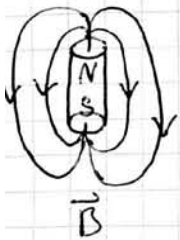
$$> 0, \text{ da } \boxed{d\vec{A} \uparrow \vec{B}}$$

25.01.10

Kleingruppe

b)

$$u_i(t) = - \frac{d\phi}{dt}$$

Induzierte
Spannung

$$u_{i1}(t) = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$= - \frac{\mu_0 m_0}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{R^2 \cdot (-V_0)}{[R^2 + (z_0 - V_0 t)^2]^{5/2}} \cdot 2(z_0 - V_0 t)$$

$$= - \frac{\mu_0 m_0 \cdot 3}{2} \frac{R^2 V_0 \cdot (z_0 - V_0 t)}{[R^2 + (z_0 - V_0 t)^2]^{5/2}}$$

— „Die Richtung der induzierten Spannung ist eindeutig festgelegt durch $d\vec{A}$ bzw. $d\vec{s}$ “ —

 $u_{i1}(t)$

c)

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Induzierte
Feldstärke

Nur B_{grund} und B_{ϕ} können einen Beitrag zu $\vec{E}_{i2}$ leisten, weil $\vec{v} = v_0(-\vec{e}_z)$. Aus der Rotationssymmetrie folgt $B_{\phi} = 0$. Somit ist nur B_{g} relevant.

$$B_g = \vec{e}_g \cdot \text{rot} \vec{A}_m = - \frac{\partial A_{m,\phi}}{\partial z_A}$$

$$= - \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{J_A}{[J_A^2 + z_A^2]^{5/2}} \cdot 2 z_A$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\mu_0 m_0 \cdot J_A \cdot z_A}{\pi [J_A^2 + z_A^2]^{5/2}}$$

d) Am Ort der Leiterschleife gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{1,2} &= \vec{v} \times \vec{B}_p(r_A=R, z_A=z(t)) \cdot \vec{e}_s \\ &= [v_0(-\vec{e}_z)] \times \left[\frac{3}{4} \frac{\mu_0 m_0 \cdot R \cdot (z_0 - v_0 t)}{\pi [R^2 + (z_0 - v_0 t)^2]^{5/2}} \cdot \vec{e}_s \right] \\ &= -\frac{3}{4} \frac{\mu_0 m_0 R v_0 (z_0 - v_0 t)}{\pi [R^2 + (z_0 - v_0 t)^2]^{5/2}} \cdot \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Lorenzkraft
für Induktion
verantwortlich

e)

$$U_{1,2}(t) = \oint_S \vec{E}_{1,2}(t) d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = \vec{e}_\phi \cdot R \cdot d\phi$$

nicht
vergessen!

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_0 m_0 R^2 v_0 (z_0 - v_0 t)}{[R^2 + (z_0 - v_0 t)^2]^{5/2}} = U_{1,1}(t)$$

Es gilt allgemein: (Essenz dieser Aufgabe)

$$-\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A}_m d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \Phi(t) = U_i(t) = \oint_C \vec{E}_i d\vec{s} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

— „Dabei umschließt die Kurve C die Fläche A im Rechtsschraubensinn“ —

(15)

a)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\phi \xrightarrow{\text{hier}} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \quad \begin{array}{l} \text{ln} \\ \text{x-z-Ebene} \\ \text{(y=0)} \end{array}$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^a \int_{x_s}^{x_s+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx dz \quad ; d\vec{A} = \vec{e}_y dx dz$$

$$= \frac{\mu_0 I \cdot a}{2\pi} \ln\left(\frac{x_s+a}{x_s}\right) > 0, \text{ da } d\vec{A} \uparrow \vec{B}$$

b)

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin(\omega t) \cdot a \cdot \ln(2)}{2\pi} \quad \text{Ruheinduktion}$$

$$u_i(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I \cdot a \cdot \ln(2) \cos(\omega t) \omega}{2\pi}$$

$$u_{12}(t) = - u_i(t) = \frac{\mu_0 I \cdot a \cdot \ln(2) \cdot \cos(\omega t) \cdot \omega}{2\pi}$$

, da $u_{12}(t) \uparrow u_i(t)$

Da kein Strom fließt muss die Spannung über den Klemmen abfallen. Klemmenspannung wird immer auf dem kürzesten Weg gemessen.

c)

$$\Phi = \frac{\mu_0 \hat{I} \cdot a}{2\pi} \ln\left(\frac{v_0 t + 2a}{v_0 t + a}\right) = \frac{\mu_0 \hat{I} a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{v_0 t + a}\right)$$

$$u_{12} = -u_i = \frac{d\Phi}{dt}$$

Bewegungsinduktion

$$= \frac{\mu_0 \hat{I} a}{2\pi} \frac{v_0}{v_0 t + 2a} \cdot (-1) \frac{a}{(v_0 t + a)^2} \cdot v_0$$

$$= - \frac{\mu_0 \hat{I} \cdot a^2 v_0}{2\pi (v_0 t + 2a)(v_0 t + a)}$$

d)

$$\Phi = \frac{\mu_0 a \cdot \hat{I} \sin(\omega t)}{2\pi} \ln\left(\frac{v_0 t + 2a}{v_0 t + a}\right)$$

Bewegungs-
und
Ruheinduktion

$$u_{12} = + \frac{d\Phi}{dt} = -u_i =$$

$$= \frac{\mu_0 a \hat{I}}{2\pi} \left(\cos(\omega t) \omega \ln\left(1 + \frac{a}{v_0 t + a}\right) + \sin(\omega t) \frac{v_0 t + a}{v_0 t + 2a} \cdot (-1) \frac{a \cdot v_0}{(v_0 t + a)^2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 a \hat{I}}{2\pi} \left(\cos(\omega t) \omega \ln\left(1 + \frac{a}{v_0 t + a}\right) - \frac{\sin(\omega t) a v_0}{(v_0 t + 2a)(v_0 t + a)} \right)$$

(Kettenregel)

01.02.10

Kleingruppe

e)

Die zwei neuen Schleifen werden nun jeweils vom halben Fluß durchströmt.

$$\Phi = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot I \sin(\omega t) \cdot \ln(2)}{4\pi}$$

$$i_s(t) \cdot 3R_0 = u_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 a I \ln(2)}{4\pi} \cos(\omega t) \cdot \omega$$

$$i_s(t) = - \frac{\mu_0 a I \ln(2) \cos(\omega t) \omega}{12 R_0 \pi}$$

• Maschengl.:
(untere)

$$u_i(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = -u_{12}(t) - i_s(t) \cdot R_0$$

$$u_{12}(t) = -u_i(t) - i_s(t) R_0$$

$$= \frac{\mu_0 a I \ln(2) \cos(\omega t) \omega}{4\pi} + \frac{\mu_0 a I \ln(2) \cos(\omega t) \omega}{12\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 a I \ln(2) \cos(\omega t) \omega}{3\pi}$$

f)

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \cdot a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{v_0 t + a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{NUR Bewegungsinduktion}$$

$$u_i(t) = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I \cdot a^2 v_0}{4\pi (v_0 t + 2a)(v_0 t + a)}$$

$$P_{(el)}(t) = \frac{u_i(t)^2}{3R_0} = \frac{\mu_0^2 I^2 a^4 v_0^2}{48\pi^2 R_0 (v_0 t + 2a)^2 (v_0 t + a)^2}$$

Nur in der oberen Schleife wird Leistung umgesetzt! ▽

Induktionseffekte treten hier nur wegen einer Bewegung, nicht wegen einer zeitlichen Änderung von $\vec{B}$. Also:

$$P_{\text{mech}}(t) = \vec{P} \cdot \vec{v} = P_{el}(t)$$

$$F_x(t) = \frac{P_{el}(t)}{v_0} = \frac{\mu_0^2 I^2 a^4 v_0}{48\pi^2 R_0 (v_0 t + 2a)^2 (v_0 t + a)^2}$$

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$$

• $F_x > 0$, nach der Lenzschen Regel! ▽

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 1

Aufgabe 1

$$\epsilon = \epsilon_0$$

Zwei Punktladungen $Q_1 = Q_2 = Q$ befinden sich im Vakuum an den Positionen $\vec{r}_1 = a \cdot \vec{e}_x$ und $\vec{r}_2 = a \cdot \vec{e}_y$. Gesucht ist die elektrostatische Feldstärke im gesamten Raum (ausgenommen an den Orten der Punktladungen).

a) Begründen Sie, weshalb Kugelkoordinaten zur Beschreibung des elektrischen Feldes in diesem Fall nicht geeignet sind. Nennen Sie ein Beispiel für eine Ladungsanordnung, deren elektrisches Feld sich leicht in Kugelkoordinaten formulieren lässt.

b) Geben Sie zunächst das elektrische Feld einer Punktladung Q im Ursprung in kartesischen Koordinaten an. Geben Sie die beiden von Q_1 und Q_2 jeweils allein erzeugten Felder $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ an.

c) Berechnen Sie $\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Aufgabe 2

Eine Linienladung q_L der Länge $2a$ befindet sich in der z -Achse, siehe Abbildung 1. Betrachtet wird das elektrische Feld $\vec{E}$ im Aufpunkt $(x_A, 0, 0)$.

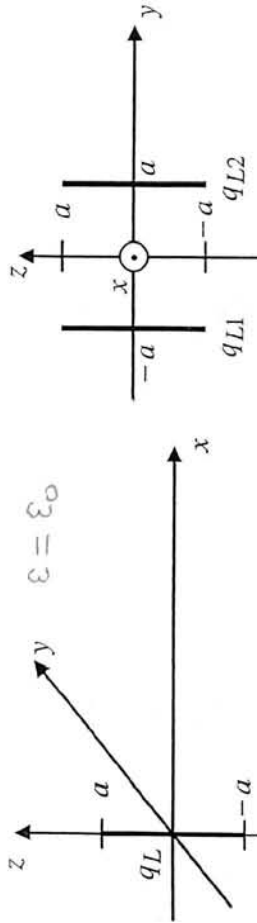


Abbildung 1

Abbildung 2

- Begründen Sie, welche kartesischen Komponenten von $\vec{E}$ aus Symmetriegründen im Aufpunkt verschwinden.
- Geben Sie den Beitrag dE_x an, den ein infinitesimales Element dQ der Linienladung im Aufpunkt bewirkt.
- Bestimmen Sie $\vec{E}(x_A, 0, 0)$ durch Integration.

$$\text{HINWEIS: } \int \frac{1}{(x^2 + c^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{c^2 \cdot \sqrt{x^2 + c^2}}$$

Nun wird eine Anordnung aus zwei Linienladungen q_{L1} und q_{L2} bei $y = a$ und $y = -a$ betrachtet, die parallel zur z -Achse liegen, siehe Abbildung 2.

d) In welcher Ebene liegen die Beiträge $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ der beiden Linienladungen im Aufpunkt?

Beachten Sie im Folgenden die Symmetrien für $\vec{E}_{\text{ges}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

- Bestimmen Sie $\vec{E}_{\text{ges}}(x_A, 0, 0)$ für $q_{L1} = q_{L2} = q_L$.
- Bestimmen Sie $\vec{E}_{\text{ges}}(x_A, 0, 0)$ für $q_{L1} = -q_{L2} = q_L$.

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 2

Aufgabe 5 RRRR

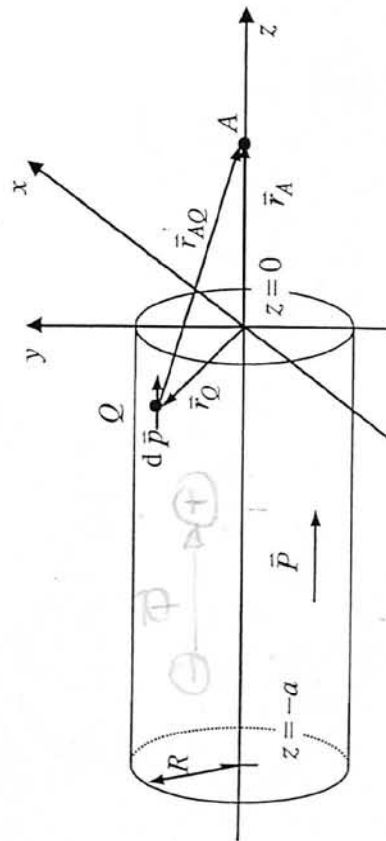


Abbildung 4

Gegeben ist ein Zylinder mit der homogenen, elektrischen Polarisation $\vec{P} = P_0 \cdot \vec{e}_z$ gemäß Abbildung 4. Zur Bestimmung des vom Zylinder erzeugten elektrischen Feldes soll das polarisierte Material als ein mit elementaren Dipolen gefülltes Gebiet betrachtet werden. Jeder Elementardipol besteht dabei aus zwei infinitesimal gegeneinander verschobenen Punktladungen. Der Zusammenhang zwischen dem lokalen Dipolmoment $\vec{p}$ und der Polarisation ist durch

$\vec{P} = \frac{\partial}{\partial V} \vec{p}$ beschrieben. Das elektrische Potential φ_D eines Dipols

$$\text{lautet } \varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}.$$

- Wie groß ist das infinitesimale Dipolmoment $d\vec{p}$, welches von $\vec{P}$ im Volumenelement dV_Q verursacht wird? Wie groß ist allgemein der Potentialbeitrag $d\varphi_A$ am Aufpunkt A von $d\vec{p}$ am Ort Q ?
- Geben Sie den Potentialbeitrag $d\varphi_A$ aus Unterpunkt a) für einen Punkt $A(0,0,z_A)$ mit $z_A > 0$ in Zylinderkoordinaten an.
- Beschreiben Sie das vom Zylinder gemäß Abbildung 1 erzeugte elektrische Potential φ_A für einen Punkt $A(0,0,z_A)$ mit $z_A > 0$ in integraler Form.
- Berechnen Sie das elektrische Potential aus Unterpunkt c) für einen in negative z -Richtung sehr weit ausgedehnten Zylinder ($a \rightarrow \infty$).

HINWEIS: Führen Sie zunächst die Integration über z , dann über ρ aus.

$$\int \frac{b-x}{[(b-x)^2 + A^2]^{3/2}} dx = \frac{1}{\sqrt{(b-x)^2 + A^2}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + A^2}} dx = \sqrt{x^2 + A^2}$$

- Welche Richtung hat $\vec{E}$ aus Symmetriegründen auf der z -Achse? Berechnen Sie $\vec{E}(0,0,z_A)$ für $z_A > 0$ mit dem Ergebnis aus d).

Aufgabe 3 RRR

Die Linienladungen aus Abbildung 2 werden starr miteinander verbunden, die Anordnung ist drehbar um die z -Achse gelagert. Es gilt $q_{L1} = -q_{L2} = q_L$.

- Berechnen Sie die Gesamtkraft $\vec{F}$ und das Drehmoment $\vec{L}$ auf die Anordnung in einem äußeren, homogenen Feld $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_x$.
- Berechnen Sie die Gesamtkraft $\vec{F}$ auf die Anordnung im Feld $\vec{E}_Q$ einer ortsfesten Punktladung Q am Ort $(x_Q, 0, 0)$.

Aufgabe 4 (super wichtige Aufgabe) RRR

Gegeben ist eine kugelsymmetrische Anordnung (Abbildung 3). Die Kugel mit dem Radius a besteht aus dielektrischem Material mit $\epsilon_r = 4$, in das die Raumladungsverteilung $\rho_e(r) = \rho_{e0} \cdot r^2 / a^2$ eingebettet ist ($0 \leq r \leq a$, $\rho_{e0} = \text{const} > 0$). Diese Kugel ist umgeben von einer Schale mit dem Außenradius $b = 2a$, in der die Permittivität radiusabhängig ist gemäß $\epsilon_r(r) = k \cdot r$ ($a < r \leq b$, $k = \text{const}$). Die Anordnung befindet sich im Vakuum, d. h. $\epsilon = \epsilon_0$ für $r > b$.

- Geben Sie die Ausdrücke für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ in den drei Bereichen $0 \leq r < a$, $a < r < b$ und $r > b$ an.
- Welchen Wert muss k haben, damit $\vec{E}(\vec{r})$ bei $r = a$ stetig verläuft? Skizzieren Sie für diesen Fall den Verlauf des Betrages $|\vec{E}(\vec{r})|$ im Bereich $0 \leq r \leq 3a$.
- Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\varphi_e(r)$ in den drei Bereichen für $\varphi_e(r=0) = 0$.

- Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi_e(r)$ in den drei Bereichen.
- Welche Ersatz-Punktladung würde im Außenraum ($r > b$) das gleiche elektrostatische Feld erzeugen?
- Bilden Sie $\text{div} \vec{D}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten und überprüfen Sie damit das Ergebnis aus Unterpunkt a).

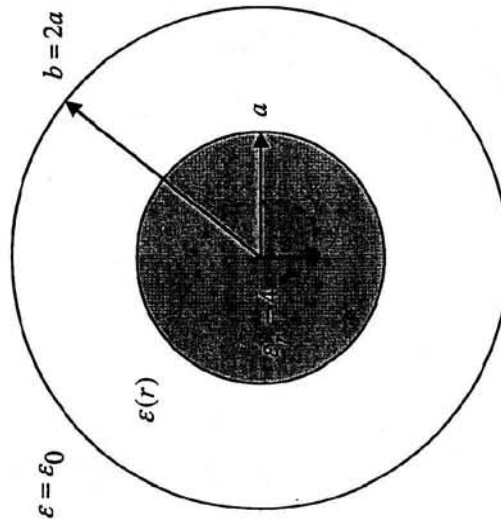


Abbildung 3

RRRR

Ein zylinderförmiger Leiter mit dem Radius ρ_1 wird durch eine leitfähige Wand der Dicke d geführt. Die Wanddurchführung mit dem Radius ρ_2 ist mit einem Isolator ε gefüllt (Abbildung 5). Der Leiter trägt den Ladungsbelag q_L und hat das elektrische Potential $\varphi_e = U$. Die Wand ist geerdet ($\varphi_e = 0$).

$\varphi_e = U$. Die Wand ist geerdet ($\varphi_e = 0$).

HINWEIS: Streufelder für $|z| > \frac{d}{2}$ sind zu vernachlässigen (keine Randeffekte).

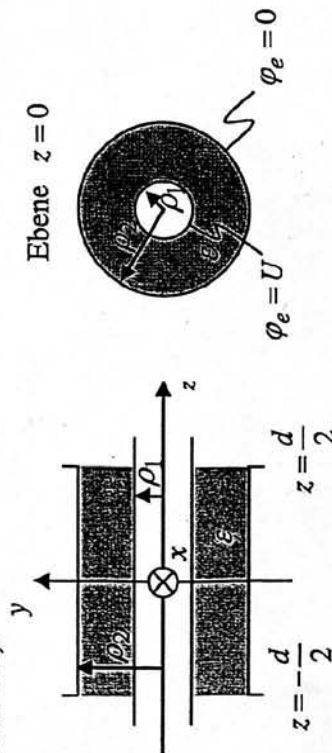


Abbildung 5

- Geben Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im Isolator an. Berechnen Sie die Spannung U zwischen Leiter und Wand durch Integration über $\vec{E}$.
- Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in Abhängigkeit von U , d.h. unabhängig von q_L .

- c) An welchem Ort ist der Betrag der elektrischen Feldstärke maximal? Wie groß ist dieser Wert?
- d) Wie groß ist die Kapazität C_1 der Anordnung?

Der zylinderförmige Leiter wird nun durch eine quadratische Öffnung in der Wand mit der Kantenlänge $l = 6\rho_1$ geführt (Abbildung 6). Der Zwischenraum ist wiederum mit einem Isolator ε gefüllt. Zwischen Leiter und Wand liegt weiterhin die Spannung U an. Die Potentialverteilung im Zwischenraum soll numerisch bestimmt werden. Dazu werden die Gitterpunkte a_1 bis e_5 betrachtet.

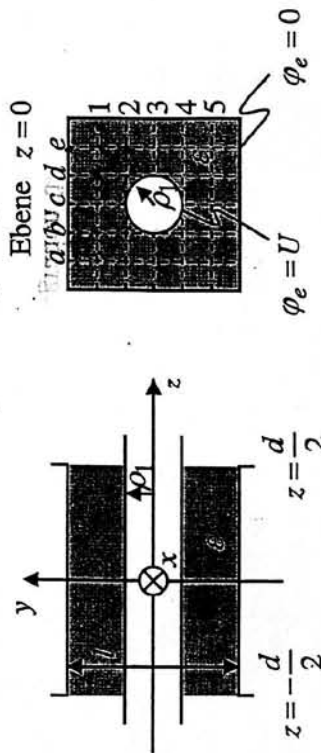


Abbildung 6

- e) Welche Gitterpunkte haben aus Symmetriegründen gleiches Potential? Für wie viele Gitterpunkte muss das Potential mindestens berechnet werden?
- f) Stellen Sie für das Potential dieser Punkte ein Gleichungssystem mit Hilfe des zweidimensionalen, diskreten Laplaceoperators auf (Differenzenverfahren).

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 3

Aufgabe 7

Gegeben ist die Anordnung zweier paralleler, unendlich langer Linienladungen mit den Ladungsbelägen q_L und $-q_L$.

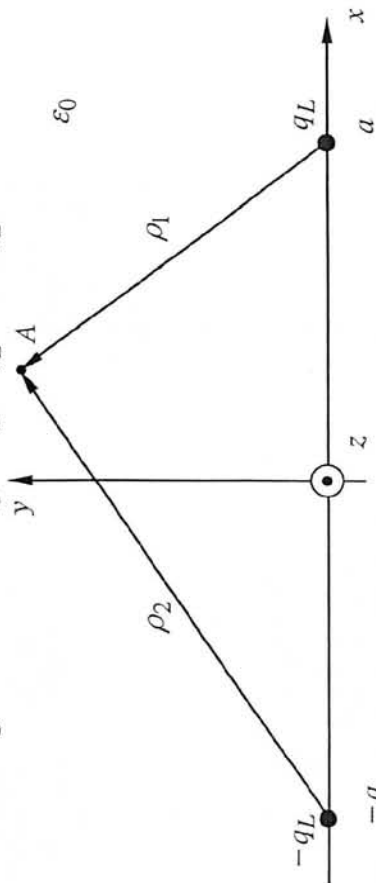


Abbildung 7

- Berechnen Sie, ausgehend vom elektrischen Feld, das von der bei $x = a$ platzierten Linienladung q_L verursachte Potential $\varphi_1(\rho_1)$ am Aufpunkt $A(x_A, y_A, 0)$. Die z -Achse soll dabei das Referenzpotential $\varphi_0 = 0$ erhalten.
- Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) das gesamte Potential der Anordnung aus Abbildung 7 in Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2 .

Die Schnittpunkte der Äquipotentialflächen dieser Anordnung mit der x - y -Ebene sind exzentrische Kreise, jeweils mit dem Mittelpunkt $(x = x_M, y = 0)$ und dem Radius R . Für jeden Kreis ist die Gleichung $a^2 + R^2 = x_M^2$ erfüllt. Um die Kapazität C_E eines exzentrischen, luftgefüllten Zylinderkondensators der Länge l zu berechnen, wird eine Ersatzanordnung aus zwei Linienladungen betrachtet. Die Kondensatorelektroden liegen auf zwei Äquipotentialflächen der Ersatzanordnung. Für die innere Elektrode gilt $x_{M,i} = 13\rho_0$, $R_i = 5\rho_0$. Für die äußere Elektrode gilt $x_{M,a} = 15\rho_0$, $R_a = 9\rho_0$.

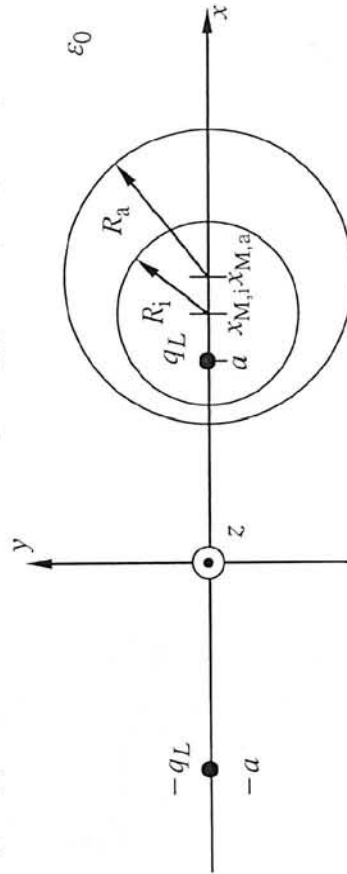


Abbildung 8

- Wie groß muss der Abstand $2a$ der Linienladungen gewählt werden?
 - Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus den Unterpunkten b) und c) die Spannung $U = \varphi_i - \varphi_a$ zwischen den beiden Äquipotentialflächen. Wie groß ist die Kapazität C_E der Anordnung?
 - Wie groß ist die Kapazität C_K , wenn die beiden Elektroden konzentrisch angeordnet sind?
- HINWEIS für die Unterpunkte d) und e): Streueffekte an den Kondensatorenden sind zu vernachlässigen.

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 4

Aufgabe 10

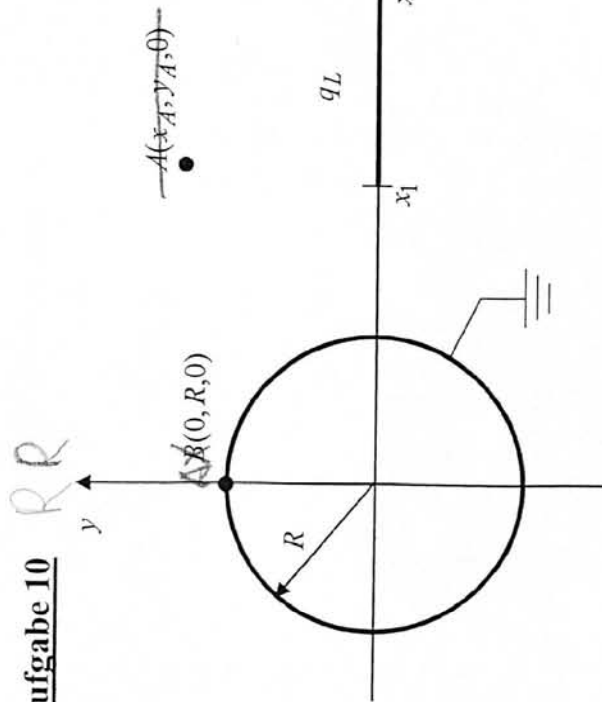


Abbildung 11

Gegeben ist eine elektrostatische Anordnung mit einer Linienladung in der x -Achse von $x = x_1$ bis $x = x_2$ mit dem konstanten Ladungsbelag q_L , sowie einer leitenden, geerdeten Hohlkugel mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

- Welche Randbedingung gilt für die Feldlinien der elektrischen Feldstärke auf der Oberfläche der Kugel?
- In welchem Bereich muss eine Ersatzladung angenommen werden, um für $|\vec{r}| > R$ das gleiche elektrische Feld ohne die Kugel zu erzeugen? Geben Sie dazu die Anfangs- und Endpositionen x'_1 und x'_2 dieser Ersatzladung an.

Betrachtet wird ein Teilstück dx der Linienladung mit der Ladung $dQ = q_L \cdot dx$ an der Position x ($x_1 < x < x_2$).

- An welcher Stelle x' ($x'_2 < x' < x'_1$) muss die zu dQ gehörende Ersatzladung dQ' angenommen werden? Beschreiben Sie die infinitesimale Länge dx' dieser Ersatzladung in Abhängigkeit von x und dx .

HINWEIS: Bilden Sie die Ableitung $\frac{dx'}{dx}$

- Welche Größe $dQ'(x, dx)$ hat die zugehörige Ersatzladung? Bestimmen Sie damit $dQ'(x', dx')$.
- Berechnen Sie nun den ortsabhängigen Ladungsbelag $q'_L(x')$ der Ersatzladung.

HINWEIS: Für den Betrag des Ladungsbelags gilt $|q'_L(x')| = \left| \frac{dQ'(x')}{dx'} \right|$

- In welche Richtung zeigt das elektrische Feld der Ersatzanordnung im Aufpunkt A bei $y = R$ in der y -Achse?

Aufgabe 8

Aus einem unendlich langen, ideal leitenden Linienleiter, welcher sich in der z -Achse befindet, tritt pro Längeneinheit der Strom I' senkrecht zur z -Achse aus ($[I'] = 1 \text{ A/m}$). Das zylinderförmige Gebiet 1 mit dem Radius R (Zylinderachse = z -Achse) besitzt die spezifische Leitfähigkeit $\sigma_1 = \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)$ und die Permittivität $\epsilon_1 = \epsilon_0$. Für das Gebiet 2 beträgt die spezifische Leitfähigkeit $\sigma_2 = 2\sigma_0$ und die Permittivität $\epsilon_2 = \epsilon_0 \cdot \frac{\rho}{R}$.

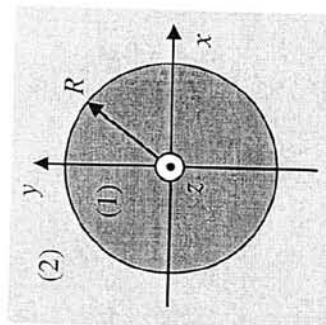


Abbildung 9

- Geben Sie für $\rho > 0$ die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ an (keine Herleitung erforderlich) und leiten Sie aus dem Ergebnis die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ab.
- Berechnen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ für $\rho > 0$.
- Berechnen Sie die Raumladungsdichte ρ_e für $\rho > 0$.
- Geben Sie den Ladungsbelag q_L auf dem ideal leitenden Linienleiter an.
- Welche Orte eignen sich nicht als Bezugspunkt für das elektrische Potential?

Aufgabe 9

Der Kugelkondensator in Abbildung 10 besteht aus zwei konzentrischen, ideal leitenden Kugelschalen mit den Radien r_1 und r_2 . Das Material im Zwischenraum hat die Permittivität ϵ_0 und die spezifische Leitfähigkeit σ . Zunächst sind beide Kugelschalen ungeladen, d. h. $Q_1(t < 0) = Q_2(t < 0) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird auf die innere Kugelschale die Ladung Q_0 aufgebracht.

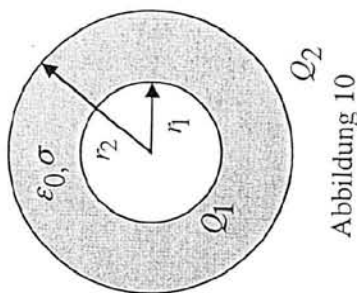


Abbildung 10

- Geben Sie für $r_1 < r < r_2$ und $t > 0$ die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und die elektrische Flussdichte $\vec{D}(\vec{r}, t)$ in Abhängigkeit von $Q_1(t)$ an.
- Leiten Sie aus $\oint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A} = 0$ eine Differentialgleichung in t für $D_r(r, t)$ auf einer Kugeloberfläche H mit dem Radius r ab ($r_1 < r < r_2$). Ersetzen Sie dazu mithilfe der Materialgleichungen $\vec{J}_r$ durch D_r .
- Lösen Sie die Differentialgleichung mit dem Ansatz $D_r(r, t) = D_0(r) \cdot \exp(-t/\tau)$ und beschreiben Sie $\vec{D}(\vec{r}, t)$ in Abhängigkeit von Q_0 und den Materialkonstanten.
- Welcher Strom $I(t)$ fließt für $t > 0$ zwischen den Kugelschalen, und wie groß ist $U_{12}(t)$?
- Welche Ladungsverteilung stellt sich für $t \rightarrow \infty$ ein?
- Wie verteilt sich eine Ladung Q_0 für $t \rightarrow \infty$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ auf eine Elektrode eines vorher ungeladenen Plattenkondensators aufgebracht wird, der mit dem gleichen Material gefüllt ist?

Aufgabe 11

FR

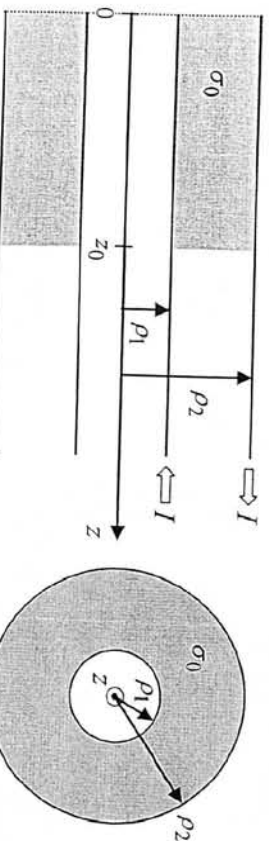


Abbildung 12

Zwischen zwei dünnwandigen, konzentrischen, ideal leitenden Zylindern mit den Radien ρ_1 und ρ_2 befindet sich im Gebiet $z = 0$ bis $z = z_0$ ein Material mit der konstanten spezifischen Leitfähigkeit σ_0 . Über den Innenleiter wird der konstante Strom I eingepreßt und über den Außenleiter abgeführt (Abbildung 12). Die Anordnung ist rotationssymmetrisch zur z -Achse. Es gilt überall $\epsilon = \epsilon_0$. Streufelder sind zu vernachlässigen.

- Formulieren Sie die elektrische Stromdichte $\vec{J}(\rho, \phi)$ im Gebiet $\rho_1 < \rho < \rho_2$, $0 < z < z_0$.
- Welche Flächenstromdichte $\vec{J}_A$ ergibt sich auf dem Innenleiter für $z > z_0$? Berechnen Sie die Flächenstromdichte $\vec{J}_A(z)$ auf dem Innenleiter für $0 < z < z_0$.
- Wie groß ist die magnetische Feldstärke $\vec{H} = H_\phi(\rho) \cdot \vec{e}_\phi$ für $z > z_0$ im Bereich $\rho_1 < \rho < \rho_2$ und im Bereich $\rho > \rho_2$?

- Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H} = H_\phi(\rho, z) \cdot \vec{e}_\phi$ im Gebiet $\rho_1 < \rho < \rho_2$, $0 < z < z_0$. Verwenden Sie dazu das Durchflutungsgesetz und überlegen Sie, welcher Strom $I(z)$ durch die von einem Umlauf aufgespannte Fläche tritt.

Das leitfähige Material hat im Folgenden die ortsabhängige spezifische Leitfähigkeit $\sigma(\rho) = \sigma_0 \cdot (\rho_1 / \rho)^2$.

- Welche Raumladungsdichte $\rho_e(\rho)$ stellt sich im Material ein?

{ noch

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 5

Aufgabe 12 R

Ein unendlich langer Zylinder mit dem Radius R rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse (Abbildung 13). Auf der Oberfläche des Zylinders befindet sich die homogene Flächenladung σ_e .

- a) Berechnen Sie mit dem Durchflutungsgesetz die Komponente H_ϕ der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$. Betrachten Sie dazu den Strom, den ein Umlauf in $\vec{e}_\phi$ -Richtung für $\rho < R$ und $\rho > R$ umschließt.

- b) Für diese Anordnung gilt $\oint_A \vec{H} \cdot d\vec{A} = 0$. Zeigen Sie anhand einer zylinderförmigen Hüllfläche, dass $H_\rho = 0$ gilt.

- c) Die in Abbildung 14 eingezeichnete Fläche A schneidet die Oberfläche des Zylinders. Es gilt $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_\phi$ und $\rho_1 < R < \rho_2$. Wie groß ist der Strom I_A , der durch A fließt? Überlegen Sie

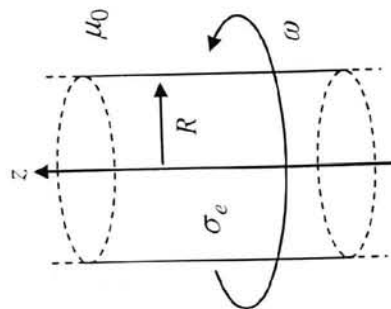


Abbildung 13

dazu, welche Ladungsmenge pro Zeiteinheit durch die Fläche A hindurchtritt.

- d) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im Inneren des Zylinders, indem Sie das Durchflutungsgesetz auf die Fläche A in Abbildung 14 anwenden.

Nehmen Sie dazu an, dass gilt:

$$\vec{H} = \begin{cases} H_z(\rho) \cdot \vec{e}_z & \text{für } 0 \leq \rho < R \\ 0 & \text{für } \rho > R \end{cases}$$

Im Folgenden hat der rotierende Zylinder keine Flächenladung, sondern ist mit der Raumladungsdichte ρ_e gefüllt. Die Annahme aus Unterpunkt d) gilt weiterhin.

- e) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im Inneren des Zylinders für $\rho_e = \rho_{e0} = \text{const}$, indem Sie wiederum das Durchflutungsgesetz auf die Fläche A in Abbildung 14 anwenden.

- f) Überprüfen Sie das Ergebnis aus Unterpunkt e) für $\rho < R$ anhand der differentiellen Form des Durchflutungsgesetzes.

- g) Welche vom Radius abhängige Raumladungsdichte $\rho_e(\rho)$ bewirkt eine magnetische Feldstärke der Form

$$\vec{H} = \omega \cdot \rho_{e0} \cdot \rho^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \cdot \vec{e}_z \text{ im Inneren des Zylinders?}$$

HINWEIS: Verwenden Sie die Rotation in Zylinderkoordinaten:

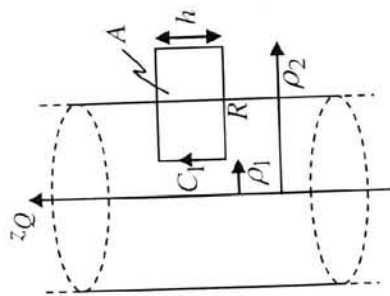


Abbildung 14

Kleingruppenübung zu Grundgebiete der Elektrotechnik III

Lehrstuhl für Allgemeine Elektrotechnik und Datenverarbeitungssysteme
Univ.-Prof. Dr.-Ing. T. Noll
WS 09/10 - Blatt 6

Aufgabe 14

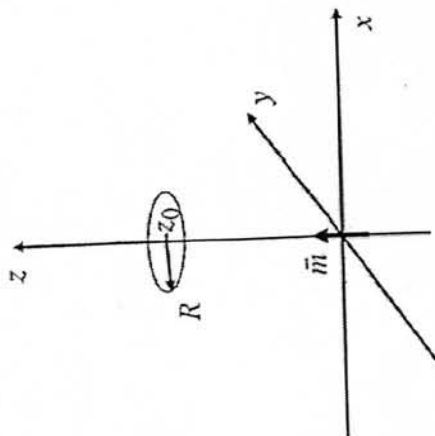


Abbildung 18

Im Koordinatensystem befindet sich ein magnetischer Dipol mit dem magnetischen Moment $\vec{m} = m_0 \cdot \vec{e}_z$, $m_0 > 0$. Parallel zur x - y -Ebene befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $z = z_0$ eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R , welche sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \cdot (-\vec{e}_z)$ und $v_0 > 0$ bewegt. Der Widerstand der Leiterschleife ist so groß, dass das von der

Leiterschleife verursachte magnetische Feld vernachlässigt werden kann. Im ganzen Raum gilt $\mu = \mu_0$. Das magnetische Vektorpotential des magnetischen Dipols ist gegeben durch:

$$\vec{A}_m(\vec{r}_A) = \frac{\mu_0 \cdot m_0}{4\pi} \cdot \frac{\rho_A}{\sqrt{\rho_A^2 + z_A^2}} \cdot \vec{e}_\phi$$

- a) Beschreiben Sie die Position $z(t)$ der Leiterschleife und berechnen Sie den magnetischen Fluss $\Phi(t) > 0$ durch die Leiterschleife.

HINWEIS: $\iint_A \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}$ (Satz von Stokes)

- b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus Unterpunkt a) die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U_{i1}(t)$.

Die induzierte Spannung in der Leiterschleife soll nun mit Hilfe der Lorentzkraft in der Leiterschleife (induzierte Feldstärke $\vec{E}_{i2}$) bestimmt werden.

- c) Bestimmen Sie die Komponente der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$, welche Einfluss auf die induzierte Feldstärke $\vec{E}_{i2}$ hat.

HINWEIS: Verwenden Sie die Rotation in Zylinderkoordinaten.

- d) Berechnen Sie mit der magnetischen Flussdichte am Ort der bewegten Leiterschleife die induzierte Feldstärke $\vec{E}_{i2}$.

- e) Bestimmen Sie durch Integration über die induzierte Feldstärke $\vec{E}_{i2}$ die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U_{i2}(t)$ und vergleichen Sie diese mit der induzierten Spannung $U_{i1}(t)$ aus Unterpunkt b).

Aufgabe 13 R

Eine dünne Kreisscheibe mit dem Radius a und der homogenen Flächenladungsdichte σ_e befindet sich in der x - y -Ebene. Sie rotiert mit der Kreisfrequenz ω um die z -Achse (Abbildung 15).

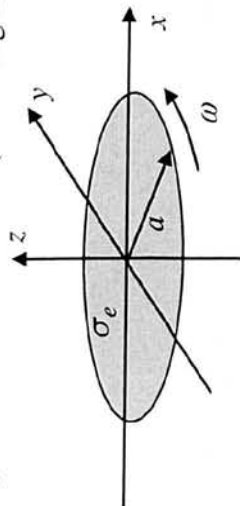


Abbildung 15

Gesucht ist die magnetische Feldstärke $\vec{H}_A$ in einem Aufpunkt in der z -Achse: $x_A = y_A = 0, z_A$. Sie kann mithilfe des Integrals:

$$\vec{H}_A(\vec{r}_A) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{Kreis-Fläche}} \frac{\vec{J}'_Q \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3} \cdot dA_Q$$

berechnet werden, wobei $\vec{J}'_Q = \sigma_e \cdot \vec{v}$ die Flächenstromdichte der Flächenladung mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ beschreibt.

- Geben Sie die Flächenstromdichte $\vec{J}'_Q$ in Zylinderkoordinaten an.
- Stellen Sie den Integralausdruck in Zylinderkoordinaten auf und geben Sie die Integrationsgrenzen an.
- Überlegen Sie, welche resultierende Komponente $\vec{H}_A$ hat und berechnen Sie das Integral für diese Komponente.

HINWEIS: $\int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dx = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

Nun wird ein rotierender Zylinder mit der homogenen Raumladungsdichte ρ_e betrachtet (Abbildung 16). Der Zylinder hat die Höhe $2h$. Gesucht ist wieder die magnetische Feldstärke $\vec{H}_A$ im Aufpunkt $x_A = y_A = 0, z_A$.

- Formulieren Sie mithilfe des Ergebnisses aus Unterpunkt c) den Beitrag $d\vec{H}_A$ eines infinitesimal dünnen, kreisförmigen Teilvolumens dV_Q des Zylinders entsprechend Abbildung 17.

[e) Berechnen Sie die vom gesamten Zylinder am Aufpunkt A erzeugte magnetische Feldstärke $\vec{H}_A$.

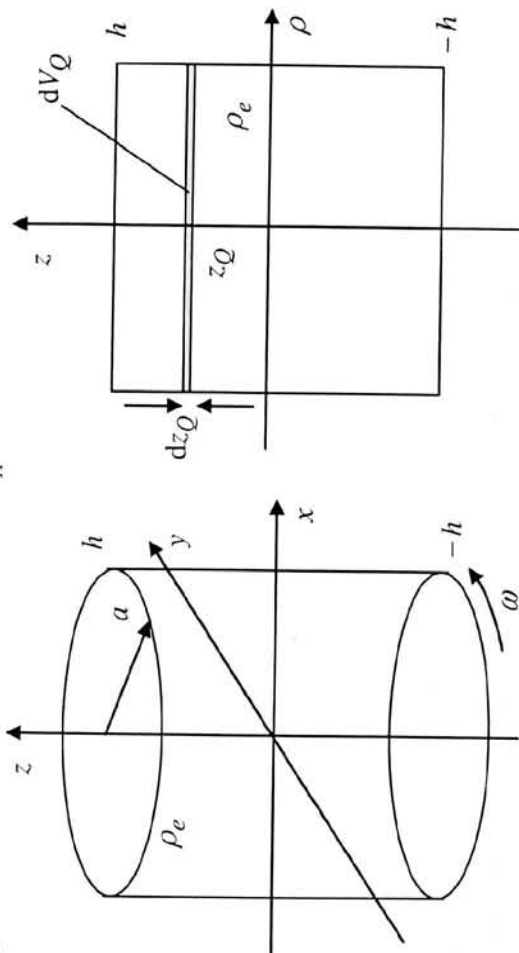


Abbildung 16

Abbildung 17

Aufgabe 15

Parallel zu einem Linienstrom $i(t)$ entlang der z -Achse befindet sich im Abstand x_s in der x - z -Ebene eine quadratische Leiterschleife (Abbildung 19). An den offenen Klemmen der Schleife wird die Spannung $u_{12}(t)$ gemessen.

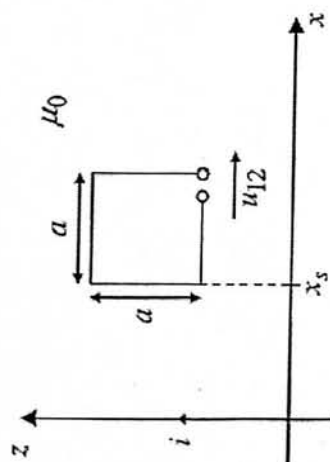


Abbildung 19

- Berechnen Sie den Fluss Φ durch die Schleife in Abhängigkeit von x_s und i . Wählen Sie das Vorzeichen von Φ so, dass der in y -Richtung durch die Schleife tretende Fluss positiv gezählt wird.
- Zunächst gilt $x_s = a$ und $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$. Welche Spannung $u_{12}(t)$ wird an den Klemmen der Schleife gemessen?
- Die Schleife wird nun gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v_0 = \text{const}$ bewegt, während der Linienstrom konstant bleibt: $x_s = x_s(t) = v_0 \cdot t + a$, $i(t) = \hat{i} = \text{const}$. Welche Spannung $u_{12}(t)$ ergibt sich damit?

- Schließlich gilt $x_s = x_s(t) = v_0 \cdot t + a$ und $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$. Welchen Verlauf nimmt $u_{12}(t)$ jetzt an?

Im Folgenden sollen die Segmente der Schleife mit einem Widerstandsbelag $R' = R_0/a$ behaftet sein. Außerdem wird ein weiteres Segment, ebenfalls mit R' behaftet, hinzugefügt (Abbildung 20). Das durch den Schleifenstrom i_s verursachte Magnetfeld kann gegenüber dem des Linienstroms i vernachlässigt werden.

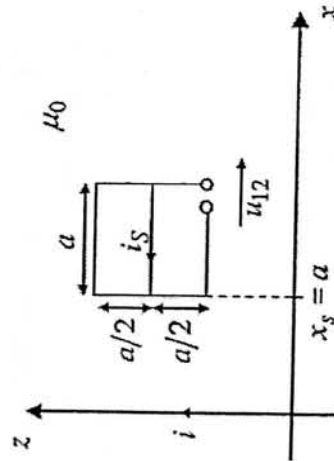


Abbildung 20

- Berechnen Sie für $x_s = a$ und $i = i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$ die Spannung $u_{12}(t)$.
- Berechnen Sie für $i(t) = \hat{i} = \text{const}$ und $x_s = x_s(t) = v_0 \cdot t + a$ die elektrische Leistung $P(t)$. Wie groß ist die x -Komponente $F_x(t)$ der Kraft auf die Schleife?

HINWEIS: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q \cdot q}{r_{qQ}^2} \vec{e}_{qQ}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{J} \quad \text{IDEAL}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi_e \quad \text{NUR STATIK}$$

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_0 - \int \vec{E} d\vec{s}$$

$$U_{12} = \int_{12} \vec{E} d\vec{s} \quad \text{STAT}$$

$$\psi = \iint \vec{D} d\vec{A}$$

$$\text{Statik: } \text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$$

$$\oint_H \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{ein}} = \iiint_V \rho_e dV$$

$$\Leftrightarrow \text{div } \vec{D} = \rho_e$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_e)$$

$$I = \iint \vec{J} d\vec{A} \quad \parallel \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_e) = -\frac{\rho_e}{\epsilon}$$

$$\rho_e(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \cdot \text{grad} \left(\frac{\epsilon(\vec{r})}{\sigma(\vec{r})} \right)$$

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_H \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A} = 0$$

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \Delta V (\vec{J} \times \vec{B})$$

$$= I \cdot (\Delta \vec{l} \times \vec{B}) \quad d\vec{F}_m = I \cdot (d\vec{s} \times \vec{B})$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \vec{H} = \frac{1}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \phi = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_{\text{ein}} = \iint_A \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{+ Biot-Savart Gesetz}$$

$$\oint_H \vec{B} d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = U_i = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Leftrightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\iint_H \vec{D} d\vec{A}}{\int \vec{E} d\vec{s}}$$

Platten:	Kugel:	Zylinder:	Kugel im \$\infty\$: (\$r_a \rightarrow \infty\$)
$C = \frac{A \cdot \epsilon}{d}$	$C = \frac{4\pi \cdot \epsilon}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}\right)}$	$C = \frac{2\pi \cdot \ell \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$	$C = 4\pi \epsilon r$

Winkel: $C = \epsilon \cdot \ell \cdot \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)$

Nachbar Zylinder: $C = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot \ell}{\ln\left(\frac{d}{2R} + \sqrt{\frac{d^2}{4R^2} - 1}\right)}$

gl. Anordnung: $R_{12} = \frac{\epsilon}{\sigma C_{12}}$

Duale An.: $C_{34} = \epsilon \cdot \sigma \ell^2 R_{12}$

$R = \frac{\ell}{\sigma A}$

$\chi = \frac{\epsilon}{\sigma} = \epsilon \cdot R$

$\chi_{\text{ges}} = \frac{\epsilon}{\sigma}$

un-lange Linienladung q_L // Z-Achse:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^2} = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \frac{\vec{e}_s}{s}$$

$$\varphi_e(\vec{r}) = -\frac{q_L}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{e}_{AQ}}{r_{AQ}^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}, \quad \vec{D} = \frac{Q \vec{e}_{rAQ}}{4\pi r_{AQ}^2}$$

$$\varphi_e(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r_{AQ} \epsilon}, \quad \varphi_{e0}(r \rightarrow \infty) = 0$$

Wally: $\Delta Q \cdot U$

Energiedichte: $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \left[\frac{J}{m^3} \right]$

Leistungsdichte: $p_{el} = \vec{J} \cdot \vec{E} \left[\frac{W}{m^3} \right]$

Energie in C: $W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{Q^2}{2C}$

$\vec{e}_{\text{in}} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_e$ keine Polarisationsladung (immer)

$E_{1t} = E_{2t}$ (immer)

$J_{1N} = J_{2N}$ $H_{1t} = H_{2t}$ kein $\vec{J}_A = 0$ Flächenstrom

Falls $\sigma_e = 0$ keine Polarisationsladung	Falls $\vec{E}_e = 0$	Falls $J_A = 0$	$B_{1N} = B_{2N}$ (immer) $H_{1t} = H_{2t}$
$\tan \alpha_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$	$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$\tan \alpha_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$	$\vec{e}_{\text{in}} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_A$ (immer)
$D_{1N} = D_{2N}$		$H_{1t} = H_{2t}$	

Kugel

$$d\vec{s} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin\theta d\phi$$

$$\bullet \vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta \cos\phi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\phi + \vec{e}_z \cos\theta$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta \cos\phi + \vec{e}_y \cos\theta \sin\phi - \vec{e}_z \sin\theta$$

$$\vec{e}_\phi = \vec{e}_y \cos\phi - \vec{e}_x \sin\phi$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_r \sin\theta \cos\phi + \vec{e}_\theta \cos\theta \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \sin\theta \sin\phi + \vec{e}_\theta \cos\theta \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r}, \cos\theta = \frac{z}{r}$$

Zylinder

$$d\vec{s} = \rho d\phi \vec{e}_\phi + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{e}_x x + \vec{e}_y y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{e}_y x - \vec{e}_x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \vec{e}_y \cos\phi - \vec{e}_x \sin\phi$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cos\phi - \vec{e}_\phi \sin\phi$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_\rho \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi$$

$$\sin\phi = \frac{y}{\rho}, \cos\phi = \frac{x}{\rho}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos\theta, \vec{e}_x \cdot \vec{e}_\rho = \cos\phi, \sin\alpha = -\sin(-\alpha), \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \cos\alpha = \cos(-\alpha), \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \vec{e}_y \cdot \vec{e}_\rho = \sin\phi$$

$$\bullet dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\text{grad } \varphi_e = \vec{e}_r \frac{d\varphi_e}{dr} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi}$$

$$\text{div } \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial(\sin\theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial(\sin\theta H_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right) \right)$$

$$+ \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \right)$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_e) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \varphi_e}{\partial \theta} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \phi^2}$$

$$dV = \rho d\phi d\rho dz$$

$$\text{grad } \varphi_e = \vec{e}_\rho \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_e}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi_e}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{D} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)$$

$$+ \vec{e}_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right)$$

$$\text{div}(\text{grad } \varphi_e) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_e}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2}$$

KART

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\text{grad } \varphi_e = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi_e}{\partial z}, \text{div}(\text{grad } \varphi_e) = \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2}$$

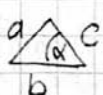
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot |\sin\alpha|$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$



XYZXYZ

$\rho \phi z \rho \phi z$

$r \theta \phi r \theta \phi$

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \frac{1}{2} \frac{u_{12}^2}{r}$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q \quad A \xleftarrow{\vec{r}_{AQ}} Q$$

ketov@gmx.de

Ketov

Polarisation
 $\vec{P} = \frac{\partial}{\partial V} \vec{P}$
 $d\vec{P} = \vec{P} \cdot dV_Q$

$P_L = q_L \cdot d$ (Liniendipol)
 $\vec{P} = Q \cdot \vec{d}$ (Dipolmoment)
 $\vec{P} = \vec{P}_L \cdot l$

$\vec{D} = \vec{E} \cdot \epsilon_0 + \vec{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$ NUR IDEAL, $1 + \chi_e = \epsilon_r \geq 1$
 $\vec{L} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{P} \times \vec{E} = Q \cdot \vec{d} \times \vec{E}$ (Drehmoment)

$P_0 = \sigma_e$

Dipol [$E_D \sim \frac{1}{r^3}$]
 $\varphi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_{AQ}}{4\pi\epsilon r_{AQ}^3}$
 $\sim \frac{1}{r^2}$

Spiegelung Kugel
 $X_{INNEN} = \frac{r_{KUGEL}^2}{X_{AUßEN}}$, $Q_{INNEN} = -Q_{AUßEN} \frac{r_{KUGEL}}{X_{AUßEN}}$

Mehrdielektronenat
 $C_{12} = \frac{\psi_{12}}{u_{12}}$

Winkelgeschwindigkeit
 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$

Aquipotenzialflächen 2D
 langer Linienladungen $\oplus q_L$
 $a^2 + R^2 = x_m^2$

Differenzverfahren
 $\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D)$

Virtuelle Verschiebu
 $F_r = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right)$

Energie Hebelarm
 $dW_e = W_{e,nachher} - W_{e,vorher} = \Delta W_Q \ominus W_{mech}$
 $dW = \vec{F}_q d\vec{s} = q \cdot \vec{E} d\vec{s}$, $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = F s_{12}$
 $\Delta W_{12} = q \cdot u_{12} = -\Delta E_{pot}$

Leistung
 $P = u \cdot I = I^2 R = \frac{u^2}{R}$
 $= \frac{W}{t} = F \cdot v$
 $= \vec{F} \cdot \vec{v}$

Kraft pro m³
 $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$

Stromdichte:
 $\vec{j} = j_e \cdot \vec{v}$, $\vec{j}_A = \sigma_e \cdot \vec{v}$
 $\vec{j} = \frac{(+)(n_{re})}{-e \cdot n_e} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_e \tau}{m} \vec{E}$
 $0 \leq \frac{1}{j} = \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_e \tau}{m_0} = \mu \cdot e \cdot n_e$
 $\mu = \frac{1}{2} \frac{e \tau}{m}$ (Beweglichkeit) (< 0)
 $\vec{v} = \mu \vec{E}$ (Driftgeschwindigkeit)

Vakuum $\epsilon = \epsilon_0$, $\vec{v} = 0$
 $j_e = 0$, $\text{div } \vec{B} = \text{div } \vec{H} = 0$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 $\vec{j} = 0$, $\text{div } \vec{D} = \text{div } \vec{E} = 0$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
 $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Induktivitätsbeleg Koaxialkabel
 $L'_{02} = \frac{\mu}{8\pi}$, $L_a = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

Linear $\vec{P} \sim \vec{E}$
 $|\vec{j}| \sim |\vec{H}|$

Feldlinien (Analog)
 $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

Isotrop $\vec{P} \parallel \vec{E}$
 $\vec{j} \parallel \vec{H}$
 $\vec{E} \times d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \parallel d\vec{s}$

homogen $\epsilon \neq \epsilon(r)$
 Beschleunigung $-e$ im $\vec{E}$
 $\frac{v}{m/s} = 0,594 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{u}{V}}$

Transformatorgleichungen $[M = L_{12} = L_{21}]$
 $u_1(t) = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$, $u_2(t) = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$

Duale Anordnungen: $c' = \frac{c}{\epsilon}$
 $\frac{C_{12}}{\epsilon} = \frac{\epsilon}{C'_{34}}$, $\frac{G_{12}}{\sigma} = \frac{\sigma}{G'_{34}}$
 $L' = \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \cdot \frac{1}{L}$, $C' = \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \cdot \frac{1}{L}$

Eindringtiefe (Skin-Effekt)
 $d_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu}} \sim \sqrt{\frac{1}{f}}, \sqrt{\frac{1}{\sigma}}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As } (\text{e})$ $[j] = \frac{A}{m^2}$
 $m_{e,0} = 9,08 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $[o] = \frac{A}{Vm^2}$
 $\sigma_{cu} = 59 \cdot 10^6 \frac{A}{Vm}$ $[u] = \frac{Vs}{m^3}$
 $\mu_{cu} = 43,6 \frac{cm^2}{Vs}$ $[w_e] = \frac{m^3}{m^3}$
 $\tau_{cu} = 4,95 \cdot 10^{-14} s \approx 50 \text{ fs}$ $[p_e] = \frac{W}{m^3}$
 $n_{-cu} \approx 8,45 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ $[R_m] = \frac{A}{m^3}$

$[C] = F = \frac{As}{V}$ $[Q] = [\psi] = As = C$
 $[L] = H = \frac{Vs}{A}$ $[E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{N}{As}$
 $[A_m] = \frac{Vs}{m}$ $[D] = [\sigma_e] = [P] = \frac{C}{m^2}$
 $[\phi] = Vs = Wb$ $[H] = [M] = \frac{A}{m}$
 $[O] = [\varphi_m] = [V_m] = A$ $[B] = [J] = T = \frac{Vs}{m^2}$
 $[u] = V$ R magn. Polarisatio
 Ketov

<u>Zylinderkondensator</u> $\vec{E} = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \vec{e}_r$	<u>Winkelkondensator</u> $ E_\phi = \frac{ M }{\alpha \cdot r}$	<u>Diamagnetismus</u> - universell, kein perman. magn. Moment ($\vec{m} \perp \vec{B}_0$) - Im inhomogenen Feld von N/S abgestoßen $ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} - \vec{B}_0 $ $\vec{B} \perp \vec{B}_0$ (schwächt Feld) magn. Dipol $\vec{A}_{m,d} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$	<u>Paramagnetismus</u> - perman. magn. Moment ($\vec{m} \parallel \vec{B}_0$) - Im inhomogenen Feld von N/S angezogen $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$, $\vec{J} \parallel \vec{B}_0$ (verstärkt Feld) - ungerade Anzahl. Elektronen $E_{max, LIFT} = 2 \frac{mV}{m}$ $B_{max, LABSOMAG} = 20T$ $\frac{W_{m,max}}{W_{el,max}} = 10^{-7}$ BERDEA 50µT HERDEA 30µT $\chi_m < 0$ Dia $\chi_m > 0$ Para
<u>Elementgleichung C</u> $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + u(0)$	<u>Elementgleichung L</u> $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \Theta \frac{d\vec{I}}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt' + i(0)$	<u>magnetisierung</u> $\vec{M} = \frac{\vec{J}}{\mu_0}$	
<u>(magnetische Moment)</u> $\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{n}$ <u>(Drehmoment)</u> $\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$	<u>magnetisierung</u> $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m)$ $\vec{J} = \chi_m \mu_0 \vec{H}$	<u>IDEAL</u> $1 + \chi_m = \mu_r \gg 1$ (FERRO) ≈ 1 (DIA + PARA)	
<u>Schlange Spule</u> $H_i = 1 \cdot \frac{N}{l}$	<u>Biot - Savart - Gesetz</u> $d\vec{H}_A = \frac{1}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ $\vec{B}_A = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$	<u>mag. Vektorpotenzial</u> $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_m$ $\vec{A}_m = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}}{r_{AQ}} dV_Q$ $\vec{A}_{m,A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}}{r_{AQ}}$	<u>div grad</u> $\mu \cdot \vec{J} = -\Delta \vec{A}_m$ <u>Gulomb STA</u> <u>Eichung TILK</u> $\text{div } \vec{A}_m = 0$ <u>Lorenz Dyna</u> <u>Eichung TILK</u> $\text{div } \vec{A}_m + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
<u>Toroidspule</u> $H_i = \frac{I \cdot N}{2\pi r_m}$	<u>Energiedichte</u> $W_m = \mu \frac{H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu}$	<u>mag. Skalarpotenzial</u> (Strömungsfrei) $\vec{H} = -\text{grad } \varphi_m$ $\Delta \varphi_m = 0$	
<u>magn. Widerstand</u> $R_{m,k} = \frac{l_k}{\mu_k \cdot A_k}$ $\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ <u>magn. Spannung</u> $V_{m,2} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{s}$	<u>Induktion</u> $-\frac{d}{dt} \oint_C \vec{A}_m \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_{ges}}{dt} = U_i = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$ <u>induziertes E-Feld</u> : $\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$ <u>induzierte Spannung</u> $U_i = -\frac{d\Phi_{ges}}{dt}$	$\Phi = \oint_C \vec{A}_m \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ $\vec{E}_{ges} = \vec{E}_i + \vec{E}_{STAT}$ $\vec{E}_{ges} = -\frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} - \text{grad } \varphi_e + (\vec{v} \times \vec{B})$	
<u>Durchflutung</u> $\Theta_{ges} = \iint_A (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{A}$ $= I + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ (= N · I Spule innen)	<u>Energie in L</u> $W = \frac{1}{2} L I^2$ <u>Magnetkreis (konz.)</u> $L = \frac{N^2}{R_{m,ges}}$ $\sum \Phi_k = 0$	<u>Neumannsche Formel</u> (1 Windung) $L_{jk} = L_{kj} = \frac{\Phi_{kj}}{I_j} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\vec{s}_j \cdot d\vec{s}_k}{r_{kj}}$ <u>Verkettung</u> $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ $I_2 \quad I_1$ (Spulen)	<u>Querschnittsänderung</u> $\frac{B_1 A_1}{B_2 A_2} = \frac{A_2}{A_1}$ <u>magn. Leitwert</u> $\Lambda_{(m)} = \frac{1}{R_m}$ $\Phi = \Theta \Lambda_{m,ges}$
<u>Induktivität</u> $\Theta(I) = L \cdot i(I)$ $L = \mu \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$			