

Aufgabe 1

Ein Handy-Hersteller bezieht Akkus eines bestimmten Typs von drei unterschiedlichen Zulieferfirmen A, B und C. In der letzten Lieferung stammten 20 % der Akkus von Firma A, 30 % von Firma B und die restlichen Akkus von Firma C. Bei früheren Lieferungen hat sich gezeigt, dass 5 % der von Firma A gelieferten Akkus, 1 % der von Firma B gelieferten Akkus und 4 % der von Firma C gelieferten Akkus defekt sind.

- a. Aus der letzten Lieferung wird ein Akku zufällig ausgewählt und überprüft.
 - i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der überprüfte Akku intakt ist?
 - ii. Der überprüfte Akku erweist sich als intakt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde der Akku von Firma C geliefert?
- b. Insgesamt 40 Akkus der letzten Lieferung stammten von Firma A. Diesem Teilsortiment der von Firma A gelieferten Akkus werden zufällig 5 Akkus ohne Zurücklegen entnommen und überprüft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 5 entnommenen Akkus mindestens einer defekt ist, unter der Annahme, dass der Ausschussanteil in dem Teilsortiment (ebenfalls) 5 % beträgt.

Aufgabe 2

X und Y seien zwei diskrete Zufallsvariablen, wobei X die Werte -1 und 1 und Y die Werte $-1, 0$ und 2 annimmt. In der folgenden Tabelle sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ und die zugehörigen Randwahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ bzw. $P(Y = j)$ für $i \in \{-1, 1\}$, $j \in \{-1, 0, 2\}$ angegeben:

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$		j			$P(X = i)$
		-1	0	2	
i	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$
$P(Y = j)$		$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1

(Es gilt also z.B. $P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{7}{10}$ und $P(Y = 2) = \frac{1}{5}$.)

- (i) Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind. (Begründung!)
- (ii) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 1 | Y \leq 0)$.
- (iii) Berechnen Sie EY .
- (iv) Berechnen Sie $Kov(X, Y)$ (Hinweis: $EX = \frac{2}{5}$).
- (v) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F^Y von Y .

Aufgabe 2

X und Y seien zwei diskrete Zufallsvariablen, wobei X die Werte -1 und 1 und Y die Werte $-1, 0$ und 2 annimmt. In der folgenden Tabelle sind die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ und die zugehörigen Randwahrscheinlichkeiten $P(X = i)$ bzw. $P(Y = j)$ für $i \in \{-1, 1\}$, $j \in \{-1, 0, 2\}$ angegeben:

$p_{ij} = P(X = i, Y = j)$		j			$P(X = i)$
		-1	0	2	
i	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$
$P(Y = j)$		$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1

(Es gilt also z.B. $P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{7}{10}$ und $P(Y = 2) = \frac{1}{5}$.)

- (i) Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind. (Begründung!)
- (ii) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 1 | Y \leq 0)$.
- (iii) Berechnen Sie EY .
- (iv) Berechnen Sie $Kov(X, Y)$ (Hinweis: $EX = \frac{2}{5}$).
- (v) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F^Y von Y .

Aufgabe 4

Ein Lieferant für Autozubehör gibt an, dass seine Abschleppseile eine erwartete Reißfestigkeit von mehr als 2000 kg aufweisen, d.h. erwartungsgemäß erst bei höherer Gewichtsbelastung reißen. Eine Überprüfung von insgesamt 8 derartigen Abschleppseilen ergab die nachfolgend angegebenen Gewichtsbelastungen (in kg), unter denen die Seile zerrissen:

2012 , 2065 , 1983 , 2043 , 1979 , 2019 , 2028 , 2031 .

Aus Erfahrung ist bekannt, dass diese Messwerte als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ aufgefasst werden können.

- (a) Überprüfen Sie anhand eines geeigneten statistischen Tests, ob die Behauptung des Lieferanten zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ nachgewiesen werden kann.
- (b) Wie groß müsste der Stichprobenumfang n mindestens sein, um bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 2500 \text{ (kg}^2\text{)}$ ein zweiseitiges 90%-Konfidenzintervall für den (unbekannten) Erwartungswert μ angeben zu können, dessen Länge höchstens 40 (kg) beträgt.

Aufgabe 5

Hinweise: Für die stets eindeutige richtige Antwort einer Teilaufgabe werden jeweils drei Punkte gutgeschrieben.

Gewertet werden *ausschließlich* die in der nachstehenden Tabelle eingetragenen Antwortbuchstaben (A, B, C, D oder E). Vermeiden Sie Korrekturen.

Teilaufgabe	Antwort
(a)	
(b)	
(c)	

- (a) Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim N(2, 4)$ und $Y \sim N(1, 1)$. Weiter seien $V = 2Y - 1$ und $W = X - Y$. Betrachten Sie folgende Aussagen:

- (1) $V \sim N(1, 4)$.
- (2) $W \sim N(1, 5)$.
- (3) $\text{Var } W = 3$.
- (4) Für die Verteilungsfunktion F^X von X gilt:

$$F^X(x) = \Phi\left(\frac{x-2}{2}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

(Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.)

- (5) Für die Dichtefunktion f^X von X gilt:

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{8}\right) \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Welche dieser Aussagen sind richtig?

- Ⓐ Die Aussagen (1), (4) und (5) sind richtig, die übrigen falsch.
- Ⓑ Die Aussagen (1), (2), (4) und (5) sind richtig, Aussage (3) ist falsch.
- Ⓒ Die Aussagen (4) und (5) sind richtig, die übrigen falsch.
- Ⓓ Alle fünf Aussagen sind richtig.
- Ⓔ Die Aussagen (1), (2) und (5) sind richtig, die übrigen falsch.

- (b) Ein Produzent von Fleischkonserven behauptet, dass der erwartete Rindfleischgehalt seiner Konserven mehr als 200 g beträgt. Für n derartige Konserven wurde jeweils die tatsächlich enthaltene Menge an Rindfleisch ermittelt. Nehmen sie an, dass diese Mengen als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ aufgefasst werden können.

Welcher der folgenden statistischen Tests ist zur Überprüfung der Aussage des Produzenten geeignet?

- Ⓐ der χ^2 -Test mit den Hypothesen

$$H_0 : \sigma^2 \leq 200 \text{ gegen } H_1 : \sigma^2 > 200 ,$$

- Ⓑ Der Einstichproben-t-Test mit den Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 200 \text{ gegen } H_1 : \mu < 200 ,$$

- Ⓒ der Einstichproben-Gauß-Test mit den Hypothesen

$$H_0 : \mu \geq 200 \text{ gegen } H_1 : \mu < 200 ,$$

- Ⓓ der Einstichproben-Gauß-Test mit den Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 200 \text{ gegen } H_1 : \mu > 200 ,$$

- Ⓔ der Einstichproben-t-Test mit den Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq 200 \text{ gegen } H_1 : \mu > 200 .$$

- (c) Gegeben seien die folgenden, jeweils auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 , \\ 1 - x & , \ 0 \leq x < 1 , \\ 1 & , \ x \geq 1 , \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 , \\ 1 - e^{-2x} & , \ x \geq 0 , \end{cases}$$

$$F_3(x) = 1 - e^{-|x|} , \ x \in \mathbb{R} .$$

Welche dieser Funktionen können *nicht* Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen sein?

- Ⓐ F_1 und F_2 ,
 Ⓑ alle drei,
 Ⓒ nur F_1 ,
 Ⓓ F_1 und F_3 ,
 Ⓔ F_2 und F_3 .

Aufgabe 6

- (a) Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ mit

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B) = \frac{2}{5}.$$

Berechnen Sie:

- (i) $P(A \cap B)$,
- (ii) $P(B \setminus A)$,
- (iii) $P(B \cap (A \cup \overline{B}))$.

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

- (b) Es seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte, stetige Zufallsvariablen. Die zugehörige Dichtefunktion f_λ von X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei gegeben durch

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-1)} & , \quad x > 1, \\ 0 & , \quad x \leq 1, \end{cases}$$

mit (unbekanntem) Parameter $\lambda > 0$.

- (i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-2 < X_1 \leq 0)$.
- (ii) Bestimmen Sie $E X_1$.
- (iii) Leiten Sie her, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung für λ bei gegebenen Realisationen $x_1, \dots, x_n > 1$ von $X_1, \dots, X_n$ durch

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 1)}$$

gegeben ist.

Aufgabe 7

Die Riemann-Dichte $f^{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der zweidimensionalen stetigen Zufallsvariablen (X, Y) sei definiert durch:

$$f^{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad \text{falls } 2 \leq x \leq 4 \text{ und } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind durch

$$f^X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad \text{falls } 2 \leq x \leq 4, \\ 0 & , \quad \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad f^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad \text{falls } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & , \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

Randdichten f^X von X bzw. f^Y von Y gegeben.

- (a) Überprüfen Sie, ob X und Y stochastisch unabhängig sind. (Begründung!)
- (b) Berechnen Sie $E(XY)$.
- (c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F^X der Zufallsvariablen X .

Aufgabe 8

In einer Versicherungs-Niederlassung sind insgesamt 60 Agenten beschäftigt, die jeweils einen großen Anteil ihrer Arbeitszeit im Außendienst verbringen. Es sei vorausgesetzt, dass sich jeder Agent (unabhängig von den übrigen Agenten) an jedem beliebigen Arbeitstag mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ in der Niederlassung befindet.

- (a) Berechnen Sie für $p = 0.3$ approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, an einem Arbeitstag mehr als 20 Agenten in der Niederlassung anzutreffen.
- (b) Nehmen Sie in diesem Aufgabenteil an, dass p unbekannt ist. Um die Büroräume geeignet auszustatten, soll festgestellt werden, wie groß der erwartete Anteil p der Agenten ist, die sich jeweils in der Niederlassung befinden.

An einem zufällig ausgewählten Arbeitstag sind 18 der insgesamt 60 Agenten in der Niederlassung. Bestimmen Sie mittels dieser Angabe ein approximatives zweiseitiges Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 90%.

Aufgabe 9

In einer Kleinstadt wurden statistische Untersuchungen zur Benutzung unterschiedlicher Verkehrsmittel durchgeführt.

Unter anderem sollte überprüft werden, ob man im innerstädtischen Bereich schneller mit dem Bus oder mit dem Auto an sein Ziel gelangt. Hierzu wurden für eine bestimmte Teststrecke die jeweils benötigten Fahrzeiten von 10 Autofahrern und 8 Bus-Benutzern gemessen. Diese Zeiten sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Verkehrsmittel	Benötigte Fahrzeit (in Minuten)									
Auto	19.3	17.6	18.6	20.8	20.5	19.0	20.8	16.2	19.4	22.4
Bus	14.9	17.5	18.0	15.6	19.3	17.9	18.3	16.5		

Nehmen Sie an, dass diese Zeiten als Realisationen $x_1, \dots, x_{10}, y_1, \dots, y_8$ (gemeinsam) stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{10}, Y_1, \dots, Y_8$ mit $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ für $i \in \{1, \dots, 10\}$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ aufgefasst werden können, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ jeweils unbekannt seien.

Überprüfen Sie anhand eines geeigneten statistischen Tests zum Niveau $\alpha = 5\%$ die Behauptung, dass sich für die Benutzung des Busses eine kürzere erwartete Fahrzeit als für die Benutzung des Autos ergibt.

Hinweis: Folgende Stichprobengrößen können ohne eigene Berechnung verwendet werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 19.46 \quad , \quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 3.154 \quad .$$

Aufgabe 1

- (a) Eine Urne enthält drei mit den Zahlen 1, 2 und 3 nummerierte schwarze Kugeln. Eine andere Urne enthält zwei nummerierte blaue Kugeln mit den Zahlen 1 und 2. Es werden gleichzeitig eine schwarze und eine blaue Kugel aus den beiden Urnen gezogen.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \text{Pot}(\Omega), P)$ zu diesem Zufallsexperiment an.

(ii) Beschreiben Sie das Ereignis

“Die gezogene schwarze Kugel trägt die Nummer 3.“

als Teilmenge von Ω und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

- (b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) sei durch die folgende Tabelle der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = i, Y = j), i \in \{1, 4\}, j \in \{-1, 0, 1\},$$

gegeben:

$P(X = i, Y = j)$		j		
		-1	0	1
i	1	0.2	0.1	0.3
	4	0.1	0.1	0.2
$P(Y = j)$		0.3	0.2	0.5

- (i) Bestimmen Sie (nachvollziehbar) die Randverteilung von X . Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (ii) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 4 | Y \leq 0)$.
- (iii) Berechnen Sie $E(Y^2)$ und $\text{Var}(10X + 3)$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x+3} & , \text{ falls } 0 \leq x \leq 6, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

- (a) Begründen Sie, dass die Funktion f bei der Wahl von $c = \frac{1}{\ln(3)}$ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist.
(Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$)

Seien im Folgenden $c = \frac{1}{\ln(3)}$ und X die Zufallsvariable aus Aufgabenteil (a).

- (b) Bestimmen Sie $P(X \leq 3)$.
(c) Ermitteln Sie die Erwartungswerte $E(X + 3)$ und $E(X)$.

Aufgabe 3

Der Restaurantbetreiber Helmut Hanbao hat sich auf die Zubereitung von amerikanischen Hamburgern spezialisiert. Der „Super Burger“ auf der Speisekarte wird damit beworben, dass er 500 g auf die Waage bringt.

- (a) Ein penibler Kunde will Helmut Hanbao statistisch nachweisen, dass diese Gewichtsangabe irreführend ist, da man eher ein Gewicht zu erwarten habe, das verschieden von 500 g ist. Er bestellt fünf „Super Burger“ und wiegt sie mit folgenden Ergebnissen (in g)

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 504 & 500 & 502 & 506 & 503 \end{array}.$$

Er geht davon aus, dass die gemessenen Gewichte als Realisationen jeweils normalverteilter stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_5$ mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$ aufgefasst werden können.

- (i) Geben Sie geeignete Hypothesen für das Testproblem dieses Kunden an.
(ii) Nennen Sie einen für diese Situation und für die Hypothesen aus Aufgabenteil (i) geeigneten Test und führen Sie diesen zum Signifikanzniveau $\alpha = 10\%$ durch.

- (b) Helmut Hanbao möchte nun seinerseits das Gewicht seiner Burger statistisch untersuchen und lässt dafür 30 „Super Burger“ zubereiten und wiegen. Er erhält ein durchschnittliches Gewicht von $\bar{x} = 504$ [g] und eine Stichprobenvarianz von $\hat{\sigma}^2 = 7,5$ [g²]. Auch er geht davon aus, dass die gemessenen Gewichte als Realisationen jeweils normalverteilter stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{30}$ mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$ aufgefasst werden können.

- (i) Helmut Hanbao will zeigen, dass das erwartete Gewicht über 500 g liegt. Er stellt verschiedene Hypothesen auf:

$$\begin{array}{llll} 1. & H_0 : \mu \geq 500 & \longleftrightarrow & H_1 : \mu < 500 \\ 2. & H_0 : \mu < 501 & \longleftrightarrow & H_1 : \mu > 500 \end{array}$$

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an, weshalb diese beiden Formulierungen als Testprobleme für Herrn Hanbao konzeptionell ungeeignet sind, und nennen Sie die passenden Hypothesen für das Testproblem von Herrn Hanbao.

(Bemerkung: Eine Durchführung des Tests ist nicht erforderlich.)

- (ii) Geben Sie ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für den unbekannten Parameter μ zu den vorliegenden Daten von Helmut Hanbao an. Vereinfachen Sie die Intervallgrenzen jeweils möglichst weit.

(Hinweis: Es ergeben sich natürliche Zahlen als Intervallgrenzen.)

- (c) Nun interessiert sich Helmut Hanbao für den Anteil $p \in (0, 1)$ seiner Kunden, die mit ihrem bestellten „Super Burger“ zufrieden sind. Dazu befragt er unabhängig voneinander 400 Kunden unmittelbar nach dem Verzehr des Burgers. 360 von ihnen sind zufrieden und die restlichen 40 Befragten sind unzufrieden. Geben Sie ein geeignetes Modell für diese Situation an, und berechnen Sie ein approximatives einseitiges oberes 97,5%-Konfidenzintervall für p .

Aufgabe 4

Seien $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $\lambda > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Weiterhin seien $x_1, \dots, x_n$ Realisationen von $X_1, \dots, X_n$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Gegeben sei der Schätzer

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

für den Parameter λ .

(a) Berechnen Sie $E(\frac{1}{\hat{\lambda}})$. Ist $\frac{1}{\hat{\lambda}}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\frac{1}{\lambda}$?

(b) Berechnen Sie $\text{Var}\left(\frac{1}{\hat{\lambda}}\right)$.

(c) Weisen Sie nach, dass durch

$$K = \left[\frac{\chi_{\alpha}^2(2n)}{2n} \hat{\lambda}, \infty \right)$$

ein $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall für den Parameter λ gegeben ist.

(Hinweis zu (c): Sie können ohne Nachweis verwenden, dass in dieser Situation gilt:
 $2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(2n).$)

(d) Berechnen Sie gemäß Aufgabenteil (c) für

$$n = 15 \text{ und } \bar{x} = 0,25$$

ein einseitiges oberes 99%-Konfidenzintervall für den Parameter λ .