

Aufgabe 1**(D)****[8 Punkte]**

Berechnen Sie für $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Integrale

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z-2} dz, \quad (2 \text{ Punkte})$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(3z)}{z + \frac{\pi}{4}} dz, \quad (3 \text{ Punkte})$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{z^3} dz. \quad (3 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 2**(F)****[12 Punkte]**

Welche der folgenden Funktionen besitzen eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$? Begründen Sie ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Typ der Singularität und das Residuum in $z_0 = 0$.

$$\frac{\sin(z)}{z}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{1}{z(z-1)}, \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\text{je 3 Punkte})$$

Aufgabe 3**(F)****[15 Punkte]**

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx.$$

Aufgabe 4**[5 Punkte]**

Berechnen Sie

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^3} dz,$$

wobei $\Gamma = \partial B_2(0) \subset \mathbb{C}$ die Kreislinie mit Radius 2 ist.

Aufgabe 5**[6 Punkte]**

Bestimmen Sie alle Singularitäten von $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$.

Sind alle Singularitäten isoliert?

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die Funktion

(10)

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} \left\{ \exp\left(\frac{2}{z-1}\right) - 1 \right\}, \quad z^2 - 3z + 2 \neq 0,$$

das Residuum $a := \operatorname{Res}(f, 1)$ in $z = 1$.Ferner gebe man für a eine geschlossene Darstellung an.**Aufgabe 7**

Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man

(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} - \cos t}.$$

Hinweis: $\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$.

Aufgabe 8**[12 Punkte]**

Man berechne mit dem Residuensatz das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos(x)} dx.$$

7

Aufgabe 9**[7 Punkte]**

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

in eine Laurent-Reihe um die isolierte Singularität $z_0 = 1$.Nutzen Sie die Laurent-Reihe, um die Art der Singularität festzustellen und um das Residuum von f an der Stelle $z_0 = 1$ zu bestimmen.

K

Aufgabe 10**[15 Punkte]**

Man berechne mit dem Residuensatz das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \quad (\text{hierbei sei } x \in \mathbb{R})$$

und leite daraus den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$$

ab.

Aufgabe 11

Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man:

(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + \cos \varphi)^2} .$$

Aufgabe 12

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{z(z+2)^3}$.

(9)

Geben Sie für alle möglichen Laurentreihenentwicklungen von f um den Punkt $z_0 = -2$ die Koeffizienten der Laurentreihen explizit an.

Aufgabe 13

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

(11)

$$\int_0^{2\pi} \frac{7 + 4 \sin \varphi}{\sqrt{5} + 2 \cos \varphi} d\varphi .$$

Aufgabe 14

Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man für $a \in \mathbb{R}^+$

(3.5)

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(a^2 + x^2)^2} dx .$$

Hinweis: Insbesondere ist die Existenz von $I(a)$ und das Verschwinden gewisser Randintegrale beim Grenzübergang nachzuweisen.

Aufgabe 15

Man berechne

(7)

$$\int_{K_j} (z^2 - 2z - 2) \exp\left\{-\frac{3}{z+2}\right\} dz \quad (j = 1, 2)$$

längs der positiv orientierten Kurven

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} , \quad K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 2\} .$$

Aufgabe 16

Man zeige, daß

(2,0)

$$f(z) = \frac{z}{\cosh z - 1} \quad (z \neq 2k\pi i, k \text{ ganz})$$

in $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, und berechne $\int_{|z|=1} f(z) dz$.

Aufgabe 17

Gegeben seien die Funktionen

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z} \quad \text{und} \quad g(z) = \cosh \frac{1}{z+2}$$

in $\mathbb{C} \setminus \{-4, -2, 0\}$ sowie

$$s(z) = f(z) + g(z) \quad \text{und} \quad p(z) = f(z) \cdot g(z).$$

Außerdem sei $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+2| < 2\}$

und $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+2| < \infty\}$.

1.) Man bestimme die Laurent-Reihen von $s(z)$ in R_1 und R_2 .

2.) Man berechne $\int_{|\zeta|=1} (z+2) p(z) dz$.

Aufgabe 18

Man berechne

$$(1) \quad \oint_{|z-1|=5} \exp \left\{ \frac{1}{z-ia} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{(z-ia)^2} \right\} dz$$

für $a \in \mathbb{R}$ mit $-5 < a < 5$.

Aufgabe 19

Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes

(16)

$$I = \oint_{|z|=4} \left\{ \left(z - 12z^3 \right) \left(1 - \cos \frac{1}{z} \right) - \frac{24 \cos \left(\frac{\pi}{2} z \right)}{(z-1)^4} \right\} dz.$$

Aufgabe 20

Man berechne

$$(3) \quad I = \int_{|z|=2} \frac{1}{z+3} \exp \left\{ \frac{1}{z-1} \right\} dz$$

und finde für die komplexe Zahl I eine geschlossene Darstellung.
