Mathe: KGÜ 6

13.07.10

Aufg. B29

Satz über die Laurent-Entwicklung

$a \in \mathbb{C}$, G Ringgebiet um a

$G := \{ z \in \mathbb{C} \mid \delta < |z-a| < R \}$

f hol. auf G

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in G$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw \quad , \quad \delta < r < R$$

a) hebbare Sing. ($b_n = 0 \ \forall n < 0$)

b) Pol k-ter Ordnung ($b_n = 0 \ \forall n < -k$, $b_{-k} \neq 0$)

c) wesentl. Sing.

Residuensatz

G Gebiet, γ einfache, stw. diff'bare, geschl. Kurve mit $\operatorname{int}(\gamma) \subseteq G$

f hol. auf $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \operatorname{int}(\gamma)$

f hat Pole in $a_1, \dots a_n$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f, a_k)$$

Ma/Ag 1330

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)^2} \quad , \quad z_0=1+i$$

$$\frac{1}{(z-i)^2}=-\frac{d}{dz}\underbrace{\frac{1}{(z-i)}}_{g(z)}$$

Bestimme Reihe für $\frac{1}{z-i}$ und differenziere

1. Fall: $|z-z_0|<1$

Geom. Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$, $|q|<1$

$$g(z)=\frac{1}{z-i}=\frac{1}{1+z-i-1}=\frac{1}{1-(-1)(z-z_0)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-z_0)^n$$

$$f(z)=-g'(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\,(z-z_0)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,(z-z_0)^{n-1}$$

2. Fall: $|z-z_0|>1$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z-z_0|}<1$$

$$g(z)=\frac{1}{z-i}=\frac{1}{1-(-1)(z-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-(-1)\frac{1}{(z-z_0)}}$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-z_0)^{-n-1}$$

$$f(z)=-g'(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-n-1)(z-z_0)^{-n-2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-z_0)^{-n-2}$$

13.~~07~~.10

Aufg. B31

$f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ definiert für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

Zu betrachten sind nur die Punkte $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Es gilt für $\forall\, z \in B(k\pi, \pi) \setminus \{k\pi\}$:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{(-1)^k \sin(z-k\pi)} = (-1)^k \frac{1}{z-k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin(z-k\pi)} =: g(z)$$

mit $g: B(k\pi, \pi) \setminus \{k\pi\} \to \mathbb{C}$, $\lim_{z \to k\pi} g(z) = 1$

$\Rightarrow$ g ist in $k\pi$ stetig und somit holom. fortsetzbar zu

$\tilde{g}: B(k\pi, \pi) \to \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\sin(z)} = (-1)^k \frac{1}{z-k\pi} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{g}^{(n)}(k\pi)}{n!} (z-k\pi)^n}_{\text{Taylorentw. von } \tilde{g}}$$

$\Rightarrow$ Pol 1. Ordn. in $k\pi$

b) $g(z) = \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ $\qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1-\cos(z)}{z^2} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} z^{2n-2}$$

$\Rightarrow$ $z_0 = 0$ ist hebbare Sing. da neg. Koeff $b_k = 0$ für $k < 0$

13.07.10

Aufg. 1352

1) f hat in z_0 Polstelle der Ordnung m

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$$

2) $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, wobei g und h in z_0 hol. sind

mit $g(z_0) \neq 0$ $h(z)$ habe Nullstelle 1. Ordnung in z_0

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (5.2)$$

a) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2(z)}$ da $e^z \neq 0$ bei $z \in \mathbb{C}$,

hat f in $z_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Polstelle 2. Ordnung, sonst holom.

Es gilt:

$$f(z) = e^{k\pi} \frac{e^{z-k\pi}}{\sin^2(z-k\pi)}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = e^{k\pi} \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{e^w}{\sin^2(w)}, 0\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^w}{\sin^2(w)}, 0\right) = \frac{1}{1!} \lim_{w \to 0} \frac{d}{dw}\left(\frac{w^2 e^w}{\sin^2(w)}\right)$$

$$= \lim_{w \to 0}\left(\frac{(2w+w^2)e^w \sin^2(w) - w^2 e^w \cdot 2\sin(w)\cos(w)}{\sin^4(w)}\right)$$

$$= \lim_{w \to 0}\left(e^w \frac{(2w+w^2)\sin(w) - w^2 \cdot 2 \cdot \cos(w)}{\sin^3(w)}\right)$$

$$= e^0 \cdot \lim_{w \to 0} \frac{w}{\sin(w)} \lim_{w \to 0}\left(\frac{2+w}{\sin(w)} - \frac{2w\cos(w)}{\sin^2(w)}\right)$$

$$= 1 + 2 \cdot \lim_{w \to 0} \frac{\sin(w) - w\cos(w)}{\sin^2(w)}$$

l'Hospital

$=$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = e^{k\pi} \cdot 1$

b) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$

$g^*(z) = e^z - 1$ hat NS 1. Ordnung in $z_k = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$,
da $g^{*\prime}(z_k) = e^{2k\pi i} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(g, z_k) = \frac{1}{g^{*\prime}(z_k)} = \frac{1}{e^z}\Big|_{z=z_k} = 1$

c) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, hat Polstelle 2. Ordng in $z=0$, sonst holom.

$\frac{1}{z^2}$ ist bereits Laurententwicklung von f um $z_0=0$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,0) = b_{-1} = 0$

Aufg. B 33

a) $\int_{|z|=3/2} \left(\tan(z) + \frac{1}{z^2+2} + \frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{1-z}\right) dz$

- $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ hat Polst. 1. Ordng in $z_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

  wegen $\frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$ liegen alle Pole außerhalb von $|z| = \frac{3}{2}$

- $\frac{1}{z^2+2} = \frac{1}{(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})}$ hat jeweils Polstelle 1. Ord.

  in $z = \pm i\sqrt{2}$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2}, i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2z}\Big|_{z=i\sqrt{2}} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+2}, -i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2z}\ \left(z=-i\sqrt{2} = -\frac{1}{2i\sqrt{2}}\right)$

13.07.10

$\cdot \; \frac{1}{1-z} \cdot e^{\frac{1}{1-z}} = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$ für $|z-1|>0$

also wesentliche Sing. in $z=1$

$\Rightarrow Res\left(\frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{1-z}}, 1\right) = d_n = (-1) \frac{(-1)^0}{0!} = -1$

Residuensatz: $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} [\ldots] \, dz = 2\pi i \sum$ eingeschl. Residuen

$= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i \sqrt{2}} - \frac{1}{2i\pi\sqrt{2}} - 1 \right) = -2\pi i$

b) $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{az}}{z^2(z^2+2z+2)}$

$Res(f, 0) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$

$Res(f, -1+i) = \frac{1}{4} e^{-a} (\cos(a) + i \sin a)$

$Res(f, -1-i) = \frac{1}{4} \cdot e^{-a} (\cos(a) - i \sin(a))$

Residuensatz:

$\int\limits_{|z|=3} [\ldots] = 2\pi i \left(\frac{a-1}{2} + \frac{1}{4} e^{-a} (\cos(a) + i\sin(a)) + \frac{1}{4} e^{-a} (\cos(a) - i\sin(a)) \right)$

$= \cancel{2}\pi i \left(a - 1 + e^{-a} \cos(a)\right)$

Aufg. B34

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx$

$R(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$ ist eine Rationale Fkt mit

Zählergrad $\leq$ Nennergrad $- 2$ und Polstelle 1. Ordnung

in $z_{1/2} = -2 \pm i$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}(R, z_j) = 2\pi i \underbrace{\operatorname{Res}(R, -2+i)}_{= 1/2i}$$

$$= \pi$$