A4 F2010

a) $\underline{U}_{aus} = \underline{U}_2 + \underline{U}_1$; $U_{ein} = \underline{U}_1$

$\underline{U}_2 = \underline{U}\cos(\theta) - j\, I_1 Z_L \sin(\theta)$

$\Rightarrow \underline{U}_{aus} = \underline{U}_1 \left(1 + \cos(\theta) - j\,\frac{Z_L}{Z_1}\sin(\theta)\right)$, $I_1 = \frac{\underline{U}_1}{Z_1}$

b) $I_{aus} = -\underline{I}_2 = \frac{-j}{Z_0}\sin(\theta)\,\underline{U}_1 + \cos(\theta)\frac{\underline{U}_1}{Z_1} = \underline{U}_1\left(\frac{\cos(\theta)}{Z_1} - \frac{j}{Z_L}\sin(\theta)\right)$

$\underline{I}_{aus} = I_1\left(\cos(\theta) - j\,\frac{Z_1}{Z_L}\sin(\theta)\right)$

c) $Z_L = Z_0$, $\cos(\theta) \approx 1$, $\sin(\theta) \approx 0$

$\Rightarrow \underline{U}_{aus} = U_1(1+1-0) = 2\underline{U}_1$

$I_{aus} = I_1(1-0) = I_1 = \frac{U_1}{Z_0}$

$\Rightarrow Z_{aus} = \frac{\underline{U}_{aus}}{I_{aus}} = \frac{2U_1}{U_1/Z_0} = 2Z_0$

d) aus c) $\underline{I}_{aus} = \underline{I}_1$

Strom aus Rückleiter am Tor $-\underline{I}_2 = \underline{I}_{1x} = \underline{I}_{aus}$

$\Rightarrow \underline{I}_{ein} = \underline{I}_1 + I_{1x} = \underline{I}_{aus} + \underline{I}_{aus} = 2\underline{I}_{aus}$

e) $Z_{ein} = \frac{U_{ein}}{I_{ein}} = \frac{U_1}{2I_1}$ mit $\underline{U}_{ein} = \underline{U}_1$

$Z_{aus} = \frac{\underline{U}_{aus}}{I_{aus}} = \frac{2U_1}{I_1}$

$d = \frac{Z_{ein}}{Z_{aus}} = \frac{U_1}{2I_1}\cdot\frac{I_1}{2U_1} = \frac{1}{4}$

f) $\underline{U}(\ell) = \underline{U}^+ e^{-j\beta\ell} + \underline{U}^- e^{j\beta\ell}$

$= \underline{U}^+ \cdot e^{-j\beta\ell}\left(1 + \underline{\Gamma}_{aus}\, e^{2j\beta\ell}\right)$ mit $\underline{U}^- = \underline{U}^+\,\underline{\Gamma}_{aus}$

$= \underline{U}^+ \cdot e^{-j\beta\ell}\left(1 + |\underline{\Gamma}_{aus}|\cdot e^{j(2\beta\ell+\Psi)}\right)$

$\Rightarrow |\underline{U}(\ell)| = \left|\underline{U}^+\right|\left|\left(1 + |\underline{\Gamma}_{aus}|\cdot e^{j\beta\ell+\Psi}\right)\right|$

$\Rightarrow$ max $|\underline{u}(\ell)|$ wenn $e^{j2\beta\ell+\varphi}$ Reell ist ($=1$)

$\Rightarrow$ $\max |\underline{u}(\ell)| = |\underline{u}^+| (1+|\Gamma_{ans}|)$

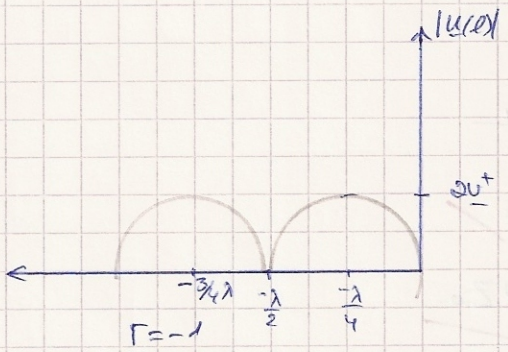
g)

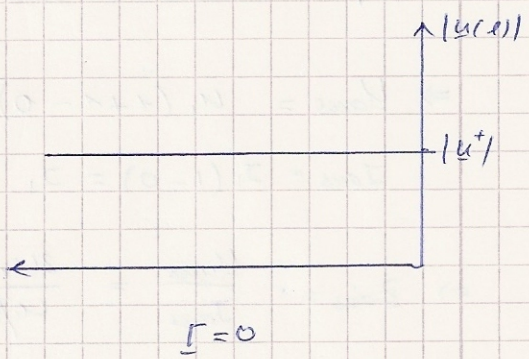
Kurzschluß $\Rightarrow \underline{\Gamma} = -1 = \frac{\underline{u}^+}{\underline{u}^-}$

$$\underline{u}(\ell) = \underline{u}^+ e^{-j\beta\ell} - \underline{u}^+ \cdot e^{+j\beta\ell} = -2j\underline{u}^+ \frac{e^{j\beta\ell} - e^{-j\beta\ell}}{2j}$$

$$\underline{u}(\ell) = -2j\underline{u}^+ \sin(\beta\ell)$$

h) $\ell = 0, \dots, -\lambda \Rightarrow \beta\ell = 0 \dots -2\pi$





i)

$\theta_{f_0} = \beta_1 \ell_x$ $\quad \theta_{2f_0} = \beta_2 \ell_x$

$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$, $\beta_2 = 2\beta_1$ $\quad \lambda_1 = 2\lambda_2$

$$\begin{cases} \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\lambda_1} = 2\frac{2\pi}{\lambda_1} \\ \beta_2 = 2\beta_1 \end{cases}$$

$$\frac{|u_{f_1}(\ell_x)|}{|u_{f_2}(\ell_x)|} = \frac{|\sin(\beta_1\ell_x)|}{|\sin(\beta_2\ell_x)|} = \frac{|\sin(\beta_1\ell_x)|}{|\sin(2\beta_1\ell_x)|} = \left|\frac{\sin(\beta_1\ell_x)}{2\sin(\beta_1\ell_x)\cos(\beta_1\ell_x)}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\cos(\beta_1\ell_x)}\right| \stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{=} \frac{|V_x(f=f_0)|}{|V_x(f=2f_0)|}$$

$\Rightarrow \cos(\beta_1\ell_x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \beta_1\ell_x = \pi/4 \quad (45°)$

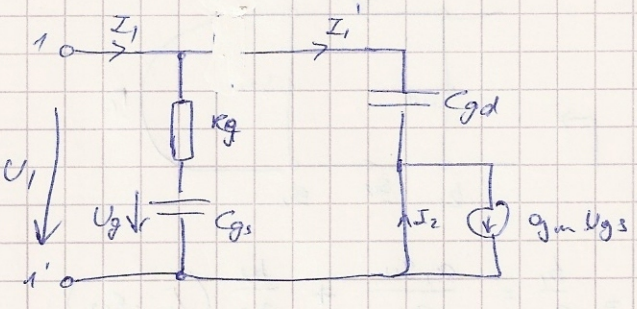
$\Rightarrow \ell_x = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\beta_1} = \frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{8} = 1\,cm$

A5 F2010

a) $\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0}$

$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0}$

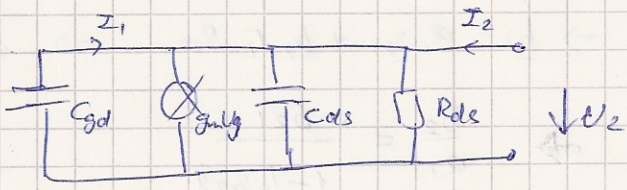
$\Rightarrow$



$\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{U_1=0}$

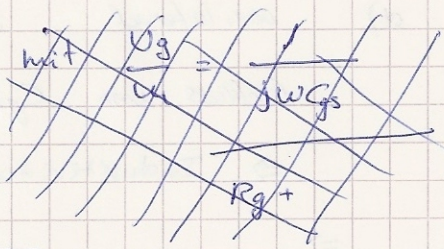
$\Rightarrow$

$\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{U_1=0}$



$$\underline{Y}_{11} = j\omega C_{gd} + \frac{1}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{gs}}}$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{-\underline{I}_1' - g_m \underline{U}_g}{\underline{U}_1} = -j\omega C_{gd} - g_m \frac{\underline{U}_g}{\underline{U}_1}$$



mit $\frac{\underline{U}_g}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{gs}}}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{gs}}} = \frac{1}{1 + j\omega C_{gs} \cdot R_g}$

$$\Rightarrow \underline{Y}_{21} = -j\omega C_{gd} - g_m \frac{1}{1 + j\omega C_{gs} R_g}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} + j\omega C_{gd}$$

$$\underline{Y}_{12} = -j\omega C_{gd}$$

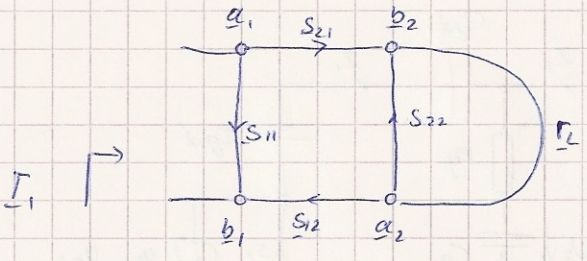
b) $\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Y}_{12}\}}{\omega} = -C_{gd} = \frac{-0.2 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{9}} = -0.02\,\mathrm{pF}$

$\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{22}\} = \frac{1}{R_{ds}} = 0.002\,\mathrm{S} \Rightarrow R_{ds} = 500\,\Omega$

$\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Y}_{22}\}}{\omega} = C_{gd} + C_{ds} = \frac{1.7 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{9}} = 0.17\,\mathrm{pF}$

$C_{ds} = 0.17\,\mathrm{pF} - C_{gd} = 0.15\,\mathrm{pF}$

c)



$$\Gamma_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_1 S_{11}}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}(\Gamma_L \cdot S_{12})$$

$$\Rightarrow b_2 = a_1 S_{21} + b_2 \Gamma_L S_{22} \quad \Rightarrow \quad b_2(1 - \Gamma_L S_{22}) = S_{21} a_1$$

$$\rightarrow \quad \frac{b_2}{a_1} = \frac{S_{21}}{1 - \Gamma_L S_{22}}$$

$$\Gamma_1 = S_{11} + S_{12} S_{21} \Gamma_L \frac{1}{1 - \Gamma_L S_{22}}$$

d) unilateral $S_{12} = 0 \Rightarrow Y_{12} = 0$

Einfluss von C_{gd} muss kompensiert werden.

$\Rightarrow$ Induktivität parallel zu C_{gd}

$\Rightarrow$

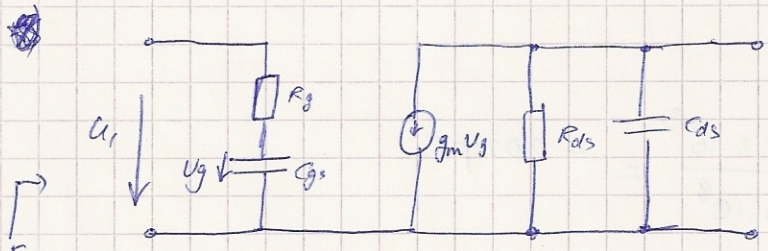
$$Y_p = j\omega C_{gd} + \frac{1}{j\omega L_{RK}} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow j\omega C_{gd} = -\frac{1}{j\omega L_{RK}}$$

$$L_{RK} = \frac{1}{\omega^2 C_{gd}} = \frac{1}{\left(\frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^9\,Hz}{2\pi}\right)^2 2 \cdot 10^{-14}\,F} = \frac{1}{25 \cdot 2 \cdot 10^{4}} = 2\,\mu H$$

e) Induktivität hat bei $f \to 0$ nur geringe Impedanz

$u_{gs} = u_{ds}$ (unerwünscht)

f) unilateral:



$$|\Gamma_e| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P_{in} = P_{ref}\left(1 - |\Gamma_e|^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{in}}{P_{ref}} = \left(1 - |\Gamma_e|^2\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_e = \frac{Z_{ein} - Z_0}{Z_{ein} + Z_0}$$

$$Z_{ein} = R_g + \frac{1}{j\omega C_{gs}} = 10\,\Omega + \frac{1}{j\,5 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-12}\,F}$$

$$Z_{ein} = 10\,\Omega - j\,20\,\Omega$$

$$\Gamma_e = \frac{10\,\Omega - j20\,\Omega - 10\,\Omega}{10\,\Omega - j20\,\Omega + 10\,\Omega} = \frac{-j20\,\Omega}{20\,\Omega - j20\,\Omega}$$

$$\Gamma_e = \frac{1}{1+j}$$

A6 F2010

a) ohne Anpassung am Eingang : $Z_Q = 100\,\Omega \Rightarrow F = 1.8\,dB$

b) Rauschanpassung $\Rightarrow$ Transmision von $\underline{\Gamma}_Q$ in $\underline{\Gamma}_{opt}$

Serienleitung $0{,}25\lambda < l_x < 0{,}5\lambda$

Parallele Stichleitungen erzeugen jeweils Blindanteil (Leitwerte addieren)

ablesen
$$\begin{cases} l_x = 0.25\lambda + 0.172\lambda = 0.422\,\lambda \\ y_p = -0.426\,j \quad \text{(beide Leitungen } L_y \text{ Parallel)} \end{cases}$$

$\Rightarrow y_p' = \frac{y_p}{2} = -j\,0.213$ (je eine Leitung L_y)

$\Rightarrow L_{y_1} = L_{y_2} = L_y = 0.217\lambda$ (Kurzgeschlossen)

c) Leistungsanpassung

$\Rightarrow$ Transmission $\underline{\Gamma}_Q$ in $\underline{S}_{11}^*$

ablesen
$$\begin{cases} l_x = 0{,}375\lambda - 0{,}25\lambda = \underline{0{,}125\lambda} \\ y_{p_2} = -j\,2{,}2 \quad \Rightarrow y_p' = \frac{y_{p_2}}{2} = -j\,1{,}1 \end{cases}$$

$\Rightarrow l_{y_1}' = l_{y_2}' = l_y' = \underline{\underline{0{,}175\lambda}}$

d) Impedanz der Stichleitung bei $f = f_0$ $\left(l = \frac{\lambda_{f_0}}{4}\right)$

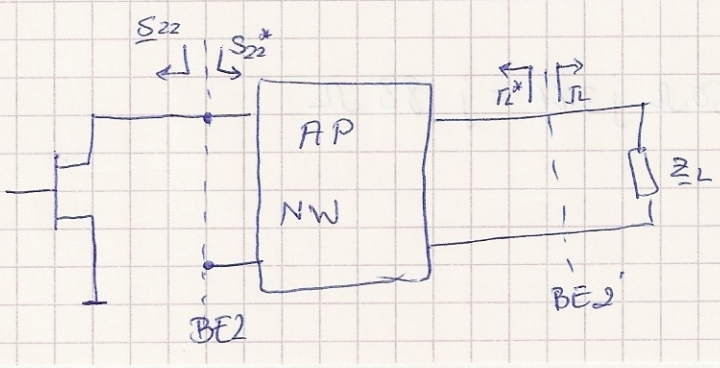
$\Rightarrow \underline{Z}_{a,f_0} = \infty$

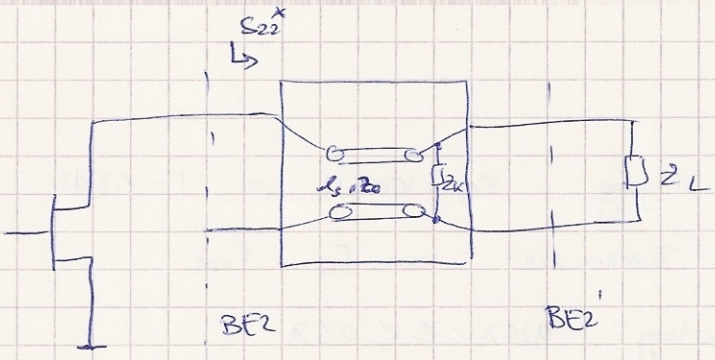
Impedanz der Stichleitung bei $f = 2f_0$ $\left(l = \frac{\lambda_{2f_0}}{2}\right)$

$\Rightarrow \underline{Z}_{a,2f_0} = 0$

$\Rightarrow \underline{Z}_{i,f_0}' = \underline{Z}_L \quad , \; \underline{Z}_{i,2f_0}' = 0\,\Omega$

e)





Z_K: ist damit man nicht im Ursprung dreht.

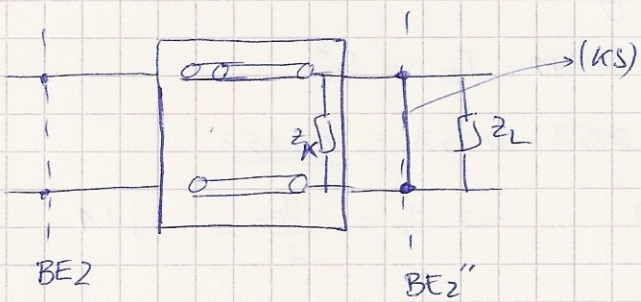
Anpassung im BE2 : $\Gamma'' = S_{22}^* = 0{,}74 \cdot e^{j63°}$

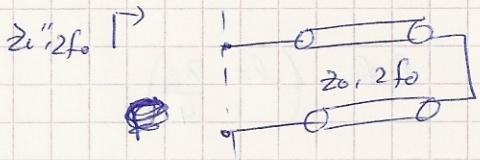
$$y_K = -j2.2 \Rightarrow Z_K = \frac{Z_0}{y_K} = j\frac{50\Omega}{2.2} = j22.73\,\Omega \quad (\Rightarrow \text{induktiv})$$

$\Rightarrow$ Induktivität mit $\underline{Z}_I = \underline{Z}_K = j\omega L = j22{,}73\,\Omega$

$$l_s = 0.162\lambda - 0.058\lambda = 0.104\lambda$$

f)





$f = 2f_0 \Rightarrow Z'_{i,2f_0} = 0$, $\Rightarrow$ Spule hat kein Einfluss

Serienleitung hat doppelte Länge $\frac{l_s}{\lambda_{2f_0}} = 0{,}208$

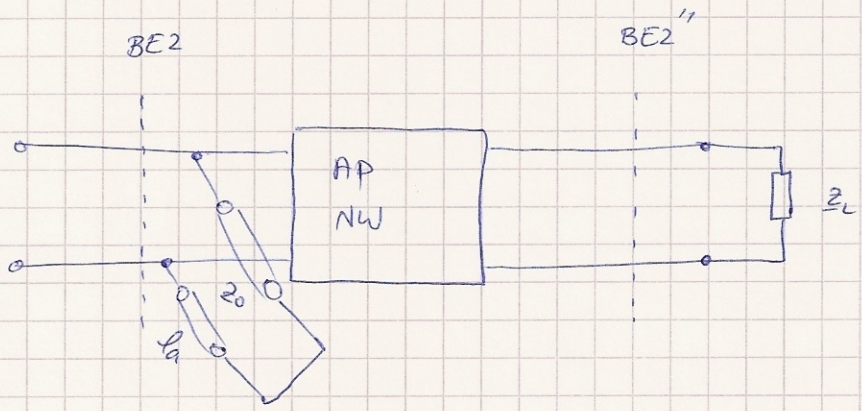
Abschluß $Z'_{i,2f_0} = 0$

(ablesen) $\underline{Z}_i'' = j\,3{,}66$

$$\Rightarrow Z_L = 50\Omega \cdot j\,3{,}66 = j\,183\,\Omega$$

g) Stichleitung sollte bei $f = 2f_0$ einen KS direkt am Transistorausgang erzeugen (BE2)

⇒ Position der Stichleitung müsste dafür direkt an den Transistorausgang verschoben werden.



0 dBm ≙ 1 mW

3dB ≙ 2

10 dB ≙ 10

ZB: 30dBm ≙ 1000mW = 1W

#09

A4.)

a) open cirquit: $\underline{a} = \underline{b}$ short circuit $\underline{a} = -\underline{b}$

b) $\underline{b}_{2A} = -\underline{a}_{2A}$ (short)

$$\underline{b}_{1A} = p\underline{a}_{2A} + q\underline{a}_{4B} = p(-p\underline{a}_{1A} - q\underline{a}_{3A}) + q\underline{a}_{4A} \quad (1)$$

$$\underline{b}_{2A} = p\underline{a}_{1A} + q\underline{a}_{3A}$$

$$\underline{b}_{3A} = q\underline{a}_{2A} + p\underline{a}_{4A} = q(-p\underline{a}_{1A} - q\underline{a}_{3A}) + p\underline{a}_{4A} \quad (2)$$

$$\underline{b}_{4B} = q\underline{a}_{1A} + p\underline{a}_{3A} \quad (3)$$

$$\underline{S}_{3\times3} = \begin{bmatrix} -p^2 & -pq & q \\ -pq & -p^2 & p \\ q & p & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\underline{a}_{1B} = \underline{b}_{1B}$ (open)

Gleichungen wie in b), Index A durch B ersetzt

$$\underline{b}_{1B} = -p^2\underline{a}_{1B} - pq\underline{a}_{3B} + q\underline{a}_{4B} \quad (1)$$

$$\underline{b}_{3B} = -pq\underline{a}_{1B} - q^2\underline{a}_{3B} + p\underline{a}_{4B} \quad (2)$$

$$\underline{b}_{4B} = q\underline{a}_{1B} + p\underline{a}_{3B} \quad (3)$$

aus (1): $\underline{a}_{1B} = \frac{-pq}{1+p^2}\underline{a}_{3B} + \frac{q}{1+p^2}\underline{a}_{4B}$

$\underline{a}_{1B}$ in (2) u. (3):

$$\underline{b}_{3B} = \left[\frac{p^2q^2}{1+p^2} - q^2\right]\underline{a}_{3B} + \left[-\frac{pq^2}{1+p^2} + p\right]\underline{a}_{4B}$$

$$\underline{b}_{4B} = \left[-\frac{pq^2}{1+p^2} + p\right]\underline{a}_{3B} + \left[\frac{q^2}{1+p^2}\right]\underline{a}_{4B}$$

$$\underline{S}_{2\times2} = \begin{bmatrix} \frac{p^2q^2}{1+p^2} - q^2 & -\frac{pq^2}{1+p^2} + p \\ -\frac{pq^2}{1+p^2} + p & \frac{q^2}{1+p^2} \end{bmatrix}$$

d) $\underline{a}_{4B} = \underline{b}_{4A} \qquad \underline{b}_{4B} = \underline{a}_{4A}$

e) $1 - 3C^2 = 0 \qquad C = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Phasendifferenz von π

f) $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}|\underline{b}_2|^2 (1 - |\underline{\Gamma}_2|^2)}{\frac{1}{2}|\underline{a}_1|^2 (1 - |\underline{S}_{11}|^2)} = \frac{|\underline{b}_2|^2}{|\underline{a}_1|^2} = |\underline{S}_{21}|^2$

$= \left| j2C \frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1+C^2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \neq$

$\underline{\Gamma}_2$ ist Reflexionskoeffizient der Last an Port 2

hier $\underline{\Gamma}_2 = 0$

g) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}|\underline{b}_1|^2}{\frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2 (1 - |\underline{S}_{22}|^2)} = \frac{|\underline{S}_{12}|^2}{1 - |\underline{S}_{22}|^2} = \frac{2}{3}$

mit $\underline{S}_{22} = \frac{1 - C^2}{1 + C^2} = \frac{1}{2}$

alternativ: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}|\underline{b}_1|^2}{\frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2} = |\underline{S}_{12}|^2 = |\underline{S}_{21}|^2 = \frac{1}{2}$

h) 3-dB-Divider (balanced)

H09

Aufgabe 5

a) Das Modell ist gültig, wenn die Abmessungen klein gegen die Wellenlänge $\omega, l \ll \lambda$ sind und Streueffekte vernachlässigt werden können $\omega, l \gg d_2$

b) C: Kapazität des Kondensators

$L \approx f(\omega, l)$ Induktivität hervorgerufen durch Ausdehnung der Platten, Verlauf der Strompfade

$R_1 \approx f(\omega, l, \sigma_m)$ Verluste durch Widerstand der Metallisierung (ggf. Verluste durch Umladung von Dipole)

$R_2 \approx f(\omega, l, \sigma_2)$ Verluste im Dielektrikum D_2 durch endliche Leitfähigkeit ($\tan\delta$)

$C_{P_1} \approx f(\omega, l, \varepsilon_{r1}, d_1)$ Kapazität untere Kondensatorplatte zur Massemetallisierung

$C_{P_2} \approx f(\omega, l, \varepsilon_{r2}, d_1, d_2)$ Kapazität obere Kondensatorplatte zur Massemetallisierung

c) $d_{30\,GHz} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_{reff}}} = 5\,mm \rightarrow \frac{\lambda_{Pad}}{\lambda} = \frac{100\,\mu m}{5000\,\mu m} = 0{,}02 < \frac{1}{10}$ kann

also durch Kondensatorplatten angenähert werden.

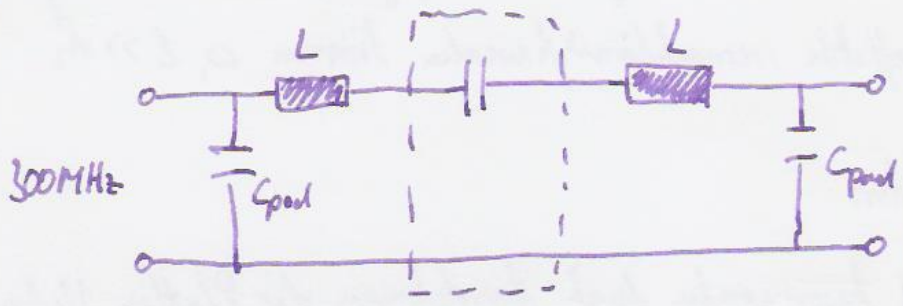
d) $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 14{,}24\,fF$

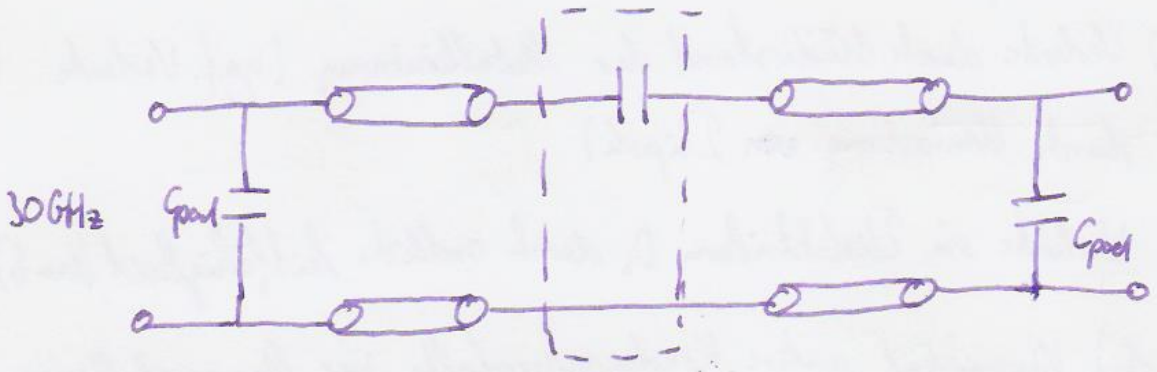
$Z_{in} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow |Z_{in}|$ ist mit $\frac{1}{f}$ abfallende Funktion $\Rightarrow$ Phase $= -90°$

e) $f = 300\,MHz \Rightarrow d_{300MHz} < 0{,}5\,m \Rightarrow \frac{l_{1,2}}{d_{300MHz}} = 0{,}002 \gg l_1, l_2$ als diskretes Bauelement beschreibbar (Spule)

$f = 30\,GHz \Rightarrow \lambda_{30GHz} = 5\,mm \Rightarrow \frac{l_{1,2}}{\lambda_{30GHz}} = 0{,}2$ nicht mehr als diskretes Bauelement beschreibbar, sondern als Leitung

f)





g)

aus $\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$

$$T_{11} = \frac{a_1}{b_2} - \underline{T}_{12} \frac{a_2}{b_2}\bigg|_{a_2=0} = \frac{1}{S_{21}}$$

$$\underline{T}_{12} = \frac{a_1}{a_2} - \underline{T}_{11} \frac{b_2}{a_2}\bigg|_{a_1=0} = -\underline{T}_{11} S_{22} = -\frac{S_{22}}{S_{21}}$$

$$\underline{T}_{21} = \frac{b_1}{b_2} - \underline{T}_{22} \frac{a_2}{b_2}\bigg|_{a_2=0} = \frac{a_1}{b_2} S_{11} = \frac{S_{11}}{S_{21}}$$

$$\underline{T}_{22} = \frac{b_1}{a_2} - \underline{T}_{21} \frac{b_2}{a_2}\bigg|_{a_1=0} = S_{12} - \frac{S_{11}}{S_{21}} S_{22}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_{21}} & -\frac{S_{22}}{S_{21}} \\ \frac{S_{11}}{S_{21}} & S_{12} - \frac{S_{11}}{S_{21}} S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

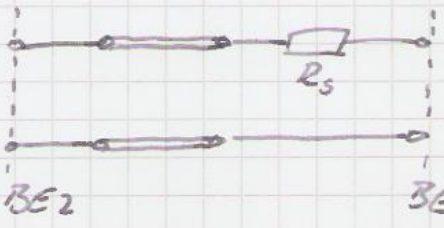
$$T_m = T_{K1}\, T_{L1}\, T_C\, T_{L2}\, T_{K2}$$

$$T_C = T_{L1}^{-1}\, T_{K1}^{-1}\, T_m\, T_{K2}^{-1}\, T_{L2}^{-1}$$

H09

A6) a) $\underline{S}_{11} = \frac{0{,}67}{(-55{,}5)^\circ}$

b) Konzentriertes Bauelement: Serienwiderstand



$l_a = 0{,}173\,\lambda \qquad R_S = 0{,}8 \cdot 50\,\Omega = 40\,\Omega$

c) Nachteil: reelle Last behaftet und mehr Rauschen

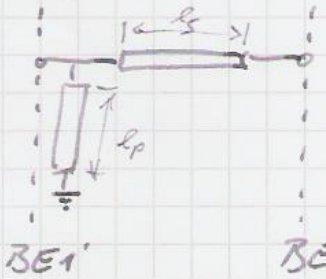
Anpassung mit Spule, Kondensator oder Widerstand als paralleles Element möglich

kürzest mögliche Serienleitung ⇒ kont. Bauteilmass Spule sein

$l_a' = 0{,}106\,\lambda \qquad \omega L_p = \frac{50}{1{,}8\,\Omega} \approx 28\,\Omega$

d) ohne Anpassungsnetzwerk gilt $F = 2{,}45\,dB$

e) $l_S = 0{,}175\,\lambda \qquad l_p = 0{,}352\,\lambda$ Abschluss: Kurzschluss



f) S_{11} einzeichnen und Impedanz ablesen

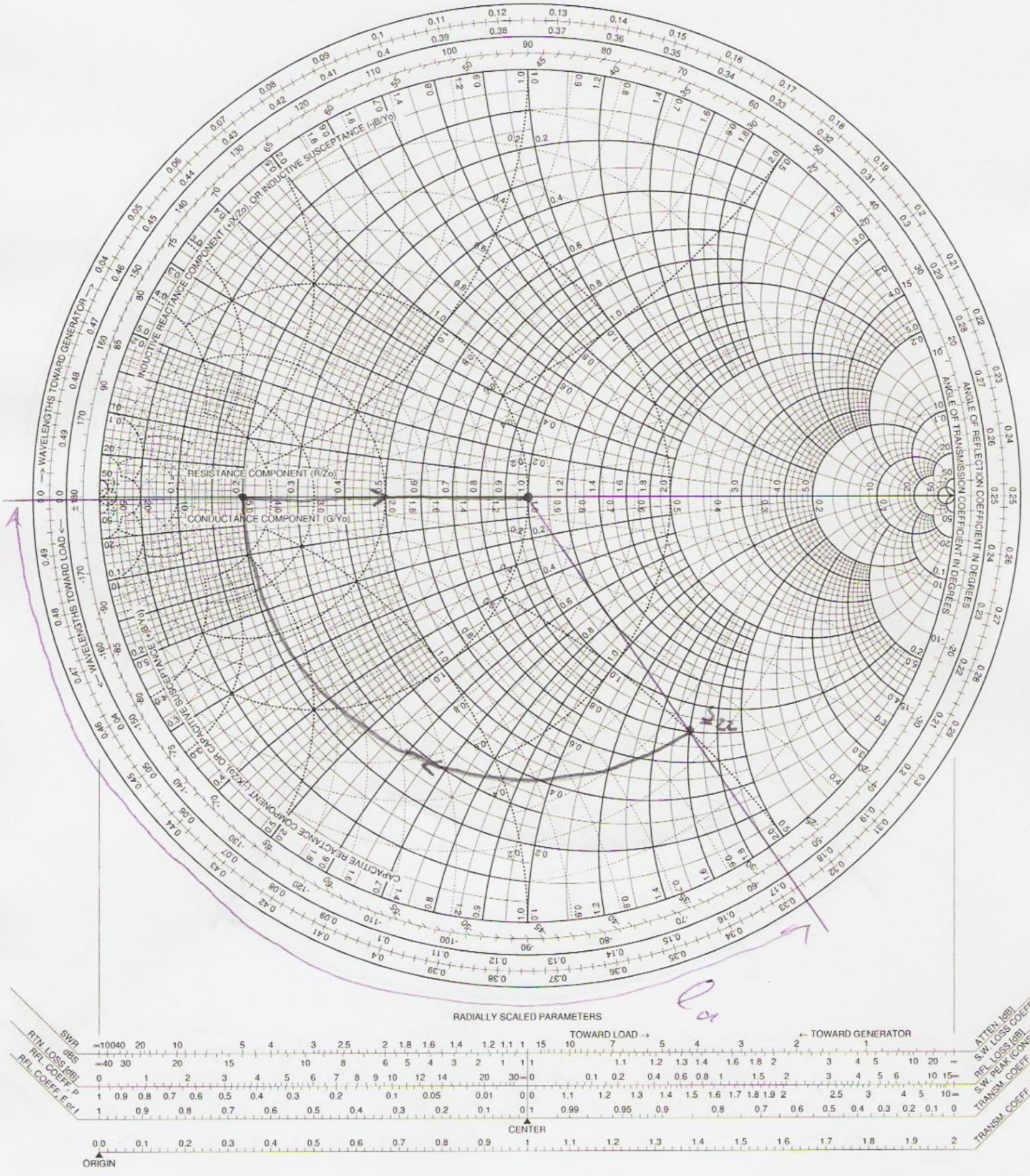
$R_{GS} = 0{,}2 \cdot 50\,\Omega = 10\,\Omega$

$\omega C_{GS} = \frac{1}{1 \cdot 50\,\Omega} = 20\,mS$

g) $l_s = 0{,}065\,\lambda$ $l_p = 0{,}065\,\lambda$

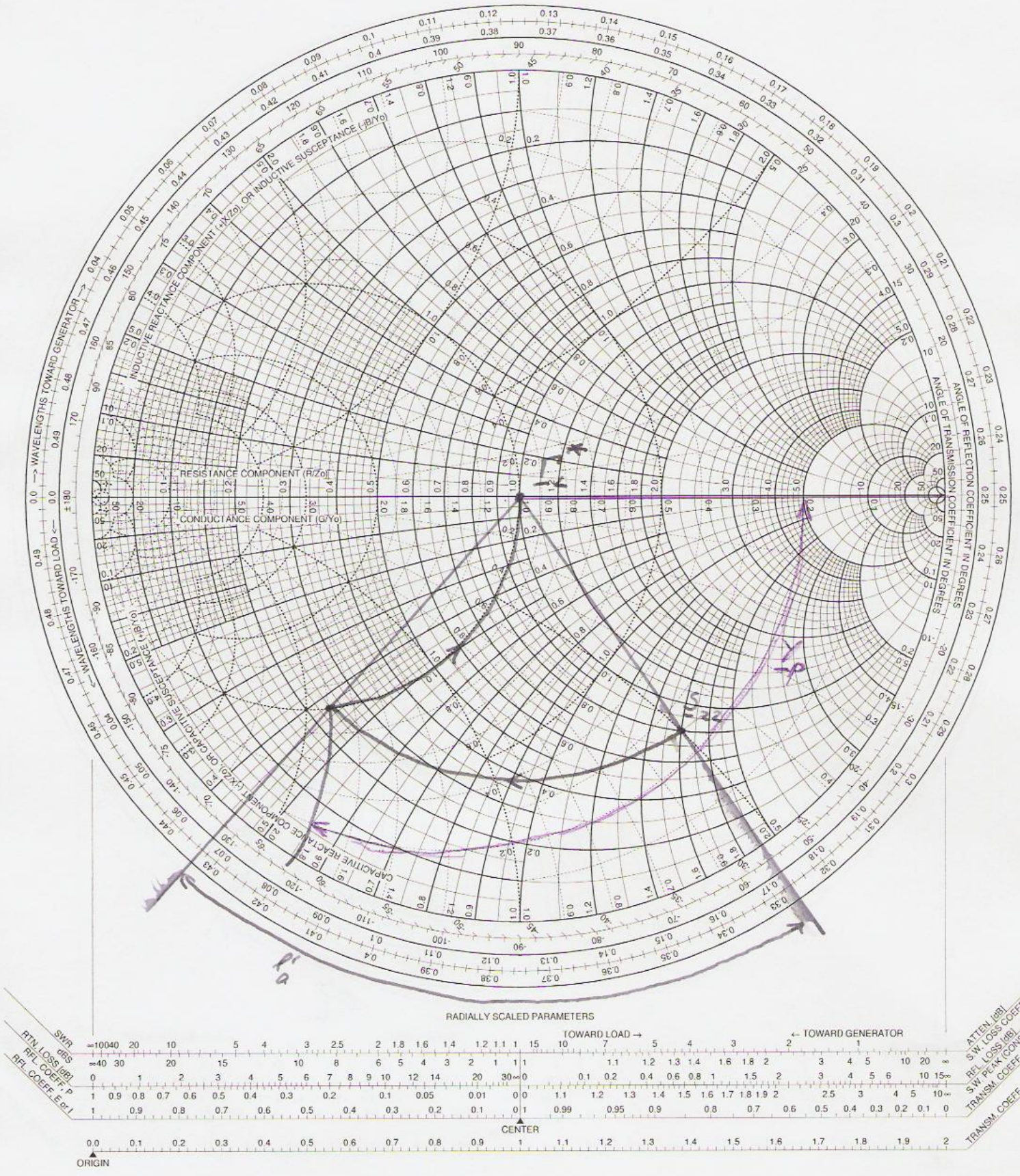
H09 A6 a,b)

The Complete Smith Chart (ZY)



H09 A6C

The Complete Smith Chart (ZY)



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr.–Ing. Andrei Vescan

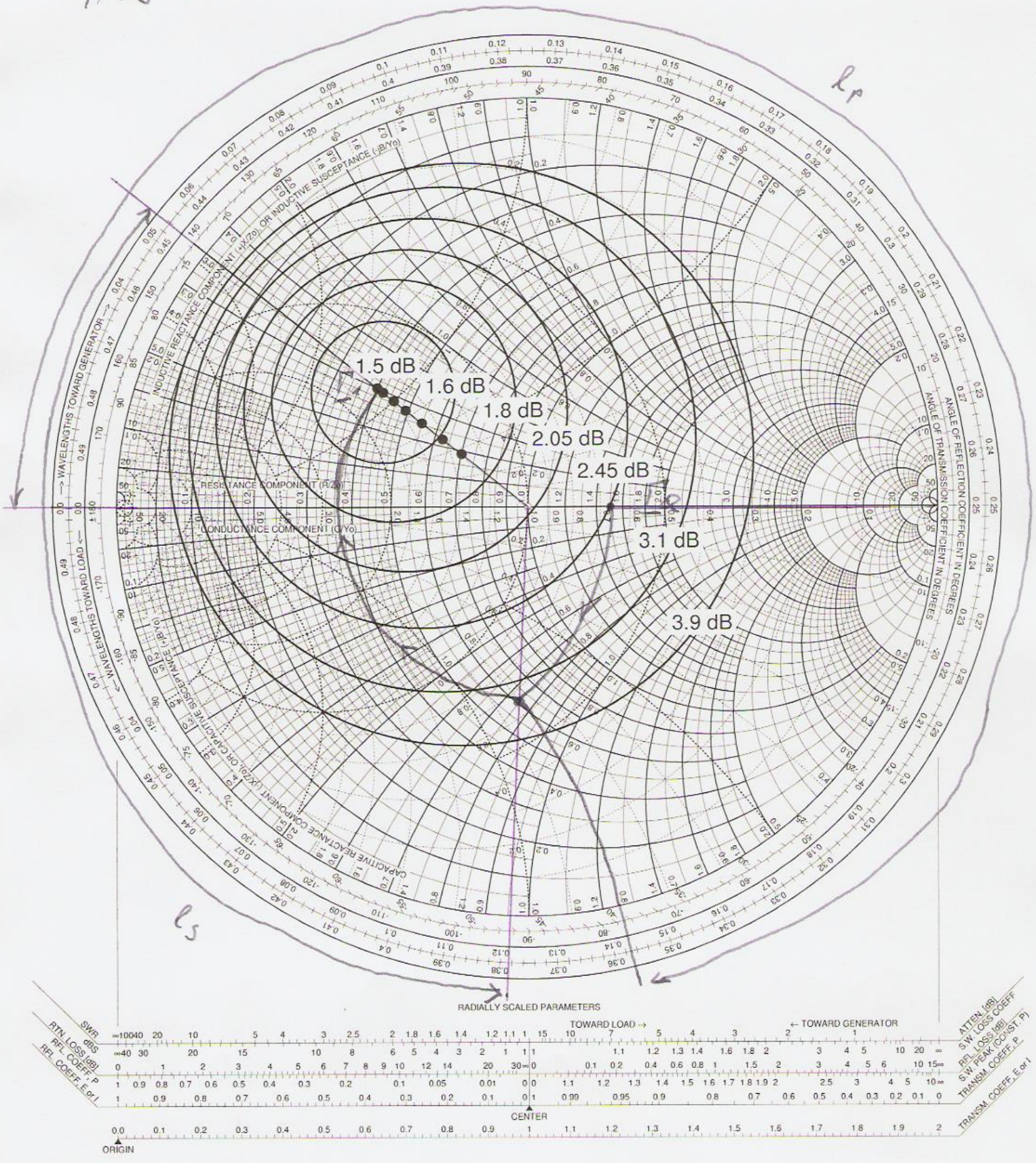
Herbst 2009

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d) und e)

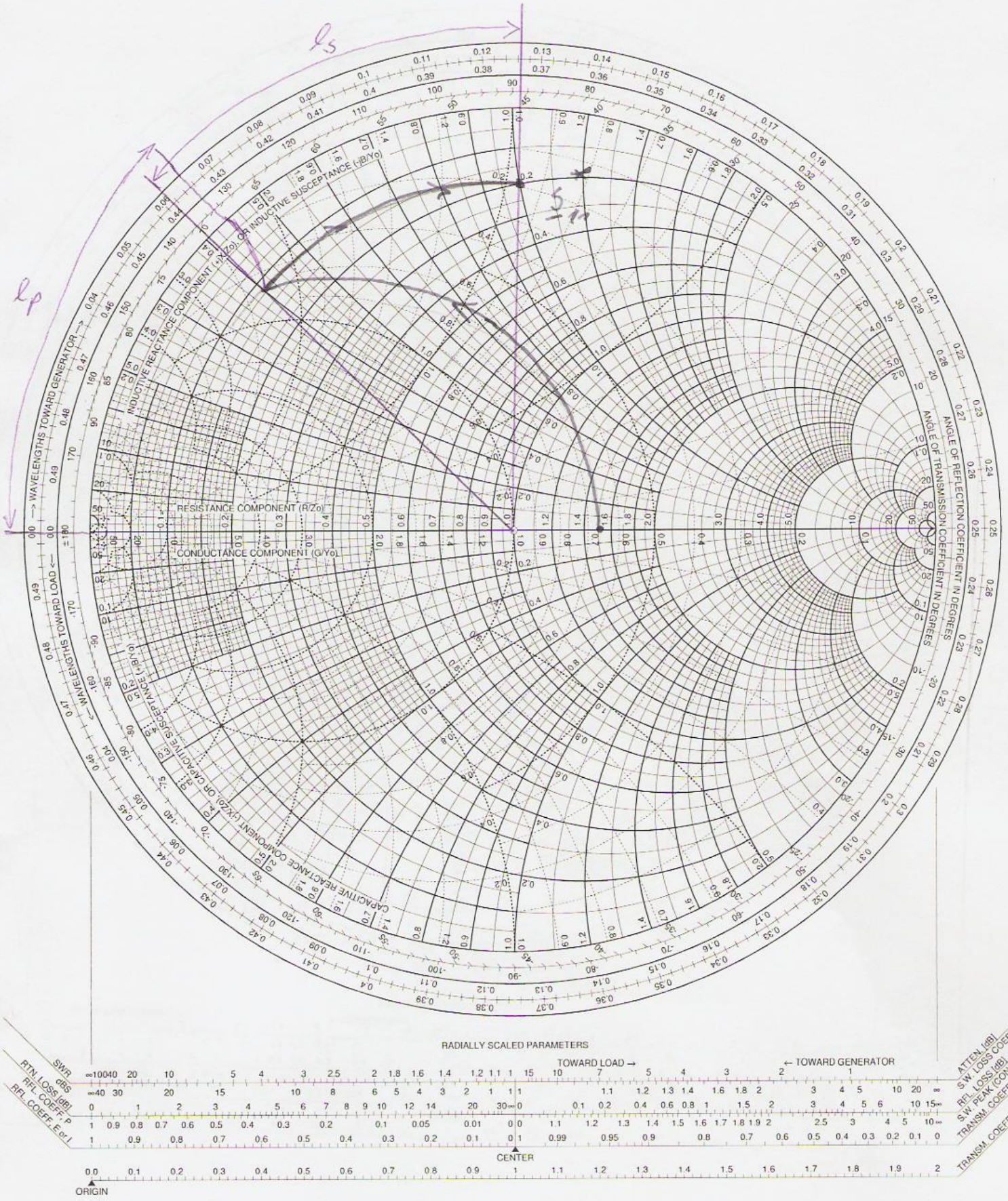
HOJ P6 d

Name: _____ Matr.Nr.: _____



Hog Pog

The Complete Smith Chart (ZY)



a) $\vec{k}_I = \vec{e}_z \cdot \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$

$\vec{k}_{II} = -\vec{e}_z \cdot \omega\cdot\sqrt{\varepsilon\mu_0}$

$k_I = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} \quad k_{II} = +\sqrt{\omega\mu_0}$

(Vorzeichenwechsel muss konsistent mit späterer Rechnung sein)

b) $\vec{E} = Re\{\vec{E}_0 \cdot e^{j\omega t}\cdot e^{-jk_I z} + \vec{E}_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}\cdot e^{jk_{II} z}\}$

$= \vec{E}_0 \cdot Re\{e^{j\omega t}\cdot e^{-jk_I z} + e^{j\varphi} e^{j\omega t}\cdot e^{jk_{II} z}\}$

$= E_0 \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\omega t + k_{II} z + \varphi)\right]$

c) $\vec{E}(z = \frac{1}{3} l_z, t) = 0$ insbes. auch bei $t = 0$

$\Rightarrow \cos(-k_I z)|_{z=\frac{1}{3}l_z} + \cos(k_{II} z + \varphi)|_{z=\frac{1}{3}l_z} = 0$

$\Rightarrow$

$\cos(-k_I \cdot \frac{1}{3} l_z) + \cos(k_{II} \frac{1}{3} l_z + \varphi) = 0$

Die Phase beider cos-Fkt muss sich um $(2n+1)\pi$ $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ unterscheiden

$\varphi = -\frac{2}{3} l_z k_I + (2n+1)\pi$, da $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$-k_I \frac{1}{3} l_z = k_I \frac{1}{3} l_z + \varphi - (2n+1)\pi$ ← beliebig wie n

$\Rightarrow \varphi = (2n+1)\pi - k_I(\frac{1}{3} l_z + \frac{1}{3} l_z)$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{2}{3} l_z k_I + (2n+1)\pi$

Gesucht: $\vec{H}(z = \frac{1}{3} l_z, t)$ mit φ wie bestimmt

$\vec{H} = 2 \cdot \vec{H}_I = \frac{2}{Z}(\vec{e}_z \times \vec{B}_I)$

$= 2\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0 (\vec{e}_z \times \vec{e}_y)\cos(\omega t - k_I z)$

$= 2\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_0 (-\vec{e}_x)\cos(\omega t - k_I \cdot \frac{1}{3} l_z)$

d) $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\omega t + k_{II} z + \varphi)\right.$

$= E_0 \cdot \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\omega t + k_{II} z + (2n+1)\pi - \frac{2}{3} l_z k_I)\right]$

$= E_0 \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\pi + \omega t + k_{II} z - \frac{2}{3} l_z k_I)\right]$

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - k_I z) - \cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z)\right]$$

$$\vec{H} = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[(\vec{e}_z \times \vec{e}_y)\cos(\omega t - k_I z) - (-\vec{e}_z \times \vec{e}_y)\cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z))\right]$$

$$= E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[-\vec{e}_x \cos(\omega t - k_I z) - \vec{e}_x (\cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z))\right]$$

$$= -E_0 \cdot \vec{e}_x \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z))\right]$$

geht auch über $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -\mu_0 (j\omega) \vec{H}$

$$\vec{H} = -\frac{\operatorname{rot} \vec{E}}{j\omega}$$

e) $$U(z,t) = \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \vec{E} \cdot \vec{e}_y \cdot dy$$

$$= a E_0 \left[\cos(\omega t - k_I z) - \cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z))\right]$$

$I = ?$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$ // $\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint (\vec{J} + \dot{\vec{D}}) dA$

wegen TEM bzw $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$ und $d\vec{A} \parallel \vec{e}_z$

$\rightarrow \oint \vec{H} d\vec{l} = I$

Nur Beiträge innerhalb des Dielektrikums

Umlaufsinn $x = \frac{b}{2} \dots (-\frac{b}{2})$

$$I = \int_{+\frac{b}{2}}^{-b/2} \vec{H} \vec{e}_x \, dx = +b E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} \left[\cos(\omega t - k_I z) + \cos(\omega t + k_{II}(z - \tfrac{2}{3} l_z))\right]$$

a) $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = j\frac{1}{\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}$

$\nabla \times (E_x \vec{e}_x) = \frac{\partial}{\partial z} E_x \cdot \vec{e}_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \vec{e}_z$

$\vec{H}_e = j\frac{1}{\omega\mu_0} E_0 \left(-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 \sin(\delta k_1 y) \cdot e^{-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 z} \cdot \vec{e}_y \right.$

$\left. - k_1 \delta \cos(\delta k_1 y) \cdot e^{-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 z} \cdot \vec{e}_z \right)$

$= j\frac{1}{\omega\mu_0} E_0 e^{-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 z} \left(-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 \sin(\delta k_1 y)\vec{e}_y - k_1 \delta \cos(\delta k_1 y) \cdot \vec{e}_z \right)$

$\vec{H}_r = j\frac{1}{\omega\mu_0} E_{r0} e^{+j\sqrt{1-\delta^2}k_1 z} \left(+j\sqrt{1-\delta^2}k_1 \sin(\delta k_1 y)\vec{e}_y - k_1 \delta \cos(\delta k_1 y)\vec{e}_z \right)$

$\vec{H}_d = j\frac{1}{\omega\mu_0} E_{d0} e^{-j\sqrt{1-\delta_d^2}k_2 z} \left(-j\sqrt{1-\delta_d^2}k_2 \sin(\delta_d k_2 y)\vec{e}_y - k_2 \delta_d \cos(\delta_d k_2 y)\vec{e}_z \right)$

b) $\vec{S}_2(t) = \frac{1}{2} \text{Re}\{\vec{E}_d \times \vec{H}_d^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{|E_{d0}|^2 \frac{1}{\omega\mu_0} (\sin^2(\delta_d k_2 y)\sqrt{1-\delta_d^2}k_2$

E_{d0} kann komplex sein

$- j k_2 \delta_d \cos(\delta_d k_2 y)\sin(\delta_d k_2 y)\}(\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y)$

$\Rightarrow \vec{S}_2(t) = \frac{1}{2}|E_{d0}|^2 \frac{1}{\omega\mu_0} (\sin^2(\delta_d k_2 y)\sqrt{1-\delta_d^2}\, k_2 \vec{e}_z)$

c) $\sqrt{1-\delta_d^2} = 0 \Rightarrow \delta_d^2 = 1 \Rightarrow \delta_d = 1$

gemäß Aufgabenstellung: $\delta_d > 0$

d) E_{tan} ist stetig, H_{tan} ist stetig bei $z = 0$

$\Rightarrow$ alle exp-Terme 1

$E_{xe} + E_{xr} = E_{xd}$ ①

$E_{ye} + H_{yr} = H_{yd}$ ②

① $E_0 \sin(\delta k_1 y) + E_{r0} \sin(\delta k_1 y) = E_{d0} \sin(k_2 y)$

② $E_0 \left(-j\sqrt{1-\delta^2}k_1 \sin(\delta k_1 y)\right) + j\sqrt{1-\delta^2}k_1 \sin(\delta k_1 y) E_{r0} \overset{!}{=} 0$

wie $\sqrt{1-\delta_d^2} = 0$

$\Rightarrow E_0 = +E_{r0}$ in 1 einsetzen

$$E_{d0} = \frac{\sin(\delta k_1 y)}{\sin(k_2 y)} \cdot 2E_0 \qquad \left[\text{muss für alle } y \text{ gelten}\right]$$

$\Rightarrow \sin(\delta k_1 y) = \sin(k_2 y)$

$\Rightarrow \delta k_1 = k_2$

$\Rightarrow \delta = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \left[\frac{\sin(c \cdot y)}{\sin(c \cdot y)} = 1\right]$

$\Rightarrow E_{d0} = 2 \cdot E_0$

c) $E_d(t) = 2 \cdot E_0 \sin(k_2 y)\, \mathrm{Re}\{e^{-j \cdot 0 \cdot z + j\omega t}\}\vec{e}_x - 2 \cdot E_0 \sin(k_2 y)\vec{e}_x \cos(\omega t)$

$\vec{H}_d(t) = \mathrm{Re}\{\vec{H}_d(t)\} = \mathrm{Re}\left\{j\frac{1}{\omega\mu_0} \cdot 2 \cdot E_0\, e^{-j \cdot 0 \cdot z + j\omega t} \cdot (-k_2 \cos(\delta k_2 y)) \cdot \vec{e}_z\right\}$

$= + \frac{k_2}{\omega\mu_0} \cdot 2 \cdot E_0 \cdot \cos(k_2 y) \cdot \sin(\omega t)\, \vec{e}_z$

mit $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \frac{k_2}{\omega\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_F}$

$H_d(t) = \frac{1}{Z_F} \cdot 2 \cdot E_0 \cdot \cos(k_2 y) \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_z$

$\vec{S}_2(t) = \vec{E}_d \times \vec{H}_d = \frac{4E_0^2}{Z_F} \cdot \cos(k_2 y) \sin(k_2 y) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_z)}_{-\vec{e}_y}$

- mit $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$\vec{S}_2(t) = -\frac{E_0^2}{Z_F} \sin(2k_2 y) \sin(2\omega t)\, \vec{e}_y$

$$\underline{E}_x = 0$$

$$\underline{E}_y = -\frac{\partial f}{\partial z} = j\beta \tilde{f} e^{-j\beta z}$$

$$\underline{E}_z = 0$$

$$\underline{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu}\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = \frac{\beta^2}{j\omega\mu} \tilde{f} e^{-j\beta z}$$

$$\underline{H}_y = 0$$

$$\underline{H}_z = -\frac{\beta}{\omega\mu}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\beta}{\omega\mu}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} e^{-j\beta z}$$

$$\tilde{f}'' + p_i^2 \tilde{f} = 0$$

$$p_i^2 = k_i^2 - \beta^2$$

a) $\Delta \underline{f}_i + k_i^2 \underline{f}_i = 0$ mit $k_i^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu_0 = \varepsilon_{ri} k_0^2$

$\Delta_{tr} \underline{\tilde{f}}_i + p_i^2 \underline{\tilde{f}}_i = 0$ mit $p_i^2 = k_i^2 - \beta^2$

$$\boxed{\underline{\tilde{f}}_i'' + p_i^2 \underline{\tilde{f}}_i = 0}$$

$$\underline{\tilde{f}}_1(x) = \underline{A}_1 \cos(p_1 x) + \underline{B}_1 \sin(p_1 x)$$

$$\underline{\tilde{f}}_2(x) = \underline{A}_2 \cdot \cos(p_2 (2a - x)) + \underline{B}_2 \sin(p_2 (2a - x))$$

b) magnetische Wände bei $x = 0$ und $x = 2a$

$$\vec{H}_{tan} = 0$$

$$\underline{H}_{1z}(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B}_1 = 0$$

$$\underline{H}_{2z}(x = 2a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B}_2 = 0$$

$$H_{1z}(x) = \frac{\beta}{\omega\mu_0} p_1 (\underline{A}_1 \sin(p_1 x) - \underline{B}_1 \cos(p_1 x)) e^{-j\beta z}$$

$$H_{2z}(x) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} p_2 (\underline{A}_2 \sin(p_2 (2a - x)) - \underline{B}_2 \cos(p_2 (2a - x))) e^{-j\beta z}$$

c) Stetigkeitsbedingungen bei $x = a$

$$\underline{E}_{1tan} = \underline{E}_{2tan} \qquad \underline{H}_{1tan} = \underline{H}_{2tan}$$

$$\underline{E}_{1y}(x = a) = \underline{E}_{2y}(x = a)$$

$$\underline{H}_{1z}(x = a) = \underline{H}_{2z}(x = a)$$

$$\underline{A}_1 \cos(p_1 a) = \underline{A}_2 \cos(p_2 a)$$

$$p_1 \underline{A}_1 \sin(p_1 a) = -p_2 \underline{A}_2 \sin(p_2 a)$$

$$\boxed{p_1 \tan(p_1 a) = -p_2 \tan(p_2 a)}$$

d) $\omega = v_{phase} \cdot \beta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda_\beta}$

$$p_i \cdot a = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{r,eff}}\, a = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_{ri}}{\varepsilon_{r,eff}} - 1}\, \frac{a}{\lambda_\beta}$$

Näherung: ω klein

$$p_1^2 = -p_2^2 \quad \text{mit} \quad p_i^2 = (\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{r,eff}) k_0^2$$

$$\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r,eff} = -(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r,eff})$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{r,eff} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$$

Quasi TEM Welle

$$H_{iz} \sim \frac{\beta}{\omega} p_i = \frac{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}}{\omega} \cdot \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{ri} - \varepsilon_{r,eff}}$$

$H_i \sim \omega$

also $H_{iz} \to 0$ für $\omega \to 0$

$E_{iz} = 0$

$$v_{phase} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}}$$

v_{phase} ist unabhängig von ω (Grenzfrequenz $\omega_c = 0$)

Grenzfrequenz $\beta(\omega_c) = 0 \Rightarrow \omega_c = 0$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}} = v_{phase}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_{eff}} \qquad \frac{d\beta}{d\omega} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_{eff}}$$

e) $\underline{\vec{S}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* = \underline{E}_y \vec{e}_y \times (\underline{H}_x^* \vec{e}_x + \underline{H}_z^* \vec{e}_z) = \underline{E}_y \underline{H}_x^* (-\vec{e}_z) + \underline{E}_y \underline{H}_z^* \vec{e}_x$

$S_x = E_y \cdot H_z^*$

<u>Bereich 1:</u> $E_{1y} = j\beta \underline{A}_1 \cos(p_1 x) e^{-j\beta z}$

$$H_{1z}^* = \left(\frac{\beta}{\omega\mu} \underline{A}_1^* p_1 \sin(p_1 x) e^{j\beta z}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{S}_{1x} = j \frac{\beta^2}{\omega\mu} |\underline{A}_1|^2 p_1 \sin(p_1 x)\cos(p_1 x) \Rightarrow \overline{S}_{1x} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\underline{S}_{1x}\} = 0$$

Bei der betrachteten TE_x Welle findet im zeitlichen Mittel im Bereich 1 kein Leistungstransport in x-Richtung statt. Durch die mag. Wand bei $x = 0$ kann wegen $H_{tan} = 0$ keine Leistung hindurchtreten.

Klausur FOG

Aufgabe 4

a) Ports 2 and 3 are terminated with Z_0 and an RF source with internal impedance Z_0 is connected at port 1. The impedance seen at port 1 is:

$$Z_{in} = \frac{1}{3}Z_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Z_0 + Z_0\right) = Z_0$$

Therefore: $\underline{S}_{11} = 0$

b) Remember that $a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_i}{\sqrt{Z_0}} + \sqrt{Z_0}\,\underline{I}_i\right)$

and $b_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_i}{\sqrt{Z_0}} - \sqrt{Z_0}\,\underline{I}_i\right)$

$$\underline{S}_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} = \frac{\underline{U}_2 - Z_0\underline{I}_2}{\underline{U}_1 + Z_0\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \cdot \frac{\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} - Z_0}{\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} - Z_0} = -\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$$

da $-\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = Z_0$ und $\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = Z_0$

The current $\underline{I}_2$ can be calculated by means of current division or just by symmetry.

$$-\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{Z_0 + \frac{1}{3}Z_0}{2\left(Z_0 + \frac{1}{3}Z_0\right)} = \frac{1}{2}\underline{I}_1$$

Therefore $\underline{S}_{21} = \frac{1}{2}$

Second way of solving the problem:

$\underline{S}_{21} = \frac{\underline{U}_2^-}{\underline{U}_1^+}$ where $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^+ + \underline{U}_1^-$ and $\underline{U}_2 = \underline{U}_2^+ + \underline{U}_2^-$

Since the divider is matched at all ports $\underline{U}_1^- = 0$ and $\underline{U}_2^- = 0$. Therefore $\underline{S}_{21} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$.

By voltage division:

$\underline{U}_p = \frac{2}{3}\underline{U}_1$ and $\underline{U}_2 = \frac{3}{4}\underline{U}_p \Rightarrow \underline{U}_2 = \frac{1}{2}\underline{U}_1$

Therefore $\underline{S}_{21} = \frac{1}{2}$

c) $P_{RP1} = 1\,W \hat{=} 30\,dBm$

The transmission loss of the divider is -6dB (a quarter of the power that enters port 1 gets out of port 2).

$P_2 = |\underline{S}_{21}|^2 P_1$

$P_{RP3} = 30\,dBm - 6dB + G_{amp} = 50\,dBm$

$\Rightarrow G_{amp} = 26\,dB$

also $G = \frac{100W}{0,25W} = 400$

e) S-parameters of transmission line of length ℓ_x:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta_x} \\ e^{-j\theta_x} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{with } \theta_x = \beta \ell_x$$

f) S-Parameters of combiner and transmission line:

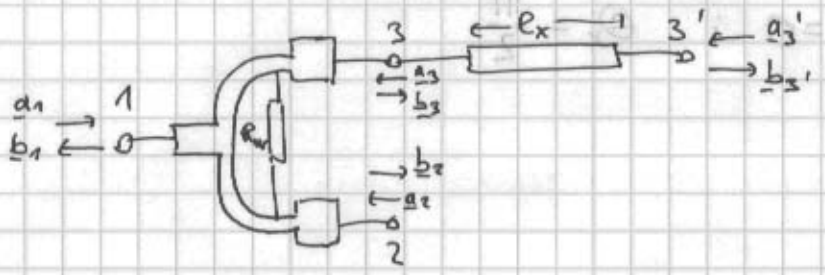
Let's write the following two relations:

$$\underline{a}_3 = \underline{a}_{3'} e^{-j\theta_x} \quad \text{and} \quad \underline{b}_{3'} = \underline{b}_3 e^{-j\theta_x} = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 e^{-j\theta_x}$$

Knowing this, it's possible to write the full matrix as follow:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -j & -je^{-j\theta_x} \\ -j & 0 & 0 \\ -je^{-j\theta_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$-je^{-j\theta_x} = e^{-j(\theta_x + \frac{\pi}{2})}$$



g) Reflected waves $\underline{a}_2$ and $\underline{a}_3$:

$$\underline{b}_2 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{a}_2 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 \underline{\Gamma}_x$$

$$\underline{b}_3 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 \quad \text{and} \quad \underline{b}_{3'} = \underline{b}_3 e^{-j\theta_x} = \frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 e^{-j\theta_x}$$

$$\Rightarrow \underline{a}_{3'} = \underline{b}_{3'} \underline{\Gamma}_x = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 e^{-j\theta_x} \underline{\Gamma}_x$$

but $\underline{a}_3 = \underline{a}_{3'} e^{-j\theta_x}$

therefore $\underline{a}_3 = -\frac{j}{\sqrt{2}} \underline{a}_1 e^{-j2\theta_x} \underline{\Gamma}_x$

h) Reflected wave $\underline{b}_1$:

$$\underline{b}_1 = -\frac{j}{\sqrt{2}}(\underline{a}_2 + \underline{a}_3) = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j2\theta_x}\right)\underline{a}_1 \sqrt{x}$$

i) Electrical length of the line θ for which $\underline{b}_1 = 0$:

Making $1 + e^{-j2\theta_x} = 0$ or $e^{-j2\theta_x} = -1$.

This can be written:

$$\cos(2\theta_x) - j\sin(2\theta_x) = -1 + j0$$

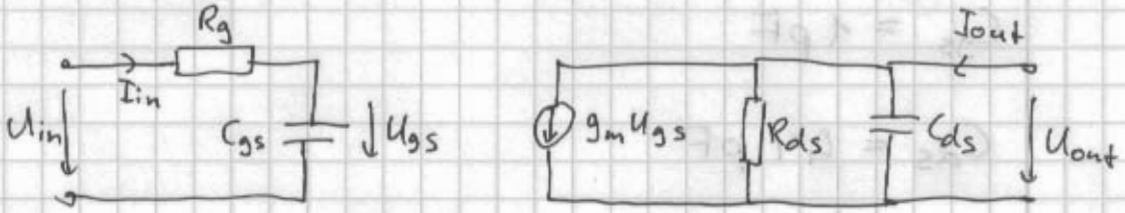
This is fulfilled when:

$$2\theta_x = \pm(2n+1)\pi \Leftrightarrow \theta_x = \pm\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

e.g. for $n = 0$: $\theta_x = \frac{\pi}{2}$

Klausur FOG
Aufgabe 5
(ohne Smith-Chart!)

a)



$S_{11} \Rightarrow z_{in} = 0{,}1 - j2$

$\Rightarrow z_{in} = 5\Omega - j2\Omega$

$\Rightarrow R_g = 50\Omega \cdot 0{,}1 = 5\Omega$

$\Rightarrow C_{gs} = \frac{1}{10 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 50} = 1\,pF$

$S_{22} \Rightarrow z_{22} = 0{,}1 + j0{,}2$

$\Rightarrow \frac{1}{z_{out}} = 2\,mS + j4\,mS$

$\Rightarrow R_{ds} = 500\Omega$

$\Rightarrow C_{ds} = 0{,}4\,pF$

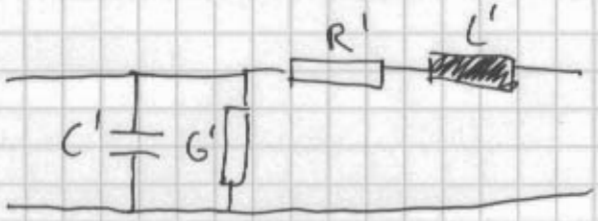
b) $H_{21} = \left|\frac{I_{out}}{I_{in}}\right| = \frac{U_{gs} \cdot g_m}{|I_{in}|} = \frac{g_m}{\omega C_{gs}} = \frac{0{,}05 \cdot 2\pi}{2\pi f_T \cdot 1pF} = 1$

$\Rightarrow f_T > \frac{0{,}05\,S}{1\,pF} = 50\,GHz$

c) $u = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{(\frac{1}{2} g_m U_{gs})^2 R_{ds}}{R_g (U_{gs} \omega C_{gs})^2} \Rightarrow$ ~~f_{max}~~

$\Rightarrow f_{max} = \frac{g_m}{2\pi \cdot 2 C_{gs}} \sqrt{\frac{R_{ds}}{R_g}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}05}{2\pi \cdot 2 \cdot 1pF} \sqrt{\frac{500}{5}} = 250\,GHz$

d)



Tiefpassverhalten

e) $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

f) Verlustlos $\Rightarrow$ keine Widerstände

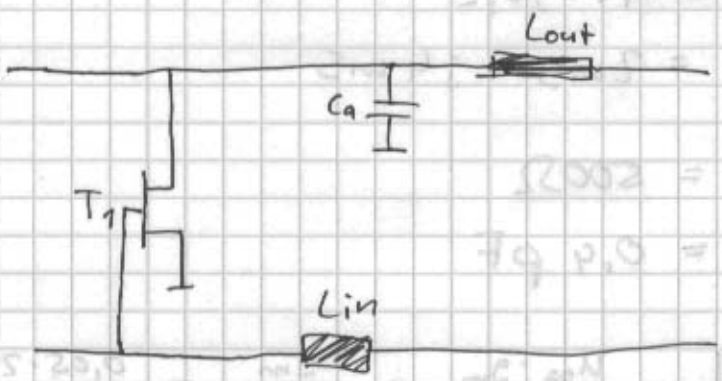
$C_{gs} = 1\,pF$

$C_{ds} = 0{,}4\,pF$

g) $L_g = Z_0^2 C_{gs} = 2500 \cdot 1pF = 2{,}5\,nH$

h) Größere Kapazität erforderlich, d.h. zusätzlicher Kondensator C_a parallel zum Transistorausgang.

$C_a = C_{gs} - C_{ds} = 1\,pF - 0{,}4pF = 0{,}6\,pF$



i) Sie müssen die gleiche Phasengeschwindigkeit haben, damit sich die Wellen am Ausgang der Transistoren konstruktiv überlagern.

EMF - F09

Aufgabe 6:

a) $\underline{Z}_{22} = (1{,}8 - j0{,}3) \cdot 75\,\Omega = (135 - j22{,}5)\,\Omega$

$$\underline{S}_{22} = \frac{\underline{Z}_{22} - Z_0}{\underline{Z}_{22} + Z_0}$$

b) Konz. Bauelement: Serienwiderstand

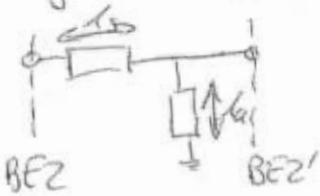
Anpassung: 1. Möglichkeit: $l_{an1} = 0{,}065\lambda$, $R_{s1} = 0{,}9 \cdot 75\,\Omega = 67{,}5\,\Omega$

2 " : $l_{an2} = 0{,}315\lambda$, $R_{s2} = 1{,}7 \cdot 75\,\Omega = 127{,}5\,\Omega$

Abschluss: KS

c) Nachteile: verlustbehaftet und mehr Rauschen

Anpassung mit verlustloser Serienleitung mit Wellenwiderstand $Z_{an} = 75\,\Omega$ ist möglich.



d) Kurzgeschl. Stichleitung der Länge $l_y = \frac{\lambda}{4}$ bei $f = f_0$

keinen Einfluss Leitung d. Länge $l_x = \frac{\lambda}{8}$ bewirkt Phasendrehung

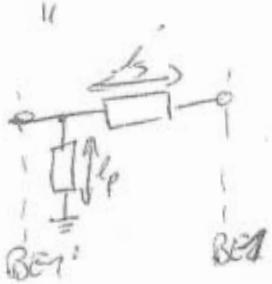
$$\underline{\Gamma}_a' = \underline{\Gamma}_a \cdot e^{-j2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8}} = \underline{\Gamma}_a \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

Hier: $\underline{\Gamma}_a = 0 \Rightarrow \underline{\Gamma}_a' = 0$

e) Bei $f = 2f_0$ wirkt die Leitung als Kurzschluss da $l = \frac{\lambda}{2}$.

Bei $f = 0$ " " " " "

f) $l_s = 0{,}2515\lambda$, $l_p = 0{,}1095\lambda$



g) $l_s = 0$, $l_p = 0{,}125\lambda$

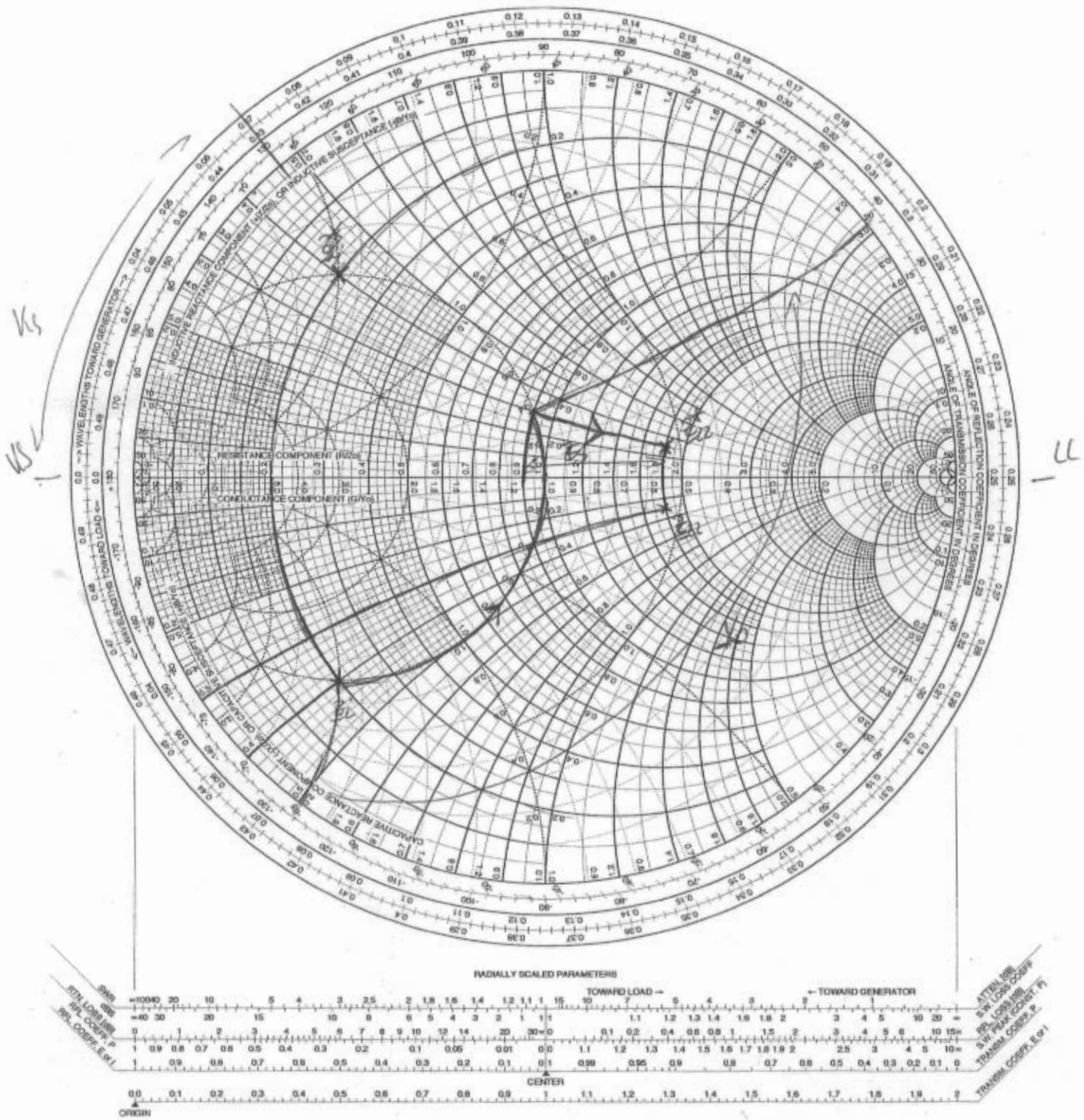
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr.–Ing. Andrei Vescan

Frühjahr 2009

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt b)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



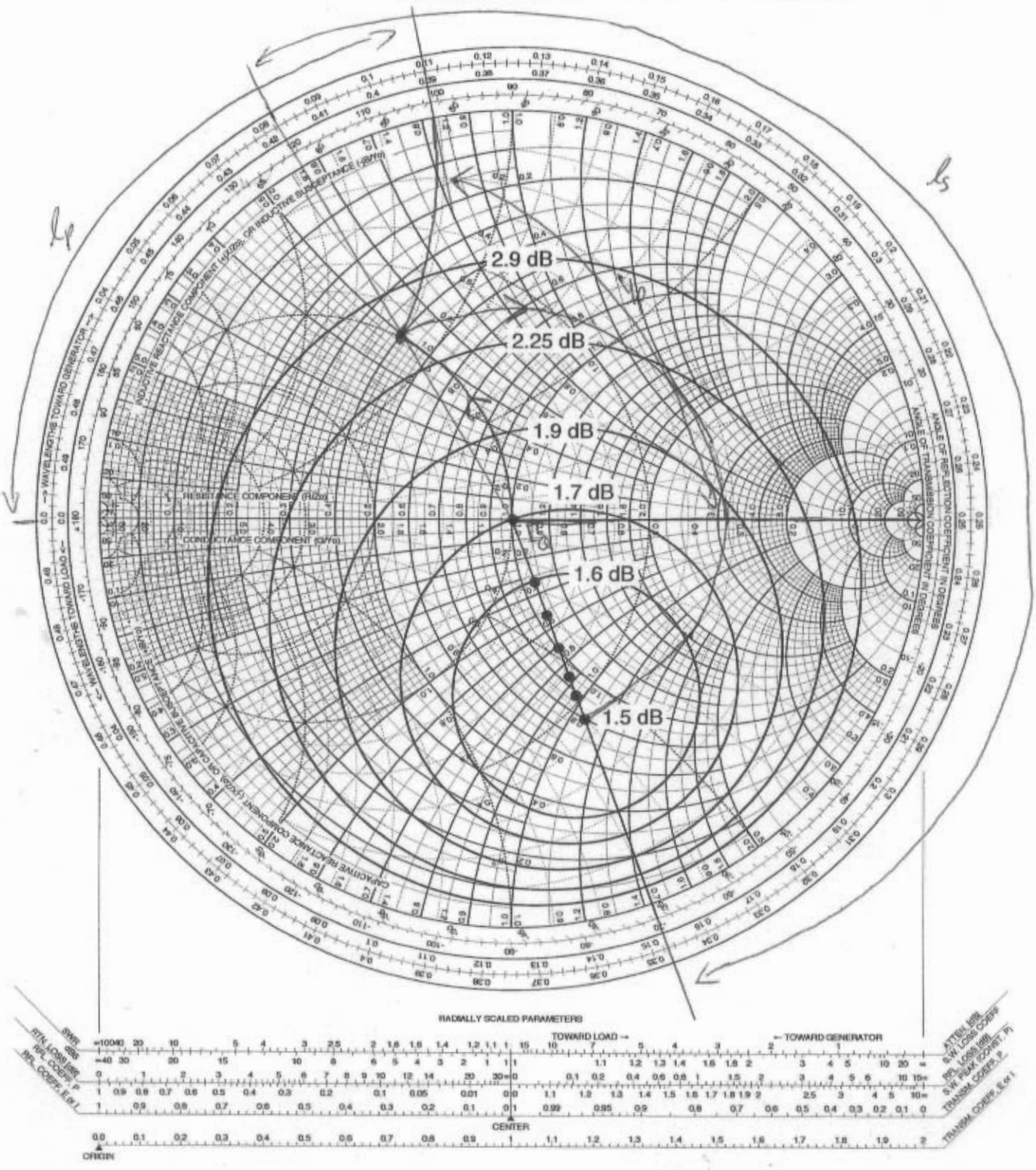
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr.–Ing. Andrei Vescan

Frühjahr 2009

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt f)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



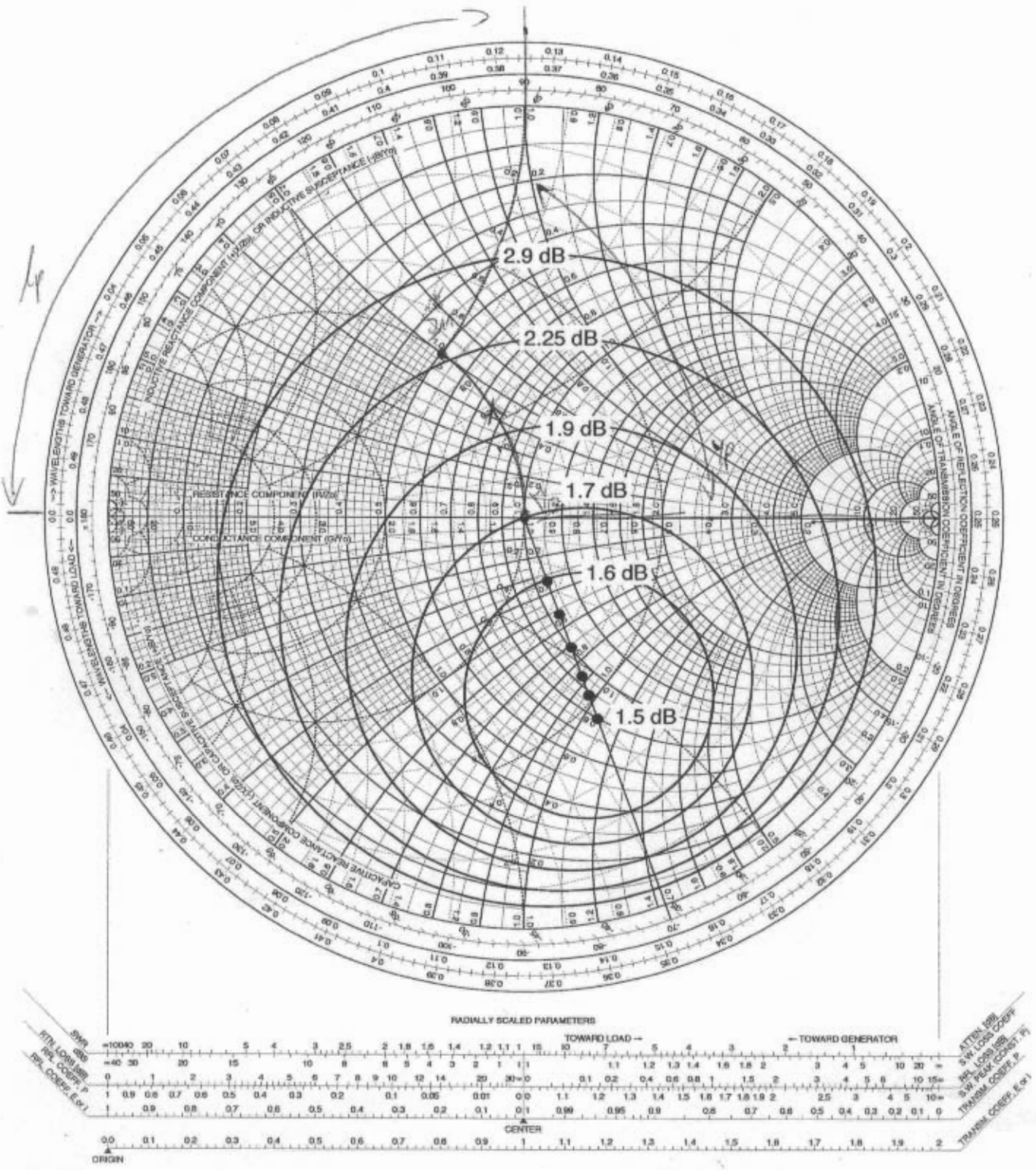
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr.–Ing. Andrei Vescan

Frühjahr 2009

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt g)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



a) $l_z = 10m \quad \varepsilon_r = 4, \quad \omega = 2\pi \cdot 10^7 \frac{1}{s}$

elektr. Länge: $\frac{l_z}{\lambda} = \frac{l_z f}{c} = \frac{l_z}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{\omega}{2\pi}$

$= \frac{10m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{3} \approx 1$

b) $\vec{k} = \vec{e}_z \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$

$\underline{\vec{E}}(\rho, \varphi, z) = \underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi)\, e^{-j\vec{k}\vec{e}_z z} = \underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi)\, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} z}$

c) $= \underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi)\, e^{-j\frac{2\pi}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}\frac{\omega}{2\pi} z}$

$= \underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi) \cdot e^{-j\,\omega\sqrt{\varepsilon_r}/c_0 \cdot z}$

d) $\Delta_{2D}\,\underline{\Phi}(\rho, \varphi, z=0, t) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}}_{=0 \text{ wg. TEM-Welle (rotationssymmetrisch)}}$

Ansatz $\underline{\Phi}(\rho, \varphi, z=0, t) = const_1 + const_2 \ln(\rho)\, h(t)$ ist Lösung der DGL

e) $\underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi)$ gesucht

$\underline{\Phi}(\rho, \varphi, z=0, t) = const_2 \cdot \ln(\rho)\, h(t) + const_1$

Es gilt bei $z = 0$:

$\underline{\Phi}(\rho = r_i, \varphi, z=0, t) - \underline{\Phi}(\rho = r_a, \varphi, z=0, t) = U_0 \sin\omega t$ (*)

$\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi) \cdot e^{j\omega t}\} = -\nabla \Phi(\rho, \varphi, z=0, t)$

(*) $const_2 \cdot \ln\left(\frac{r_i}{r_a}\right) h(t) = U_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow const_2 = \frac{U_0}{\ln \frac{r_i}{r_a}}$ und $h(t) = \sin\omega t$

$\Rightarrow \underline{\Phi} = -\frac{U_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \ln(\rho)\, \sin\omega t$

$\mathrm{Re}\{\underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi) \cdot e^{j\omega t}\} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho = \frac{U_0}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{e}_\rho \cdot \sin\omega t$

$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_1(\rho, \varphi) = -j\,\frac{U_0}{\ln(r_a/r_i)}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho \Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 e^{-j\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r} z}}$

f) $l_z = 1m \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{s}$

$$\frac{l_z}{\lambda} = \frac{l_z}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r}\,\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1m}{3\cdot 10^8 \frac{m}{s}} \cdot 2\cdot 10^5 \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{3}\cdot 10^{-3} \ll 1$$

$$\vec{E}(\rho,\varphi,z,t) = Re\{\vec{E}\cdot e^{j\omega t}\}$$

$$= Re\left\{-j\frac{U_0}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vec{e}_\rho\, e^{-jkz+j\omega t}\right\}$$

$$= \frac{U_0}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\cdot\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho\, Re\{-j(\cos(\omega t - kz) + j\sin(\omega t - kz))\}$$

$$= \frac{U_0}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\cdot\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho\,\sin(\omega t - \underbrace{kz}_{\ll 1 \text{ da } \frac{l_z}{\lambda} \ll 1})$$

$$\approx \frac{U_0}{\ln\frac{r_a}{r_i}}\cdot\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\rho\,\sin\omega t$$

A2 H06

a) $E(z) = \frac{U_0}{h} \exp(-jkz)\ \vec{e}_x$

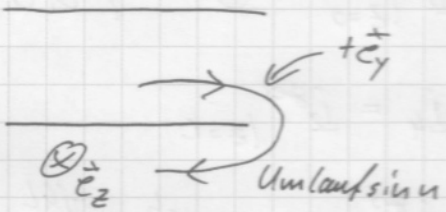
$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$; U_0 reelle Konstante

$$\underline{\vec{H}}(z) = \frac{1}{Z_F}(\vec{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{n} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{e}_z \times \vec{e}_x)\frac{U_0}{h} e^{-jkz}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{e}_y \cdot \frac{U_0}{h} \cdot e^{-jkz}$$

b) $U_1^h(z) = \int_{P_1}^{P_2} E(z)\, d\vec{r}$

$U_1^h(z) = U_0\, e^{-jkz}$



$\underline{i}_1^h(z) = ?$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \vec{D}$ $\quad \oint \vec{H}\, d\vec{s} = \underline{i}$ $\quad \rightarrow\ b \cdot H(z) = \underline{i}$

$$\Rightarrow\ \underline{i}_1^h(z) = b\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{U_0}{h}\, e^{-jkz}$$

$$Z_L = \frac{\underline{U}_1^h}{\underline{i}_1^h} = \frac{h}{b}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}^{-1} = Z_F\frac{h}{b}$$

c) $\underline{z=0}$ $\quad \underline{U}_1^h + \underline{U}_1^r = \underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r$ $\quad (\text{mit } U_y^x = U_y^x \cdot e^{\pm jkz})$ (1)

$$-\underline{i}_r^1 + \underline{i}_1^h - \underline{i}_2^h - \underline{i}_2^r + \underline{i}_R = \underline{i}_2^h - \underline{i}_2^r + \frac{\underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r}{R} \quad (2)$$

$\underline{z=L}$: $\quad \underline{U}_2^h \cdot e^{-jkL} = -\underline{U}_2^r\, e^{+jkL}$ (3)

d) $l_{min} = \frac{\lambda}{4}$ und $\underline{U}_1^r = 0$

$\Rightarrow\ \underline{U}_1^h = \underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r$ (1)

$$\frac{\underline{U}_1^h}{Z_L} = \frac{\underline{U}_2^h}{Z_L} - \frac{\underline{U}_2^r}{Z_L} + \frac{\underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r}{R} \quad (2)$$

$\underline{U}_2^h(-j) = -\underline{U}_2^r \cdot j \ \Rightarrow\ \underline{U}_2^h = +\underline{U}_2^r$ (3)

$$e^{jk\frac{\lambda}{4}} = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = \cos\tfrac{\pi}{2} - j\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -j$$

$$e^{jk\lambda/4} = j$$

$\underline{U}_1^h = \underline{U}_2^h + \underline{U}_2^r \Rightarrow \underline{U}_1^h = U_0 = 2 \cdot \underline{U}_2^h$ (1) + (3)

(2) $\frac{\underline{U}_1^h}{Z_L} = \frac{U_0}{Z_L} = \frac{\underline{U}_2^h}{Z_L} - \frac{\underline{U}_2^r}{Z_L} + \frac{\underline{U}_2^h - \underline{U}_2^r}{R}$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{Z_L} = \frac{\underline{U}_2^h}{Z_L} - \frac{\underline{U}_2^h}{Z_L} + \frac{\underline{U}_2^h + \underline{U}_2^h}{R} \quad \Rightarrow U_0 = \frac{2\underline{U}_2^h}{R} Z_L$$

mit (1) folgt: $\boxed{R = Z_L}$

$$\underline{H}_{x1} = \frac{\beta^2}{j\omega\mu_0}\left(\underline{B}_1 \sin(\underline{k}_{x1}\cdot x)\right) e^{-j\beta z} \qquad \left(k_1^2 + \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\underline{f}_1 = \beta^2 \underline{f}_1$$

$$H_{x1} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \equiv 0 \qquad \text{da} \quad f_1(x,z)$$

$$\underline{H}_{z1} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0}\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\beta \underline{k}_{x1}}{\omega\mu_0}\left(B_1 \cos(\underline{k}_{x1} x)\right) e^{-j\beta z}$$

Gebiet 2 $\quad \underline{E}_{x2} \equiv 0 \qquad \underline{E}_{z2} \equiv 0 \qquad H_{y2} \equiv 0$

$$\underline{E}_{y2} = j\beta\, B_2 \sin(\underline{k}_{x2}(2h-x))\, e^{-j\beta z}$$

$$\underline{H}_{x2} = \frac{\beta^2}{j\omega\mu_0}\underline{B}_2 \sin(\underline{k}_{x2}(2h-x))\, e^{-j\beta z}$$

$$\underline{H}_{z2} = -\frac{\beta \underline{k}_{x2}}{\omega\mu_0}\left(-\underline{B}_2 \cos(\underline{k}_{x2}(2h-x))\, e^{-j\beta z}\right.$$

c) Stetigkeit bei $x=h$: $\underline{\vec{E}}_{tan1} = \underline{\vec{E}}_{tan2}$ und $\underline{\vec{H}}_{tan1} = \underline{\vec{H}}_{tan2}$

$\underline{E}_{y1}(x=h) = \underline{E}_{y2}(x=h) \Rightarrow \underline{B}_1 \sin(\underline{k}_{x1} h) = \underline{B}_2 \sin(\underline{k}_{x2} h)$

$E_{z1}(x=h) = E_{z2}(x=h) \equiv 0$ ✓ $\qquad \underline{H}_{y1}(x=h) = \underline{H}_{y2}(x=0) \equiv 0$ ✓

$$\underline{H}_{z1}(x=h) = \underline{H}_{z2}(x=h) \Rightarrow -\underline{k}_{x1}\underline{B}_1 \cos(\underline{k}_{x1} h) = \underline{k}_{x2} B_2 \cos(\underline{k}_{x2} h)$$

Charakteristische Gl. ↙ oder mit tan(·) und Kehrwert

$$\underline{k}_{x1} \cot(\underline{k}_{x1} h) = -\underline{k}_{x2} \cot(\underline{k}_{x2} h) \qquad \text{mit } \underline{k}_{xi}^2 = k_i^2 - \beta^2$$

d) Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \qquad k_1 = k_2 \qquad k_{x1} = k_{x2} \neq 0$

Charakteristische Gl.:

$$k_{x1} \cot(k_{x1} h) = -k_{x2} \cot(k_{x2} h)$$

da $k_{x1} = k_{x2}$: $\quad = -k_{x1} \cot(k_{x1} h)$

$$\Rightarrow k_{x1} \cot(k_{x1} h) = 0 \Rightarrow \cot(k_{x1} h) = 0 \quad \text{da } k_{x1} \neq 0$$

$$\Rightarrow k_{x1} = \pm\frac{\pi}{2h};\ \pm\frac{3\pi}{2h};\ \pm\frac{5\pi}{2h};\ \ldots$$

andere char. Gl.: $k_{x2} \tan(k_{x1} h) = -k_{x1} \tan(k_{x2} h)$

$\Rightarrow \tan(k_{x1} \cdot h) = 0$ (analog wie oben) $\Rightarrow k_{x1} = 0;\ \pm\frac{\pi}{h};\ \pm\frac{2\pi}{h};\ \pm\frac{3\pi}{h}$

Für TEx Grundwelle TEx10 $\quad k_{x1} = k_{x2} = \frac{\pi}{2h}$

Grenzfrequ: ω_c mit $\beta(\omega_c) = 0$: $k_{x1}^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_1^2 = \omega_c^2 \varepsilon_1 \mu_0$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}$$

A3

a) TE_x Hybridwelle : $(\underline{E}_x = 0)$

$\underline{\vec{F}}_i = f_i(x,z)\,\vec{e}_x = \underline{\tilde{f}}_i(x)\, e^{-j\beta z}\,\vec{e}_x \qquad i = 1,2$

$\underline{\vec{G}}_i = 0 \qquad \Rightarrow \underline{E}_x = 0$

mit $\beta^2 = \omega^2 \varepsilon_{eff}(\omega)\mu_0$, $\quad k_i^2 = \omega^2 \varepsilon_i \mu_0$

Helmholtz Gl.: mit $k_{xi}^2 = k_i^2 - \beta^2$

$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 + k_i^2\right)\underline{\tilde{f}}_i(x) = 0 \;(=)\; \left(\frac{d^2}{dx^2} + \underline{k}_{xi}^2\right)\underline{\tilde{f}}_i(x) = 0$

$\underline{\tilde{f}}_1(x) = B_1 \sin(\underline{k}_{x1} x)$

$\underline{\tilde{f}}_2(x) = B_2 \sin(k_{x2}(2h - x))$

b) Gebiet 1: Randbed.: $\underline{\vec{E}}_{tan1} = 0$ und $\underline{\vec{H}}_{n1} = 0$

$E_{x1}(y=0) = 0$ ✓ $\quad E_{x1}(y=b) = 0$ ✓

$E_{z1}(y=0) = 0$ ✓ $\quad E_{z1}(y=b) = 0$ ✓

$E_{y1}(y=0) = 0$ ✓ $\quad E_{y1}(y=b) = 0$ ✓

$E_{y1}(x=0) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$

$E_{z1}(x=0) = 0$ ✓

$E_{x1}(x=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ ✓

Gebiet 2: Randbed: $\underline{\vec{E}}_{tan2} = 0$ und $\underline{H}_{n2} = 0$

$\Rightarrow \underline{E}_{x2}(y=0) = 0$ ✓ $\quad \underline{E}_{x2}(y=b) = 0$ ✓

$\underline{E}_{z2}(y=0) = 0$ ✓ $\quad \underline{E}_{z2}(y=b) = 0$ ✓

$\underline{E}_{y2}(y=0) = 0$ ✓ $\quad \underline{H}_{y2}(y=b) = 0$ ✓

$\underline{E}_{y2}(x=2h) = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$

$\underline{E}_{z2}(x=2h) = 0$ ✓

$\underline{E}_{x2}(x=2h) = 0 \Rightarrow \underline{A}_2 = 0$ ✓

Gebiet 1: $\underline{E}_{x1} \equiv 0$ da $g_1 = 0$

$\underline{E}_{y1} = -\frac{\partial \underline{H}_1}{\partial z} = j\beta \underline{f}_1$

$\underline{E}_{y1} = j\beta \underline{B}_1 \sin(\underline{k}_{x1} x)\, e^{-j\beta z}$

$\underline{E}_{z1} = \frac{\partial \underline{H}_1}{\partial y} = 0$ da $f_1(x,z)$

$\underline{H}_{x1} = \frac{\beta^2}{j\omega\mu_0} \left(\underline{B}_1 \sin(\underline{k}_{x1} \cdot x) \right) e^{-j\beta z}$ $\quad \left(k_1^2 + \frac{\partial}{\partial x^2}\right) \underline{f}_1 = \beta^2 \underline{f}_1$

$H_{x1} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \equiv 0$ $\quad$ da $f_1(x,z)$

$\underline{H}_{z1} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\beta \underline{k}_{x1}}{\omega\mu_0} \left(B_1 \cos(\underline{k}_{x1} x) \right) e^{-j\beta z}$

Gebiet 2 $\quad \underline{E}_{x2} \equiv 0 \quad \underline{E}_{z2} \equiv 0 \quad H_{y2} \equiv 0$

$\underline{E}_{y2} = j\beta \; B_2 \sin(\underline{k}_{x2}(2h-x)) \, e^{-j\beta z}$

$\underline{H}_{x2} = \frac{\beta^2}{j\omega\mu_0} \underline{B}_2 \sin(\underline{k}_{x2}(2h-x)) \, e^{-j\beta z}$

$\underline{H}_{z2} = -\frac{\beta \underline{k}_{x2}}{\omega\mu_0} \left(-\underline{B}_2 \cos(\underline{k}_{x2}(2h-x)) \right) e^{-j\beta z}$

c) Stetigkeit bei $x=h$: $\underline{\vec{E}}_{tan1} = \underline{\vec{E}}_{tan2}$ und $\underline{\vec{H}}_{tan1} = \underline{\vec{H}}_{tan2}$

$\underline{E}_{y1}(x=h) = \underline{E}_{y2}(x=h) \Rightarrow \underline{B}_1 \sin(\underline{k}_{x1} h) = \underline{B}_2 \sin(\underline{k}_{x2} h)$

$E_{z1}(x=h) = E_{z2}(x=h) \equiv 0$ ✓ $\qquad \underline{H}_{y1}(x=h) = \underline{H}_{y2}(x=0) \equiv 0$ ✓

$\underline{H}_{z1}(x=h) = \underline{H}_{z2}(x=h) \Rightarrow -\underline{k}_{x1} \underline{B}_1 \cos(\underline{k}_{x1} h) = \underline{k}_{x2} B_2 \cos(\underline{k}_{x2} h)$

Charakteristische Gl. ↙ oder mit tan(·) und Kehrwert

$\underline{k}_{x1} \cot(\underline{k}_{x1} h) = -\underline{k}_{x2} \cot(\underline{k}_{x2} h)$ $\quad$ mit $\underline{k}_{xi}^2 = k_i^2 - \beta^2$

d) Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $\quad k_1 = k_2$ $\quad k_{x1} = k_{x2} \neq 0$

Charakteristische Gl.:

$k_{x1} \cot(k_{x1} h) = -k_{x2} \cot(k_{x2} h)$

da $k_{x1} = k_{x2}$: $\quad = -k_{x1} \cot(k_{x1} h)$

$\Rightarrow k_{x1} \cot(k_{x1} h) = 0 \Rightarrow \cot(k_{x1} h) = 0$ $\quad$ da $k_{x1} \neq 0$

$\Rightarrow k_{x1} = \pm \frac{\pi}{2h}; \pm \frac{3\pi}{2h}; \pm \frac{5\pi}{2h}; \ldots$

andere char. Gl.: $k_{x2} \tan(k_{x1} h) = -k_{x1} \tan(k_{x2} h)$

$\Rightarrow \tan(k_{x1} \cdot h) = 0$ (analog wie oben) $\Rightarrow k_{x1} = 0; \pm \frac{\pi}{h}; \pm \frac{2\pi}{h}; \pm \frac{3\pi}{h}$

Für TEx Grundwelle (TEx10) $\quad k_{x1} = k_{x2} = \frac{\pi}{2h}$

Grenzfrequ: ω_c mit $\beta(\omega_c) = 0$: $k_{x1}^2 = k_1^2 - \beta^2 = k_1^2 = \omega_c^2 \varepsilon_1 \mu_0$

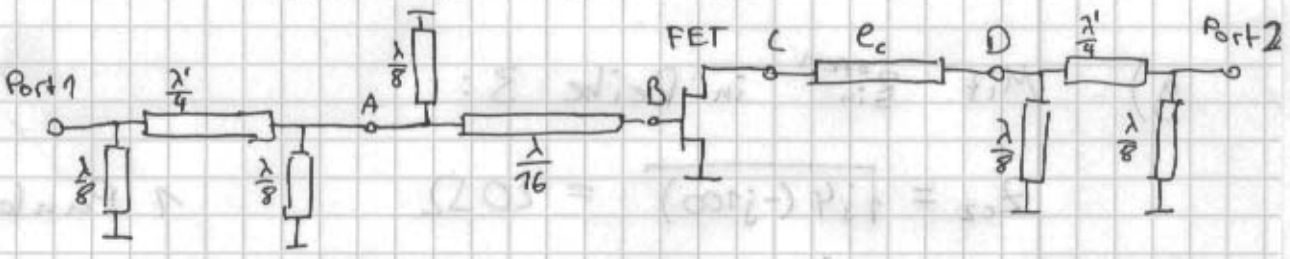
$\Rightarrow \omega_c = \frac{\pi}{2h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}$

Klausur H08

Aufgabe 4

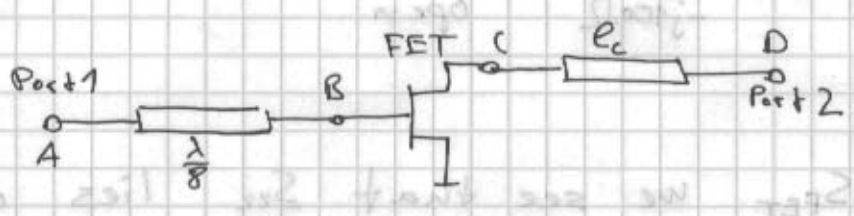
a) Port 1: $\underline{U}_1 = \frac{U_g}{2} + \frac{U_g}{2}$

Port 4: $\underline{U}_4 = \frac{U_g}{2} - \frac{U_g}{2}$



Odd-mode bei f_0

b) $\frac{\lambda}{8} \rightarrow \frac{\lambda}{4}$ K —λ/4— LL $\frac{\lambda'}{4} \rightarrow \frac{\lambda'}{2}$



Odd-mode bei $2f_0$

c) $$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cos(\beta\ell) + j Z_0 \sin(\beta\ell)(-\underline{I}_2)}{\underline{U}_2 \frac{j}{Z_0}\sin(\beta\ell) + \cos(\beta\ell)(-\underline{I}_2)}$$

$$\underline{Z}_{in}^{open} = \underline{Z}_1(\underline{I}_2 = 0) = -jZ_0\cot(\beta\ell)$$ 2 Punkte

$$\underline{Z}_{in}^{short} = \underline{Z}_1(\underline{U}_2 = 0) = jZ_0\tan(\beta\ell)$$ 2 Punkte

d) $$Z_0 = \sqrt{\underline{Z}_{in}^{open}\,\underline{Z}_{in}^{short}}$$ 2 Punkte

$$Z_{01} = \sqrt{(-j100)(j25)} = 50\,\Omega$$ 1 Punkt

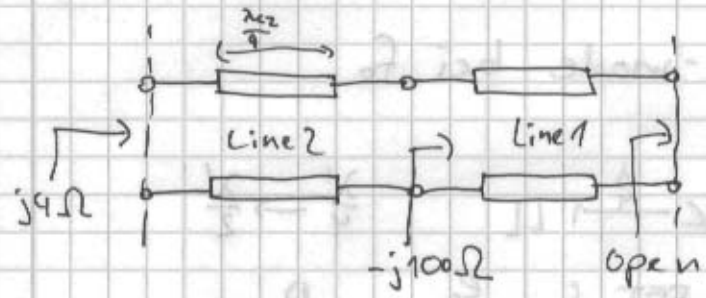
e) $\theta = \arctan\sqrt{-\frac{\underline{z}_{in}^{short}}{\underline{z}_{in}^{open}}}$ 2 Punkte

$\theta_{c1} = \arctan\sqrt{-\frac{j25}{-j100}} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}6°$ 1 Punkt

f) $\ell_{c2} = \frac{\lambda_{c2}}{4}$ oder $\theta_{c2} = 90°$ 1 Punkt

g) Mit $\underline{z}_{in}^{open}$ in Reihe 3:

$Z_{c2} = \sqrt{j4\,(-j100)} = 20\,\Omega$ 1 Punkt



h) • From S_{FET} we see that S_{22} lies on the real axis of reflection coefficient plane. In addition FET is unilateral, therefore output impedance of transistor is real.

• To transform $Z_0 = 50\,\Omega$ into the real impedance Z_{out}^{FET} we need a $\frac{\lambda}{4}$-transformator, so that only Line2 can be used.

• Impedance seen by FET:

$$Z_{seen}^{FET} = \frac{(20\,\Omega)^2}{50\,\Omega} = 8\,\Omega$$

ETIF - HO8

Aufgabe 5:

a) Das Bauteil ist eine (Schottky-)Diode. Die Eigenschaft: Nichtlinear

b) ESB 0. Ordnung

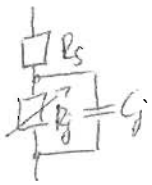
AP1:

AP2: $\frac{1}{\tau} C_j$

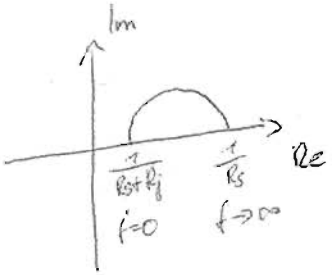
c) $R_j = \frac{1}{0{,}085} = 12{,}5\,\Omega$ und $|X_j| = \frac{1}{0{,}0055} \Rightarrow C_j = \frac{Y_j}{\omega} \left[= \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{9}} \right]$

$= 0{,}5\,pF$

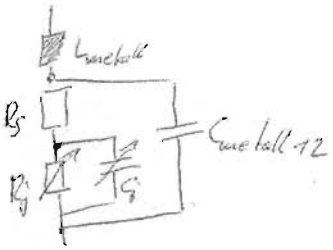
d) Intrinsisches Bauteil



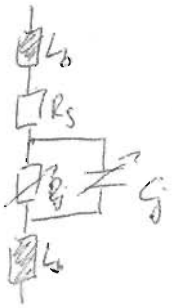
e)



f) Kapazität zwischen Metall 1 und Metall 2 (parallel zu intrinsics)
Induktivität der Metall 1 Leitung



g) Bonddraht => Spule

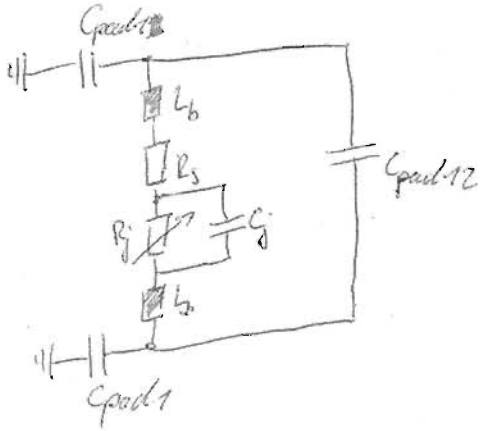


$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C}$

$L = 1{,}25\,nH = 2 \cdot L_b$

$R_S = \frac{1}{0{,}125} S = 8\,\Omega$

h) Padkapazitäten



EMF – HOS

Aufgabe 6.

a) ~~Lösung 1. Unterpunkt.~~

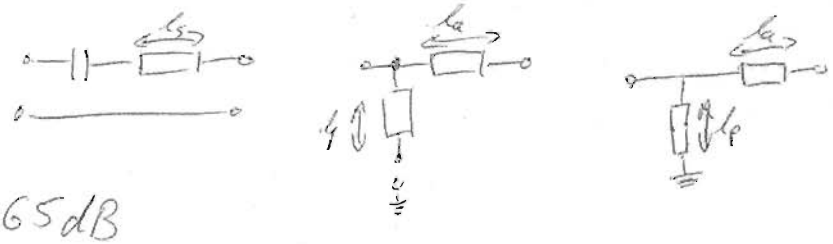
zwei Antworten akzeptiert:

- 1. Transistor dessen $\underline{S}_{22}^*$ den geringsten Abstand zu $\underline{\Gamma}_L$ hat ermöglicht das breitbandigste Anpassungsnetzwerk mit geringster Güte
- 1. Transistor dessen $\underline{S}_{22}^*$ auf Kreisen konst. Güte am nächsten zu $\underline{\Gamma}=0$ liegt, hat geringste Güte

b) Mit dem vorgegebenen Anp.netzw. ist nur ~~eine~~ mit Transistor 3 Leistungsanpassung ~~[redacted]~~ möglich

c) $\underline{Y}_p = -j\,0{,}373$, $l_a = 0{,}041\,\lambda$

d) Kondensator in Serie oder Stichleitung



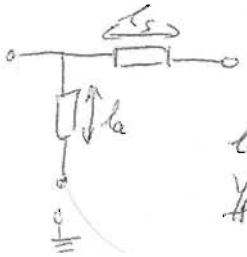
e) $F_1 = 3{,}65\,dB$

$G_{q1} = 0\,dB$

f) aus Smith-Chart: $\mathrm{Re}\{\underline{\Gamma}_{1,min}\} = -0{,}364$, $\mathrm{Im}\{\underline{\Gamma}_{1,min}\} = 0{,}108$

$$\underline{Y}_{1,min} = \frac{1-\underline{\Gamma}_{1,min}}{1+\underline{\Gamma}_{1,min}} = \frac{1-\mathrm{Re}\{\underline{\Gamma}_{1,min}\} - j\,\mathrm{Im}\{\underline{\Gamma}_{1,min}\}}{1+\mathrm{Re}\{\dots\} + j\,\mathrm{Im}\{\dots\}}$$

g)



$l_s = 0{,}140\,\lambda$

$\underline{Y}_p = j\,1{,}11$, $l_p = 1{,}33\,\lambda$

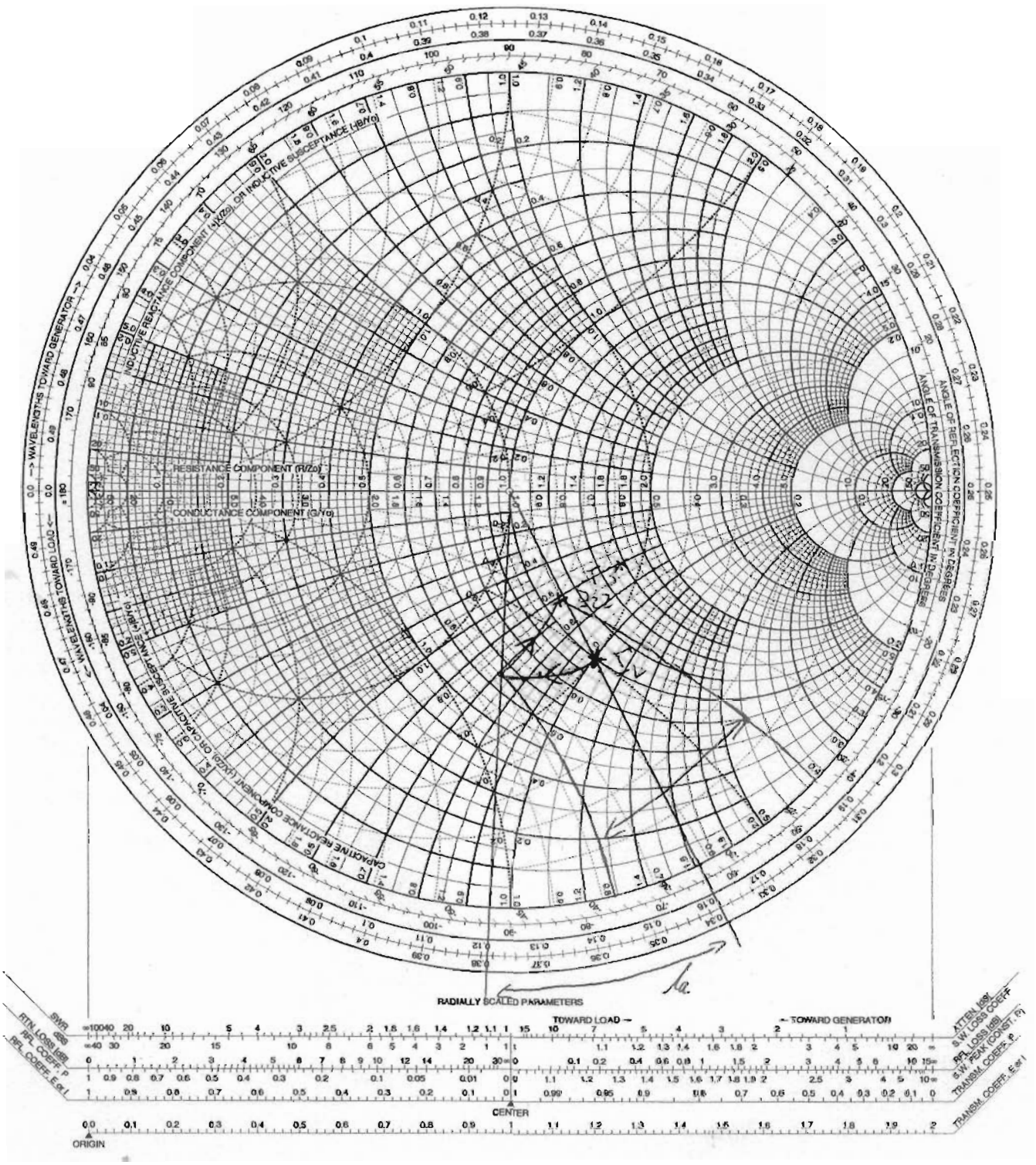
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr.-Ing. Andrei Vescan

Herbst 2008

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt a) und c)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



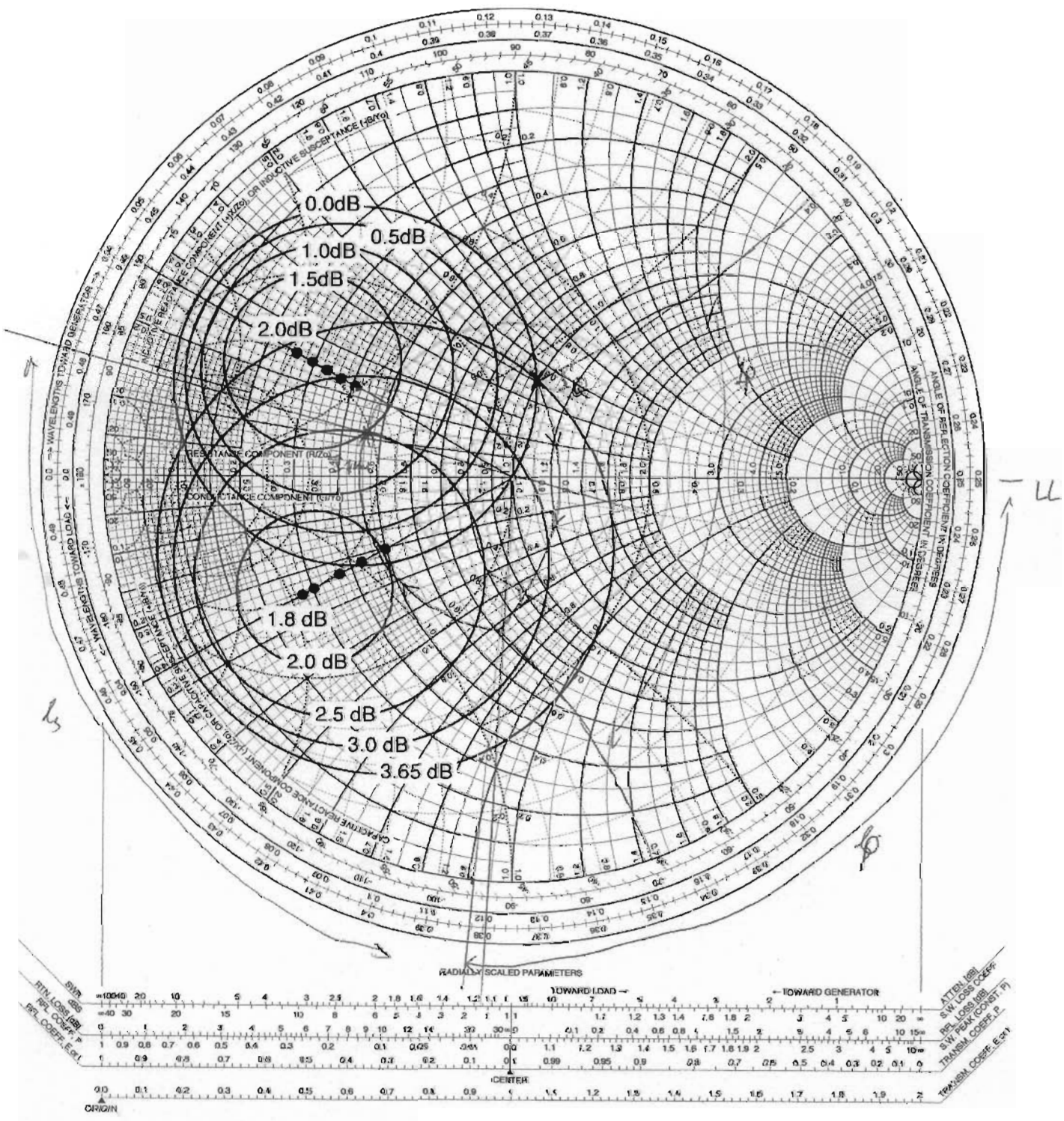
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr. Ing. Rolf H. Jansen
Prof. Dr. Ing. Andrei Vescan

Herbst 2008

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt g)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



A1 F08

a) Außenraum feldfrei

→ Gesamtladung unter der idealen Metallisierung ○

$$\int_{\text{Kugel 1}} \rho_+ \cdot dV + \int_{\text{Kugel 2}} \rho_- \, dV = 0$$

τ_+ τ_a

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_+^3 \rho_+ + \frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho_- = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi \frac{r_a^3}{8} \rho_+ + \frac{4}{3}\pi r_a^3 \rho_- = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_+}{\rho_-} = -8$$

b) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad / \operatorname{div}(\dots)$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \dot{\vec{D}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

c) $\vec{j} = \sigma_{Kugel} \cdot \vec{E} = \sigma_{Kugel} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \vec{D}$

K.-Gl.

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{Kugel} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{Kugel} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\sigma_{Kugel}}{\varepsilon} = -\tau^{-1} \quad ; \tau = \frac{\varepsilon}{\sigma_{Kugel}}$$

Lösung Kugel 1:

$$\rho(t) = \rho_+ \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{f.} \quad 0 \le \tau \le \tau_+$$

$$\rho(t) \equiv 0 \quad \text{f.} \quad \tau_+ < \tau < \tau_a$$

Kugel 2:

$$\rho(t) = \rho_- \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{f.} \quad 0 \le \tau < \tau_a$$

$$\uparrow$$

$$-\frac{1}{8}\rho_+$$

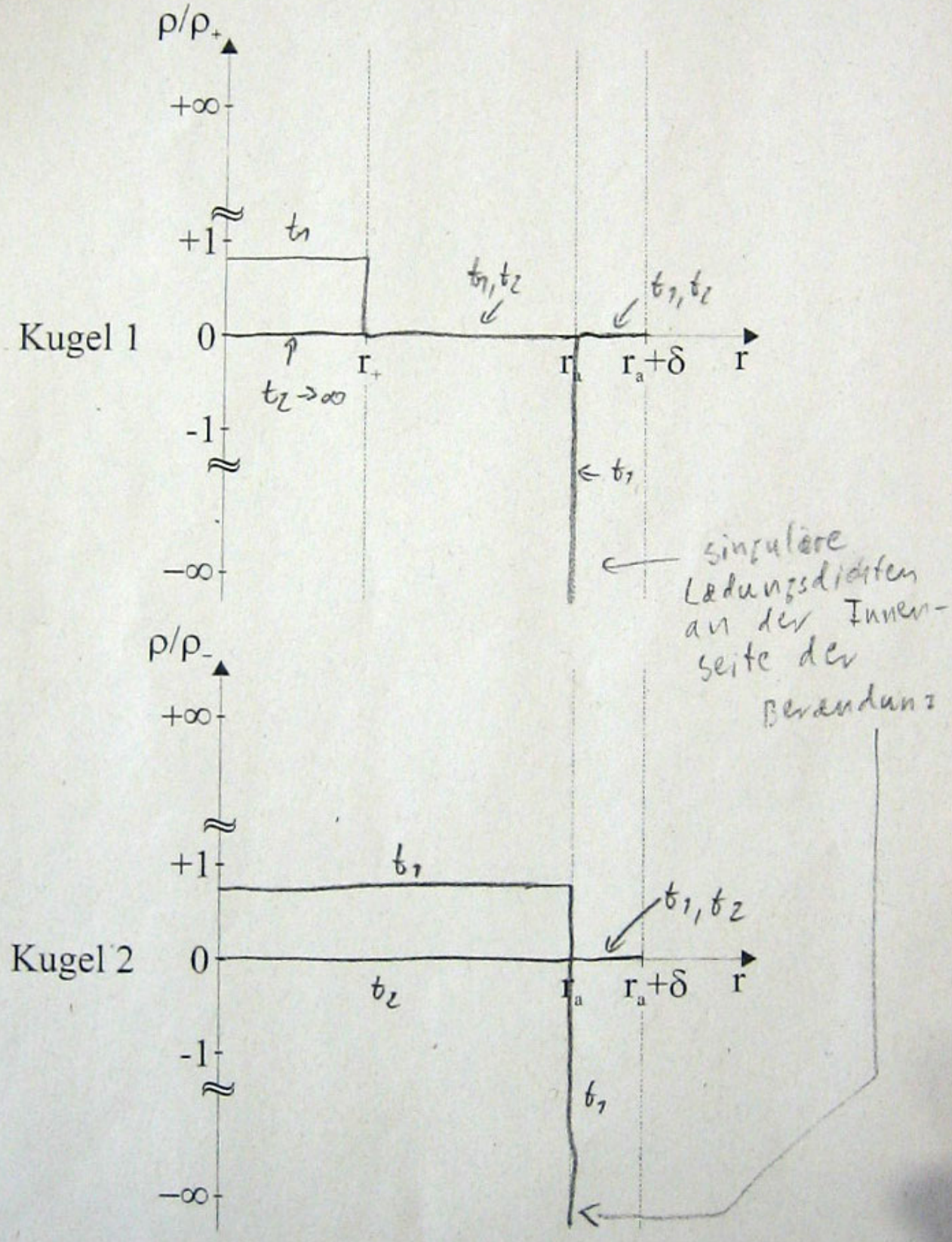
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2008

d.)

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 1 Name: _____ Matr.Nr.: _____



Koordinatensysteme für Unterpunkt d)
(+∞ und -∞ stehen für singuläre Ladungsdichten)

e) Kugel 1:

$$I_1 = -\frac{d}{dt} \int_{\substack{\text{Kugel} \\ r_+}} \rho(r,t)\, dV$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{\substack{r_+ \\ \text{Kugel}}} \rho(t)\, dV$$

$$= -\frac{4}{3}\pi r_+^3 \cdot \rho_+ \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{-t/\tau}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\pi r_+^3 \cdot \rho_+ \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r_+^3 \cdot \frac{\rho_+}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{4}{3}\pi r_a^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\rho_+}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Kugel 2:

$$I_2 = -\frac{d}{dt} \int_{\substack{\text{Kugel} \\ r_-}} \rho(r,t)\, dV$$

$$= -\frac{d}{dt}\left[\rho_- \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \cdot \frac{4}{3}\pi r_-^3$$

$$= \frac{1}{8}\rho_+ \cdot \frac{4}{3}\pi r_-^3 \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= -\frac{\rho_+}{6}\pi r_-^3 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{\rho_+}{6} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \left(\frac{27}{64}\right) r_a^3 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$I_1(t) / I_2(t) = \left(\frac{4}{3}\pi r_a^3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\rho_+}{\tau}\right) \Big/ \left(-\frac{\rho_+}{6} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot r_a^3 \cdot \frac{27}{64}\right) = -\frac{64}{27}$$

f.) $I_m(t) \equiv 0$, da beide Kugeln zu allen Zeiten jeweils ladungsneutral

Lösung zu Aufgabe 2 *Frühjahr 2008*

a) $\vec{H} = \frac{1}{Z_1}(\vec{n} \times \vec{E})$

$\vec{H}_e = \frac{1}{Z_1}\left(\vec{e}_x E_e(sin^2\phi_1 + cos^2\phi_1) - \vec{e}_y jE_e sin\phi_1 - \vec{e}_z jE_e cos\phi_1\right) exp(-j\vec{k}_e\vec{r})$
$= \frac{1}{Z_1}\left(\vec{e}_x E_e - \vec{e}_y jE_e sin\phi_1 - \vec{e}_z jE_e cos\phi_1\right) exp(-j\vec{k}_e\vec{r})$

$\vec{H}_r = \frac{1}{Z_1}\left(\vec{e}_x E_{r||}(sin^2\phi_1 + cos^2\phi_1) - \vec{e}_y jE_{r\perp} sin\phi_1 + \vec{e}_z jE_{r\perp} cos\phi_1\right) exp(-j\vec{k}_r\vec{r})$
$= \frac{1}{Z_1}\left(\vec{e}_x E_{r||} - \vec{e}_y jE_{r\perp} sin\phi_1 + \vec{e}_z jE_{r\perp} cos\phi_1\right) exp(-j\vec{k}_r\vec{r})$

$\vec{H}_d = \frac{1}{Z_2}\left(\vec{e}_x E_{d||}(sin^2\phi_2 + cos^2\phi_2) - \vec{e}_y jE_{d\perp} sin\phi_2 - \vec{e}_z jE_{d\perp} cos\phi_2\right) exp(-j\vec{k}_d\vec{r})$
$= \frac{1}{Z_2}\left(\vec{e}_x E_{d||} - \vec{e}_y jE_{d\perp} sin\phi_2 - \vec{e}_z jE_{d\perp} cos\phi_2\right) exp(-j\vec{k}_d\vec{r})$

b) $\phi_1 = 0°$ und $y = -\frac{\lambda_e}{4} \Rightarrow \vec{n}_e = \vec{e}_y$ und $\vec{r} = -\frac{\lambda_e}{4}\vec{e}_y$
$\Rightarrow \vec{k}_e\vec{r} = \vec{e}_y\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}\left(-\frac{\lambda_e}{4}\right)\vec{e}_y = \frac{2\pi}{\lambda_e}\left(-\frac{\lambda_e}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$t = 0 : \omega t = 0 \Rightarrow Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\, exp(j\omega t - j\vec{k}_e\vec{r})\right]$
$= Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\, exp(j\pi/2)\right] = Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\, j\right] = -\vec{e}_x E_e$

$t = \frac{T}{4} : \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\, exp(j\omega t - j\vec{k}_e\vec{r})\right]$
$= Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\, exp(j\pi)\right] = Re\left[(\vec{e}_x jE_e + \vec{e}_z E_e)\,(-1)\right] = -\vec{e}_z E_e$

Die einfallende Welle ist zirkular polarisiert.

c) $Rot\vec{H} = \vec{J}_F = 0$
$Div\vec{B} = 0$
$Rot\vec{E} = 0$
$Div\vec{D} = \rho_F = 0$

d) Aus der Stetigkeitsbedingung für $\vec{H}$ folgt:
(I) $\vec{H}_{ex} + \vec{H}_{rx} = \vec{H}_{dx} \Rightarrow \frac{1}{Z_1}(E_e + E_{r||}) = \frac{1}{Z_2}E_{d||}$
(II) $\vec{H}_{ez} + \vec{H}_{rz} = \vec{H}_{dz} \Rightarrow \frac{1}{Z_1}(E_e - E_{r\perp})cos\phi_1 = \frac{1}{Z_2}E_{d\perp}cos\phi_2$

Aus der Stetigkeitsbedingung für $\vec{B}$ folgt:
(III) $\vec{H}_{ey} + \vec{H}_{ry} = \vec{H}_{dy} \Rightarrow \frac{1}{Z_1}(E_e + E_{r\perp})sin\phi_1 = \frac{1}{Z_2}E_{d\perp}sin\phi_2$

Aus der Stetigkeitsbedingung für $\vec{E}$ folgt:
(IV) $\vec{E}_{ex} + \vec{E}_{rx} = \vec{E}_{dx} \Rightarrow E_e + E_{r\perp} = E_{d\perp}$
(V) $\vec{E}_{ez} + \vec{E}_{rz} = \vec{E}_{dz} \Rightarrow (E_e - E_{r||})cos\phi_1 = E_{d||}cos\phi_2$

Aus der Stetigkeitsbedingung für $\vec{D}$ folgt:
(VI) $\epsilon_1(\vec{E}_{ey} + \vec{E}_{ry}) = \epsilon_2\vec{E}_{dy} \Rightarrow \epsilon_1(E_e + E_{r||})sin\phi_1 = \epsilon_2 E_{d||}sin\phi_2$

Es gilt $Z_1 = Z_0/\sqrt{\varepsilon_1}$ und $Z_2 = Z_0/\sqrt{\varepsilon_2}$ und damit unter Berücksichtigung des Brechungsgesetzes $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{sin\phi_1}{sin\phi_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ (*).

$E_{d\perp}$ aus Gleichung IV wird in Gleichung II eingesetzt und es folgt:
$\frac{1}{Z_1}(E_e - E_{r\perp})cos\phi_1 = \frac{1}{Z_2}(E_e + E_{r\perp})cos\phi_2$

Die Auflösung nach $E_{r\perp}$ liefert unter Verwendung von (*): $E_{r\perp} = E_e\frac{1 - \frac{sin\phi_1}{sin\phi_2}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}{1 + \frac{sin\phi_1}{sin\phi_2}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}$

Aus Gleichung V folgt $E_{d||} = (E_e - E_{r||})\frac{cos\phi_1}{cos\phi_2}$

Einsetzen von $E_{d||}$ in Gleichung VI liefert $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(E_e + E_{r||})\frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2} = (E_e - E_{r||})\frac{cos\phi_1}{cos\phi_2}$

Auflösung nach der gesuchten Feldstärke $E_{r||}$ unter Verwendung von (*) liefert:

$$E_{r||} = E_e \frac{1-\frac{sin\phi_2}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}{1+\frac{sin\phi_2}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}$$

e) $$E_{r\perp} = E_e \frac{1-\frac{sin\phi_1}{sin\phi_2}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}{1+\frac{sin\phi_1}{sin\phi_2}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}} = E_e \frac{1-\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}}{1+\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}} = E_e \frac{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$E_{r||} = E_e \frac{1-\frac{sin\phi_2}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}}{1+\frac{sin\phi_2}{sin\phi_1}\frac{cos\phi_2}{cos\phi_1}} = E_e \frac{1-\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}}{1+\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}} = 0$$

Der reflektierte Teil der unter dem Brewster-Winkel einfallenden zirkular polarisierten Welle ist linear polarisiert.

Aufg 3 F08

a) TE-Wellen

b) $(\Delta + k^2)\underline{\tilde{g}} = 0$

also $\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi^2} + \left(k^2 - \beta^2\right)\underline{\tilde{g}} = 0$

c) Separationsansatz: $\underline{\tilde{g}}(s,\varphi) = \psi(s)\,K(\varphi)$

$\boxed{p^2 := k^2 - \beta^2}$ Sep. bed.

$$\Rightarrow 0 = K(\varphi)\cdot\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial \psi(s)}{\partial s}\right) + \psi(s)\,\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 K(\varphi)}{\partial \varphi^2} + p^2\psi(s)K(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}K(\varphi) + m^2 K(\varphi) = 0 \qquad (*)$$

und $$0 = \frac{1}{\psi(s)}\,\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial \psi(s)}{\partial s}\right) + p^2 - \frac{m^2}{s^2} \qquad (**)$$

$(*) \Rightarrow$ $m = 0$ $\quad K(\varphi) = C_1\varphi + C_2$

$m \neq 0$ $\quad K(\varphi) = C_3\sin(m\varphi) + C_4\cos(m\varphi)$

$(**) \Rightarrow$ Bessel'sche Dgl: allg. Lsg $\psi_{pm}(s) = A\,J_m(p\cdot s) + B\,N_m(p\cdot s)$

Aufg 3

a) G_1, G_2: $\vec{n} \cdot \underline{\vec{H}} = 0$, d.h. $H_\varphi = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/4$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{\nabla} \times \underline{\vec{G}} = \vec{\nabla} \underline{\tilde{g}} \times \vec{e}_z = \frac{1}{s} \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_s - \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial s} \vec{e}_\varphi$$

$$H_\varphi\Big|_{\varphi=0} = 0 \quad \Rightarrow 0 = \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial s}\Big|_{\varphi=0} \quad \Rightarrow 0 = K(0)$$

$$\Rightarrow m = 0 : C_2 = 0$$

$$m \neq 0 : C_4 = 0$$

$$H_\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4} = 0 \qquad \Rightarrow 0 = K(\pi/4)$$

$$\Rightarrow m = 0 : C_1 = 0$$

$$m \neq 0 : m = 4, 8, 12, \ldots$$

Also gibt es für $m = 0$ keine Lösung außer $\underline{\tilde{g}} \equiv 0$
und für $m \neq 0$ gilt $m = 4, 8, 12, \ldots$ $\left(K(\varphi) = C_3 \sin(m\varphi)\right)$

e) Für $s \to 0$ divergiert $N_m(\beta s)$, daher muß $B = 0$ sein.

Randbed. bei $s = a$: $H_{tan} = 0 \Rightarrow H_\varphi\Big|_{s=a} = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial s}\Big|_{s=a} \Rightarrow J_m'(\beta \cdot s)\Big|_{s=a} = 0$$

$p_m^m \cdot a$ sei die m-te Nullstelle von $J_m'(p_m^m \cdot a)$

f) Grenzfrequenz: $\beta \to 0 \Rightarrow \beta^2 = \left(p_m^{m=4}\right)^2$

$$f_{grenz} = \frac{1}{2\pi} \frac{p_m^{m=4}}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} \qquad p_m^{m=4} \cdot a = 5{,}3175 \text{ (siehe Tabelle)}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Tipp 3 nach Vorgabe

$$\Rightarrow a = \frac{5{,}3175}{2\pi} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{25}\, 10^9 \text{ s}^{-1}} = 5{,}3175 \cdot \frac{3}{\pi} \text{ cm} \approx 5{,}3175 \text{ cm}$$

F08 A4

Solution Sheet: Problem 1

Part a)

1. Due to the symmetry of the structure and since $\underline{V}_{g1} = \underline{V}_{g2}$, and $Z_{g1} = Z_{g2}$ the following holds:

   $\underline{V}_2 = \underline{V}_3$

   with $\underline{V}_i = V_i \sin(wt)$, then :

   $P_{RP2} = P_{RP3} = \frac{1}{2} V_2^2/Zo = \frac{1}{2} V_3^2/Zo$ (P_{RPi}: power flowing into RPi, i=1, 2…)

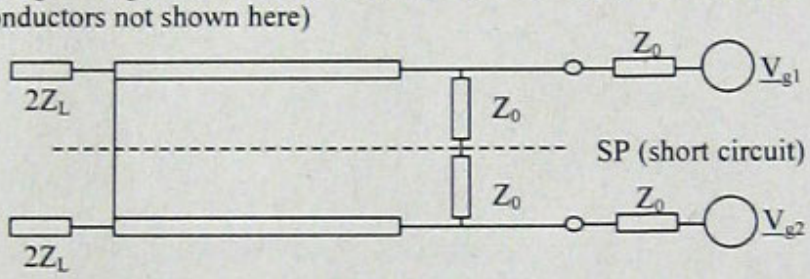
   $P_{RP1} = 2x\, P_{RP2} = 2x\frac{1}{2} V_2^2/Zo = \frac{1}{2} (\sqrt{2}xV_2)^2/Zo = \frac{1}{2} V_1^2/Zo$ ($\lambda/4$ implies $\exp(-j\pi/2) = -j$)

   $\therefore$ **$\underline{V}_1 = -j\sqrt{2}x\underline{V}_2$**

   $\underline{V}_2 = \frac{1}{2}\underline{V}_{g1} = 1V \sin(w_o t)$ and $P_{RP2} = \frac{1}{2} V_2^2/Zo = \frac{1}{2}\, 1/50\ W = 10\ mW$

   $\therefore$ **$P_L = P_{RP1} = 2xP_{PR2} = 20\ mW$**

2. In this case $\underline{V}_{g1} = -\underline{V}_{g2}$. The structure can be divided into 2 pieces at each side of the SP as shown (ground conductors not shown here)



   $\therefore$ **$\underline{V}_1 = 0$** due to short at port 1 and therefore no power is delivered to the load

   $P_L = 0$

3. It can be seen that:

   $\underline{V}_{g1} = 1V \sin(w_o t) = 2V \sin(w_o t) - 1V \sin(w_o t)$

   $\underline{V}_{g2} = 3V \sin(w_o t) = 2V \sin(w_o t) + 1V \sin(w_o t)$

   1 2

   Applying superposition with the set of voltages 1 and 2

   $\underline{V}_1 = \underline{V}_1^1 + \underline{V}_1^2 = \sqrt{2}x\underline{V}_2^1 + 0 = \sqrt{2}V \sin(w_o t)$

   with $\underline{V}_2^1 = 1V \sin(w_o t)$ and using the results in subsections 1 and 2.

   $\therefore$ **$P_L = 20\ mW$**

   $P_{INPUT} = (\frac{1}{2} V_2^2/Z_0 + \frac{1}{2} V_3^2/Z_0)W = \frac{1}{2}(1.5^2 + 0.5^2)/50\ W$ since $V_2 = V_{g1}/2$ and $V_3 = V_{g2}/2$

   $\therefore$ **$P_{INPUT} = 25\ mW$**

4. From subsection 3 it can be seen that something is lost in the combiner, this power is dissipated in the resistor of value $2Z_0$. 5 mW are lost in the combiner.

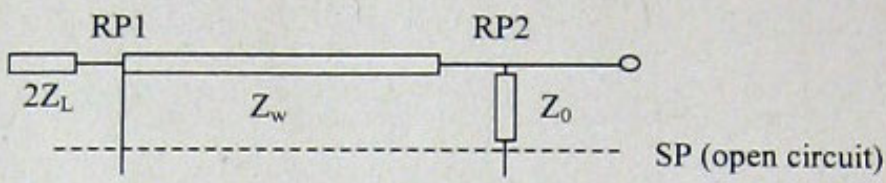
5. For the Wilkinson combiner to work as a lossless network: $V_{g1} = V_{g2}$ and $\theta_{g1} = \theta_{g2}$ where $\underline{V}_i = V_i \exp(j\theta_i)$

Part b)

θ : phase introduced by line
$\theta = (2\pi/\lambda).L$ where $L = \lambda_0/4$ at f_0
$\theta = (2\pi/\lambda).(\lambda_0/4)$ with $\lambda = c/f$ and $\lambda_0 = c/f_0$ then
$\theta = (\pi/2)(f/f_0)$

@ $2f_0 \rightarrow \theta = \pi$

Open circuit at SP



Using $\begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$ with $\theta = \pi$

$\underline{V}_1 = -\underline{V}_2$ and $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$
$Z_2 = \underline{V}_2/\underline{I}_2 = \underline{V}_1/(-\underline{I}_1) = 2Z_L = 2Z_0$ and $\underline{V}_2 = \underline{V}_{g1}\, 2Z_0/(2Z_0 + Z_0) = 2\underline{V}_{g1}/3$ $\therefore$ $\boxed{\underline{V}_1 = -2\underline{V}_{g1}/3}$

@ $3f_0 \rightarrow \theta = 3\pi/2$

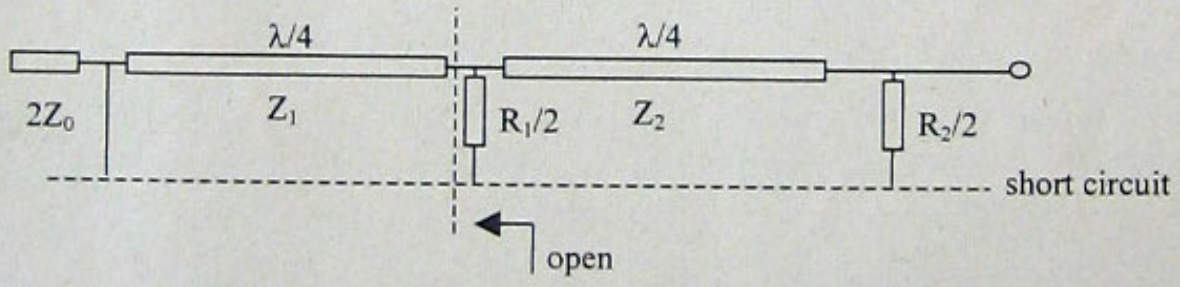
$$\begin{bmatrix} \underline{V}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -jZ_w \\ -jY_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ -\underline{I}_1 \end{bmatrix}$$

$\underline{V}_2 = jZ_w\underline{I}_1$
$\underline{I}_2 = -jY_w\underline{V}_1$
and $\underline{V}_1/(-\underline{I}_1) = 2Z_0$

$\therefore$ $\underline{V}_2 = jZ_w\underline{I}_1 = jZ_w(-\underline{V}_1/2Z_0)$ and $\underline{V}_1 = j2Z_0\underline{V}_2/Z_w$
$Z_2 = \underline{V}_2/\underline{I}_2 = Z_w^2/Z_1 = Z_0$ $\therefore$ $\underline{V}_2 = \underline{V}_{g1}/2$ and $\boxed{\underline{V}_1 = jZ_0\underline{V}_{g1}/Z_w = j\underline{V}_{g1}/\sqrt{2}}$

Part c)

The even-odd-mode technique can be used in this case.
For the even-mode the resistors play no role. For the odd-mode the circuit is divided as shown below:



The admittance seen at RP2 is:

$1/Z_{RP2} = 2/R_2 + R_1/2Z_2^2$

where $Z_{RP2} = Z_0$ in order for the Wilkinson to be matched for the odd-mode case

$\boxed{R_1 = 2Z_2^2\,(1/Z_0 - 2/R_2)}$

Lösung zu Aufgabe 0 F08 A5 **Entwurf. Stand: 14. April 2008 17:01**

a) Lösung zu a)

Einzeichnen E und H Feld. E-Feld wie Kapazitäten, H-Feld umschließt zentralen Leiter (rund)
$C_p = \epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{d} \rightarrow \frac{C_p}{l} = C'_p = \epsilon_0\epsilon_r \frac{w}{(b/2-t/2)} = 2\epsilon_0\epsilon_r \frac{w}{(b-t)}$
$C' = 4C'_f + 2C'_p$

b) Lösung zu b)

$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r} f}$
$\sqrt{L'} = \frac{\beta}{\omega\sqrt{C'}}$
$\Rightarrow Z_L = \frac{\beta}{\omega C'}$ mit $\omega = 2\pi f; \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{\lambda f}$
$\Rightarrow Z_L = \frac{1}{\lambda f C'} = \frac{1}{\frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r} f} f C'} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c_0 C'}$
$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

c) Lösung zu c)

$\underline{Z}_{in} = \underline{U}_1/\underline{I}_1 = \frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}'_{in}$
$\underline{Z}'_{in} = \underline{U}_e/\underline{I}_e|_{\underline{Z}_a = \frac{1}{j\omega C_{gap}} + Z_0} = \frac{\frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a}\cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}{\frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a}\frac{1}{Z_L}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)} \neq \underline{Z}_{in}$
$\underline{Z}_a \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a} = \frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0$ oder $U_a = U_2 - \frac{I_2}{j\omega C}$
$\Rightarrow \underline{Z}_{in} = \frac{1}{j\omega C_{gap}} + \frac{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\cosh(\gamma l) + Z_L \sinh(\gamma l)}{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\frac{1}{Z_L}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)}$

d) Lösung zu d)

$\underline{S}_{11} = \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}|_{\underline{a}_2=0} = \frac{\underline{U}_1 - Z_0 \underline{I}_1}{\underline{U}_1 + Z_0 \underline{I}_1} = \frac{\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} - \underline{Z}_0}{\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{Z}_{in} - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_{in} + \underline{Z}_0}$
$\underline{S}_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1}|_{\underline{a}_1=0} = \frac{\underline{U}_2 - Z_0 \underline{I}_2}{\underline{U}_1 + Z_0 \underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\frac{\underline{U}_2/\underline{I}_2 - Z_0}{\underline{U}_1/\underline{I}_1 + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\frac{-\underline{Z}_0 - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_{in} + \underline{Z}_0} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\frac{-2\underline{Z}_0}{\underline{Z}_{in} + \underline{Z}_0}$ mit $\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = -\underline{Z}_0; \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{in}; \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{I}_a}{\underline{I}_e}$
$\underline{I}_e - \underline{I}_a \cosh(\gamma l) = \frac{1}{Z_L}\underline{U}_a \sinh(\gamma l)$
$\Rightarrow \underline{U}_a = \frac{Z_L}{\sinh(\gamma l)}(\underline{I}_e - \underline{I}_a \cosh(\gamma l))$
in 1. Leitungsgleichung
$\underline{U}_e = \frac{Z_L}{\sinh(\gamma l)}(\underline{I}_e - \underline{I}_a \cosh(\gamma l))\cos(\beta l) + \underline{I}_a Z_l \sinh(\gamma l)$
$\underline{U}_e = \frac{Z_L}{\sinh(\gamma l)}\underline{I}_e \cosh(\gamma l) - \frac{Z_L}{\sinh(\gamma l)}\underline{I}_a \cosh^2(\gamma l) + \underline{I}_a Z_l \sinh(\gamma l)$ /* sinh(gamma l)
$\underline{U}_e \sinh(\gamma l) = Z_l \underline{I}_e \cosh(\gamma l) - Z_l \underline{I}_a \cosh^2(\gamma l) + \underline{I} Z_l \sinh^2(\gamma l)$
$\underline{U}_e \sinh(\gamma l) - Z_l \underline{I}_e \cosh(\gamma l) = -Z_l \underline{I}_a \underbrace{(\cosh^2(\gamma l) - \sinh^2(\gamma l))}$ =1

$\Rightarrow \frac{\underline{U}_e \sinh(\gamma l)}{Z_L} - \underline{I}_e \cosh(\gamma l) = -\underline{I}_a$
$\frac{\underline{I}_a}{\underline{I}_e} = -\frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}\frac{\sinh(\gamma l)}{Z_L} + \cosh(\gamma l)$
$-\frac{\underline{I}_a}{\underline{I}_e} = Z'_{in}\frac{\sinh(\gamma l)}{Z_l} - \cosh(\gamma l) = \frac{I_2}{I_1}$ mit $\underline{Z}'_{in} = \underline{Z}_{in} - \frac{1}{j\omega C_{gap}}$
alternativ
$I_e = \frac{1}{Z_l}U_a \sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)$
$I_e = I_a(\frac{\frac{1}{j\omega C_{gap}} + Z_0}{Z_l}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l))$
$\Rightarrow \frac{I_e}{I_a} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{gap}} + Z_0}{Z_l}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l) = -\frac{I_1}{I_2}$
$\Rightarrow \underline{S}_{21} = [\frac{Z'_{in}}{Z_l}\sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l)]\frac{-2Z_0}{\underline{Z}_{in} + \underline{Z}_0}$
$\Rightarrow \underline{S}_{21} = [\frac{\underline{Z}_{in} - \frac{1}{j\omega C_{gap}}}{Z_l}\sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l)]\frac{-2Z_0}{\underline{Z}_{in} + \underline{Z}_0}$
$\underline{S}_{21} = [\frac{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\cosh(\gamma l) + Z\sinh(\gamma l)}{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\frac{1}{Z_l}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)}}{Z_l}\sinh(\gamma l) - \cosh(\gamma l)]\frac{-2\underline{Z}_0}{\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \frac{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\cosh(\gamma l) + Z\sinh(\gamma l)}{(\frac{1}{j\omega C_{gap}} + \underline{Z}_0)\frac{1}{Z_l}\sinh(\gamma l) + \cosh(\gamma l)} + \underline{Z}_0}$

e) Lösung zu e) Entwurf. Stand: 14. April 2008 17:01

Das Maximum von $\underline{S}_{21}$erfolgt bei Leistungsanpassung. Leistungsanpassung erfolgt für gleich große Kapazitäten C_{gap} bei einer Leitungslänge $l < \lambda/2$ also einer Drehung im Smithchart um weniger als 360°. Bei $l = \lambda/2$ erfolgt eine ganze Drehung im Smithchart. Für eine feste Frequenz würde Leistungsanpassung schon bei einer kürzeren Leitungslänge erreicht. Bei fester Länge ist also ist die Frequenz bei der $l = \lambda/2$ höher als die für Leistungsanpassung.

f) Lösung zu f)

$f_0 = 500MHz$ ablesen
$\lambda = 2l = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}\frac{1}{f}$
$f = \frac{c_0}{\lambda\sqrt{\epsilon_r}}$
$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{c}{\lambda f} = \frac{3*10^8 m/s}{0.2m*5*10^8 Hz} = 3$
$\Rightarrow \epsilon_r = 9$
$\tan\delta = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{2\alpha}{\beta}$
δf ist 3dB Bandbreite$= 5.0075 * 10^8 - 4.9925 * 10^8 = 0.015 * 10^8 \Rightarrow \tan\delta = \frac{0.015*10^8}{5*10^8} = 0.003$
$\alpha_d = \frac{\beta\tan\delta}{2} = \frac{2\pi f\sqrt{\epsilon_i}}{2c_0}\tan\delta = \frac{1}{2}k\tan\delta$

FG8J

(A6) $\underline{Y}_a = (28 - j12)\,mS$

$\underline{Y}_L = (10 - j10)\,mS$

$\underline{Y}_p = j17\,mS$

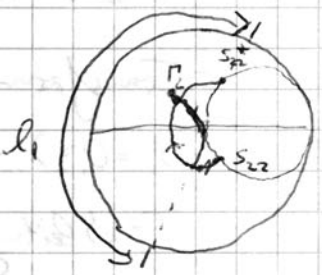
Ausg. $Z_0 = 100\,\Omega$

$S_{22} = 0{,}33\ \angle(289°)$

a) $\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{1}{Y_L} - Z_0}{\frac{1}{Y_L} + Z_0} = \frac{1 - Z_0 Y_L}{1 + Z_0 Y} = \frac{1 - 100\Omega(10 - j10)mS}{1 + 100\Omega(10 - j10)mS} = \frac{1 - (1 - j)}{1 + (1 + j)} = \frac{j}{2 - j} = \frac{j(2+j)}{(2-j)(2+j)} = \frac{-1 + j2}{5}$

$= -\frac{1}{5} + j\frac{2}{5}$

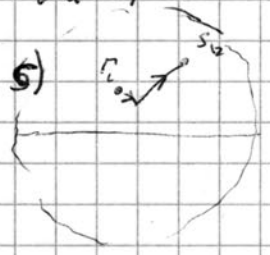
$Re\{\Gamma_L\} = -\frac{1}{5}$, $Im\{\Gamma_L\} = \frac{2}{5}$



b) $\underline{Y}_p = j17\,mS$

$y_p = j1{,}7$

$l_a = 0{,}25\,\lambda$



c) $y_p = j0{,}3$

$l_a = 0{,}054\,\lambda$

$Y_p = j3\,mS$

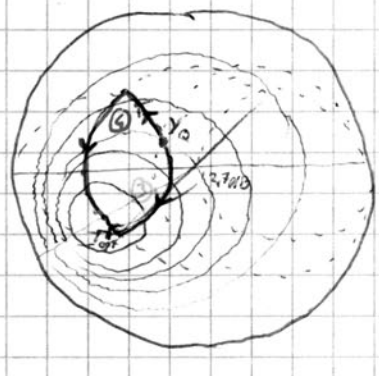
d) 1 Serienleitung
1 Stichleitung

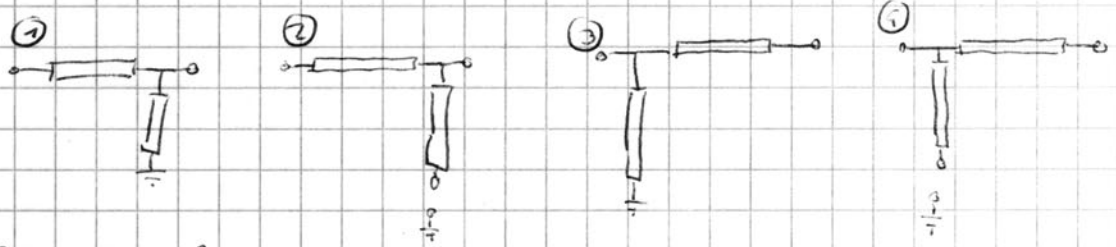
$Z_0 = 50\,\Omega$

$Y_B = (28 - j12)\,mS$

$y_a = 1{,}4 - j0{,}6$

$F_n = 2{,}7\,dB$





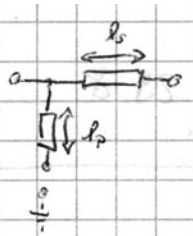
$\frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2}$, $\frac{\lambda}{4} < l_s < \frac{\lambda}{4}$

① und ② nicht möglich, da sich der Kreis um den Ursprung der Serienleitung und der Kreis konstanter Realteils ($Re\{Y_{opt}\}$) nicht schneiden

③ ist nicht möglich, da die Stichleitung bei $\frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2}$ und $f = f_0$ kapazitiv wirkt und dadurch eine Länge $l_s < \frac{\lambda}{4}$ oder $l_s > \frac{\lambda}{2}$ haben müsste

④ möglich, da die Stichleitung bei $\frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2}$ und $f = f_0$ induktiv wirkt und die Serienleitung dadurch eine Länge $\frac{\lambda}{4} < l_s < \frac{\lambda}{2}$ hat

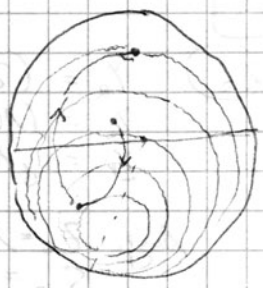
f) $l_s = 0{,}358\,\lambda$, $l_p = 0{,}396\,\lambda$



g) $f = \frac{f_0}{2}$

$l_s = 0{,}199\,\lambda$
$l_p = 0{,}197\,\lambda$
$y_p = j2{,}25$

$F_z = 4{,}6\,dB$



Hinweise: - Start- und Endpunkt einzeichnen und beschriften
- Transformationsrichtung muss klar ersichtlich sein
- $l_s = 0{,}3\,\lambda - 0{,}1\,\lambda = 0{,}18\,\lambda$ ← alles eingezeichnet
- Stichleitung u. Serienleitung l_s und l_p am Rand einzeichnen

H07

① a) Gesamtladung des Zylinders $\stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \rho_+ + 2 \cdot \ell \cdot \pi \cdot r_i^2 = -\rho_- \cdot 2\pi \cdot \ell \cdot (r_a^2 - (r_a - d)^2)$$

$$\Rightarrow \pi r_i^2 = \pi r_a^2 - \pi (r_a^2 - 2 r_a d + d^2)$$

$$\Rightarrow r_i^2 = 2 r_a \cdot d - d^2$$

$$\Rightarrow d^2 - 2 r_a \cdot d + r_a^2 = -r_i^2 + r_a^2$$

$$\Rightarrow (d - r_a)^2 = r_a^2 - r_i^2$$

$$\Rightarrow d = r_a \pm \sqrt{r_a^2 - r_i^2}$$

nur $\ominus$ sinnvoll ($d \stackrel{!}{<} r_a$)

$$\Rightarrow d = r_a - \sqrt{r_a^2 - r_i^2}$$

b) $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \operatorname{div} \dot{\vec{D}}$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ , da } \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

c) ohm'sches Gesetz: $\vec{j} = \sigma_{zyl} \cdot \vec{E}$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div}(\sigma_{zyl} \cdot \vec{E}) = \sigma_{zyl} \cdot \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zyl} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} + \dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

I. $0 \leq r \leq r_i$

$$\rho(t) = \rho_+ \cdot e^{-\frac{\sigma_{ZYL}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot t}$$

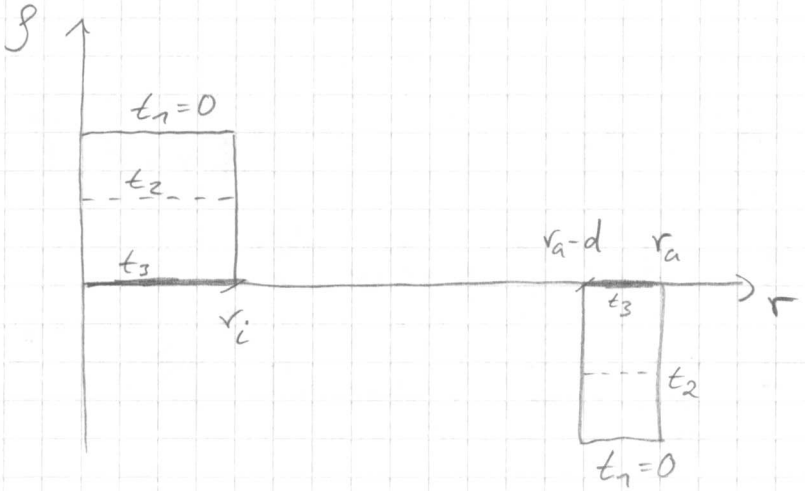
II $r_i < r < r_a - d$

$$\rho(t) = 0$$

III $r_a - d \leq r \leq r_a$

$$\rho(t) = \rho_- \cdot e^{-\frac{\sigma_{ZYL}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot t}$$

d)



e) $I' = -\dot{\rho}(t) \cdot \pi \cdot r_i^2$ ρ = Lösung für $0 \leq r \leq r_i$

$$= + \frac{\sigma_{ZYL}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \rho_+ \cdot e^{-\frac{\sigma_{ZYL}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} t} \cdot \pi \cdot r_i^2$$

f) $D_r(r_i, t)\big|_{r=r_i} = \dfrac{2 \cdot \ell \cdot \rho(t) \cdot \pi \cdot r_i^2}{2 \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot r_i}$ ← Lösung: $0 \leq r \leq r_i$

eingeschlossene Ladung / Oberfläche

$$= \rho_+ \cdot e^{-\frac{\sigma_{ZYL}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot t} \cdot \frac{r_i}{2}$$

allgemein: $D_r(r,t) = \frac{\rho_+ \cdot e^{-\frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t} \cdot r_i^2}{2r}$

für $r_i < r < r_a - d$

$$p = \vec{J} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = J_r \cdot \frac{D_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$|\vec{J}| = J_r = \frac{I'}{2\pi r} = \rho_+ \cdot \frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot e^{-\frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot t} \cdot \frac{\pi r_i^2}{2\pi r}$$

$$p = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\rho_+ \frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot e^{-\frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t} \cdot \frac{\pi \cdot r_i^2}{2\pi r} \cdot \frac{\rho_+ \cdot e^{-\frac{\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t} \cdot r_i^2}{2r}$$

$$= \frac{1}{(\varepsilon_0\varepsilon_r)^2} \cdot \sigma_{zyl} \cdot \rho_+^2 \cdot e^{-\frac{2\sigma_{zyl}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t} \cdot \frac{\pi r_i^4}{4\pi r^2}$$

(2) a) $\vec{n} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(-\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{e}_y + 2\vec{e}_z)$

$Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|}$ in $(0,0,0)$ oder I. $\vec{H} = \frac{1}{Z}(\vec{n} \times \vec{E})$ 2 Möglichkeiten

bzw. II. $\vec{E} = -Z \cdot (\vec{n} \times \vec{H})$

$\vec{E}(0,0,0)$ über $\vec{S}(0,0,0) = \vec{E}(0,0,0) \times \vec{H}^*(0,0,0)$

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ 0 & 0 & \end{vmatrix} = \vec{S}(0,0,0)$$

$-j\frac{8E_0}{Z_0}$

Koeffizientenvergleich:

$\Rightarrow E_z = -j\frac{E_0}{2}$; $E_y = -jE_0$

weiterhin: $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow E_x = 0$

$$Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{\sqrt{5}E_0 Z_0}{2 \cdot 8 \cdot E_0} = \frac{\sqrt{5}}{16} Z_0$$

$\vec{E} \times \vec{H}^* = -Z(\vec{n} \times \vec{H}) \times \vec{H}^*$

$\vec{S} = Z \cdot \vec{H}^* \times (\vec{n} \times \vec{H})$

oder Koeffizientenvergleich

$\vec{S} = Z \cdot [\vec{n}(\vec{H} \cdot \vec{H}^*) - (\vec{n} \cdot \vec{H}^*) \cdot \vec{H}]$

$= Z \cdot \vec{n}(\vec{H} \cdot \vec{H}^*)$

$\frac{4E_0^2}{Z_0}\vec{n} \cdot \sqrt{5} = Z \cdot \frac{64E_0^2}{Z_0^2} \cdot \vec{n}$

$\Rightarrow Z = \frac{\sqrt{5}}{16} Z_0$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} Z_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\sqrt{5}}{16} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{16^2}{5} = \underline{\underline{51,2}}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi \vec{n}}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{n} = \omega \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} \cdot \vec{n}$$

$$= k_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \vec{n} = \frac{16}{\sqrt{5}} \cdot k_0 \cdot \vec{n}$$

b) $\vec{\underline{E}}(x,y,z) = \vec{\underline{E}}(0,0,0) \cdot e^{-j \vec{k} \vec{r}}$ ($\vec{\underline{E}}(0,0,0)$ siehe a))

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_0 \cdot \frac{16}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_0 \cdot \frac{16}{5} (-y + 2z)$$

$$\Rightarrow \vec{\underline{E}} = -j \frac{E_0}{2} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot e^{-j k_0 \frac{16}{5} (-y+2z)}$$

analog: $\vec{H} = j \frac{8 E_0}{Z_0} \cdot \vec{e}_x \cdot e^{-j k_0 \cdot \frac{16}{5} (-y+2z)}$

c) $\vec{\underline{E}}(x,y,z,t) = \vec{\underline{E}}(x,y,z) \cdot e^{-j\omega t} = -j \frac{E_0}{2} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot e^{-j\left[k_0 \frac{16}{5}(y+2z) \right.}$

$$= \frac{E_0}{2} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot e^{-j\left[k_0 \frac{16}{5}(-y+2z) - \omega t + \pi/2\right]}$$

$$\vec{\underline{E}}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\{ \vec{\underline{E}}(x,y,z,t) \}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{E_0}{2} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left[\cos\left(k_0 \frac{16}{5}(-y+2z) - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) - j \sin(\quad) \right] \right\}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \frac{E_0}{2} (2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left(-\sin\left[k_0 \frac{16}{5}(-y+2z) - \omega t\right] \right)$$

weil $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

linear polarisierte Welle

d) allg. $\vec{\underline{E}}_{tan} = 0$ an ideal leitender Wand

hier: $\left(\vec{\underline{E}}_{h,tan} + \vec{\underline{E}}_{r,tan} \right)\Big|_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=0}} = 0$ $\underline{h}$ hinlaufend, $\underline{r}$ rücklaufend

e) Stehende Welle

Die Welle wird vollständig reflektiert, keine Leistung wird im Zeitmittel transportiert:

$$\overline{\vec{\underline{S}}} = 0$$

(3) a) Helmholtz-Gleichung:

$$\Delta \underline{g}(x,y,z) + k^2 \underline{g}(x,y,z) = 0 \quad (*)$$

b) Separationsansatz: $\underline{g}(x,y,z) = \underline{u}(x)\, v(y) \exp(-j\beta z)$

allg. Lösungen:

$$\underline{u}(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)$$
$$v(y) = A_3 \cos(k_y y) + A_4 \sin(k_y y)$$

$(*) \Rightarrow 0 = -k_x^2 - k_y^2 - \beta^2 + k^2 \Rightarrow \beta(\omega) = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - k_x^2 - k_y^2}$

c) G_1 & G_3: ideal elektrisch leitende Wände

$\vec{\underline{E}}_{tan} = 0$ d.h. $0 = \underline{E}_x(x,0,z) = \underline{E}_x(x,b,z)$

und $0 = \underline{E}_z(x,0,z) = \underline{E}_z(x,b,z)$

G_2 & G_4 ideal magnetische Wände:

$\vec{H}_{tan} = 0$ d.h. $0 = \underline{H}_y(0,y,z) = \underline{H}_y(a,y,z)$

$[H_z \equiv 0$, da TM-Welle$]$

$$\left[\underline{H}_y = \left(\vec{\nabla} \times \underline{g}(x,y,z)\cdot \vec{e}_z\right)_y = -\frac{\partial}{\partial x}\,\underline{g}(x,y,z)\right]$$

$G_2 + G_4$: $\boxed{x=0} \Rightarrow 0 = \underline{H}_y(0,y,z) = -u'(0)\,v(y)\exp(-j\beta z)$

$\Rightarrow 0 = 0 + A_2 k_z \Rightarrow A_2 = 0$

$\boxed{x=a} \Rightarrow$

$$0 = \underline{H}_y(a,y,z) = -u'(a)\,v(y)\exp(-j\beta z)$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{c_1 \pi}{a} \qquad c_1 = 1,2,3,\ldots$$

Lösungsvarianten für ideal elektr. Wand:

i) $\vec{E}_{tr} \sim \vec{\nabla}_{tr}\,\underline{g}(x,y,z) \Rightarrow E_x \sim \frac{\partial}{\partial x}\,\underline{g}(x,y,z) = 0$

ii) $\underline{g}(x,y,z) = 0$

iii) $E_z \sim \underline{g} \Rightarrow \underline{g}(x,y,z) = 0$

$G_1 + G_3$ $\boxed{y=0}$ i) $0 = \frac{\partial}{\partial x}\,\underline{g}(x,y,z)\big|_{y=0} = u'(x)\,v(0)\exp(-j\beta z)$

ii)+iii) $0 = g(x,0,z) = u(x)\,v(0)\exp(-j\beta z)$

aus beiden folgt $v(0) = 0 \Rightarrow A_3 = 0$

$\boxed{y=b} \Rightarrow \ldots \Rightarrow v(b) = 0 = A_4 \sin(k_y b)$

$$\Rightarrow k_y = \frac{c_2 \pi}{b} \qquad c_2 = 1,2,3,\ldots$$

Somit:

$$\underline{g}(x,y,z) = A \cdot \cos(k_x x) \sin(k_y y) \exp(-j\beta z)$$

mit $A = \text{const}$, $k_x = \frac{c_1 \pi}{a}$, $k_y = \frac{c_2 \pi}{b}$

d) $$\vec{\underline{H}} = \vec{\nabla} \times \underline{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \underline{g}(x,y,z) \\ -\frac{\partial}{\partial x} \underline{g}(x,y,z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b = a \Rightarrow k_x = \frac{c_1 \pi}{a}$ $k_y = \frac{c_2 \pi}{a}$

$$\Rightarrow \underline{H}_x = \frac{\partial}{\partial y} \underline{g}(x,y,z) = \frac{c_2 \pi}{a} \cdot A \cdot \cos\left(\frac{c_1 \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{c_2 \pi}{a} y\right) \exp(-j\beta z$$

und $$\underline{H}_y = -\frac{\partial}{\partial y} \underline{g}(x,y,z) = + \frac{c_1 \pi}{a} A \sin\left(\frac{c_1 \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{c_2 \pi}{a} y\right) \exp(-j\beta z)$$

mit $c_1 = m$ $c_2 = n$ und $A_{mn} = \frac{c_2 \pi}{a} \cdot A$

folgt:

$$\underline{H}_x = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \exp(-j\beta z)$$

und $$\underline{H}_y = \frac{m}{n} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \exp(-j\beta z)$$

e) G_5: $\vec{\underline{H}}_{tan} = 0$ $\quad \underline{H}_z \equiv 0$ (TM-Welle)

$$\underline{H}_y\left(\tfrac{3}{7}a, y, z\right) = 0$$

G_6: $\vec{\underline{E}}_{tan} = 0$ $\quad E_z\left(x, \tfrac{1}{2}a, z\right) = 0$

$$E_x\left(x, \tfrac{1}{2}a, z\right) = 0$$

g) G_5: $H_y\left(\frac{3}{7}, y, z\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sin\left(k_x \tfrac{3}{7} a\right) = \sin\left(\tfrac{m\pi}{a} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot a\right) = \sin\left(3 \cdot \tfrac{m}{7}\pi\right)$$

ist erfüllt für $\frac{m}{7} = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow m = 7, 14, 21, \ldots$

G_6: $\quad 0 = \sin\left(k_y \tfrac{1}{2} a\right) = \sin\left(\tfrac{n}{2}\pi\right)$

ist erfüllt für $n = 2, 4, 6, \ldots$

$$\omega^2 \varepsilon \mu = \beta^2 + k_x^2 + k_y^2$$

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{\beta^2 + \left(\frac{m}{a}\pi\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\pi\right)^2}{\varepsilon \mu}}$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{0 + \left(\frac{7}{a}\pi\right)^2 + \left(\frac{2}{a}\pi\right)^2}{\varepsilon \mu}} = \frac{\sqrt{53}\,\pi}{\sqrt{\varepsilon\mu}\, a}$$

$$f_{min} = \frac{\omega_{min}}{2\pi} = \frac{\sqrt{53}}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

EXAM PROBLEMS "MICROWAVE CIRCUITS"

PROBLEM1 (Solution Sheet) H07 A4

a) 1 Point

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

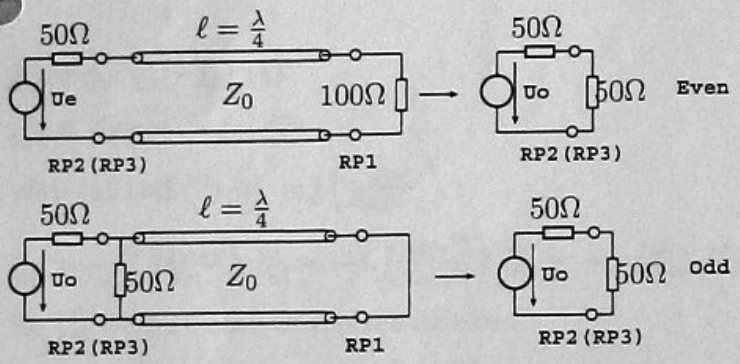
b) 2 Points

Reciprocity: $S_{12} = S_{21}$, $S_{13} = S_{31}$, $S_{23} = S_{32}$

Symmetry: $S_{22} = S_{33}$, $S_{21} = S_{31}$

Independent S-parameters: S_{11}, S_{12}, S_{23},S_{22}

c) 4 Points



d) 3 Points

Source at port3: $\underline{U}_{g3} = 2V = 1V + 1V = U^e_{g3} + U^o_{g3}$ (1)

Source at port2: $\underline{U}_{g2} = 0V = 1V - 1V = U^e_{g2} + U^o_{g2}$ (2)

$\underline{U}_2$: voltage at RP2, $\underline{U}_2 = U^e_2 + U^o_2$

from the circuit for even mode and with (1) and (2) we obtain $U^e_2 = 0.5V$. From the circuit for odd mode and with (1) and (2) we obtain $U^o_2 = -0.5V$, therefore $\underline{U}_2 = 0V$

e) 4 Points

Z_x: impedance seen at the input of open circuited 50Ω line of length ℓ_0

The circuit is symmetric and feeding at port 1 will produce equal voltages at ports 2 and 3, therefore we can eliminate the 100Ωresistor.

$Z_{in} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Zo^2}{Z_x}$ (1) and $S_{11} = \frac{Z_{in}-50}{Z_{in}+50}$ (2) , $\underline{S}_{11} = 1\angle 90° = j$

The Smith chart can be used to determine the value of the input impedance required to get a reflection coefficient of $\underline{S}_{11} = 1\angle 90° = j$, in this case $Z_{in} = j50\Omega$

(How to get Z_{in} without using the Smith chart?: from (2) $Z_{in} = 50 \cdot \frac{1+S_{11}}{1-S_{11}} = 50 \cdot \frac{1+j}{1-j} = 50 \cdot \frac{\sqrt{2}\angle 45}{\sqrt{2}\angle -45} = 50\angle 90\Omega = j50\Omega$)

Now from (1) $Z_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{Zo^2}{Z_{in}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2}.50)^2}{j50} = -j50\Omega$

Normalize this impedance by dividing by 50Ω(reference impedance of open circuited line) we get $Z_x^{norm} = -j$. Enter in the Smith Chart at the point of open circuit and move clockwise untill the value of Z_x^{norm} is reached. Read the length on the Smith chart. it should be equal to $\frac{\lambda}{8}$.

Entwurf Stand: September 7 2007 17:50

(How to get the length ℓ_0 without using the Smith chart?: Use the transmission line relations given in section f), from here it is easy to find the following equation:

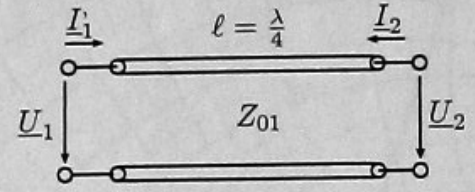
$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L tan(\beta\ell)}$ for $Z_L = \infty$, $Z_x = -jZ_0 cot(\beta\ell) = -j50 cot(\beta\ell)$ and use the value found for $Z_x = -j50$, then $cot(\beta\ell) = 1 \therefore \beta\ell = \pi/4$ and $\ell = \frac{\lambda}{8}$)

(*How to solve this problem using the Smith chart only?*: See auxiliary page)

f) 6 Points

$\beta.\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & jZ_{01} \\ jY_{01} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$



$\underline{U}_1 = j.Z_{01}.(-\underline{I}_2)$ (1)

$\underline{U}_2 = Z_{REF2}.(-\underline{I}_2)$ (2)

with (1) and (2) $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = j\left(\frac{Z_{01}}{Z_{REF2}}\right) \therefore$

$\underline{U}_2 = -j\left(\frac{Z_{REF2}}{Z_{01}}\right).\underline{U}_1 = -j.\left(\frac{50/\sqrt{3}}{75/\sqrt{3}}\right).\underline{U}_1 = -j.\left(\frac{50}{75}\right).\underline{U}_1$

for $\underline{U}_3$ we just need to replace indexes:

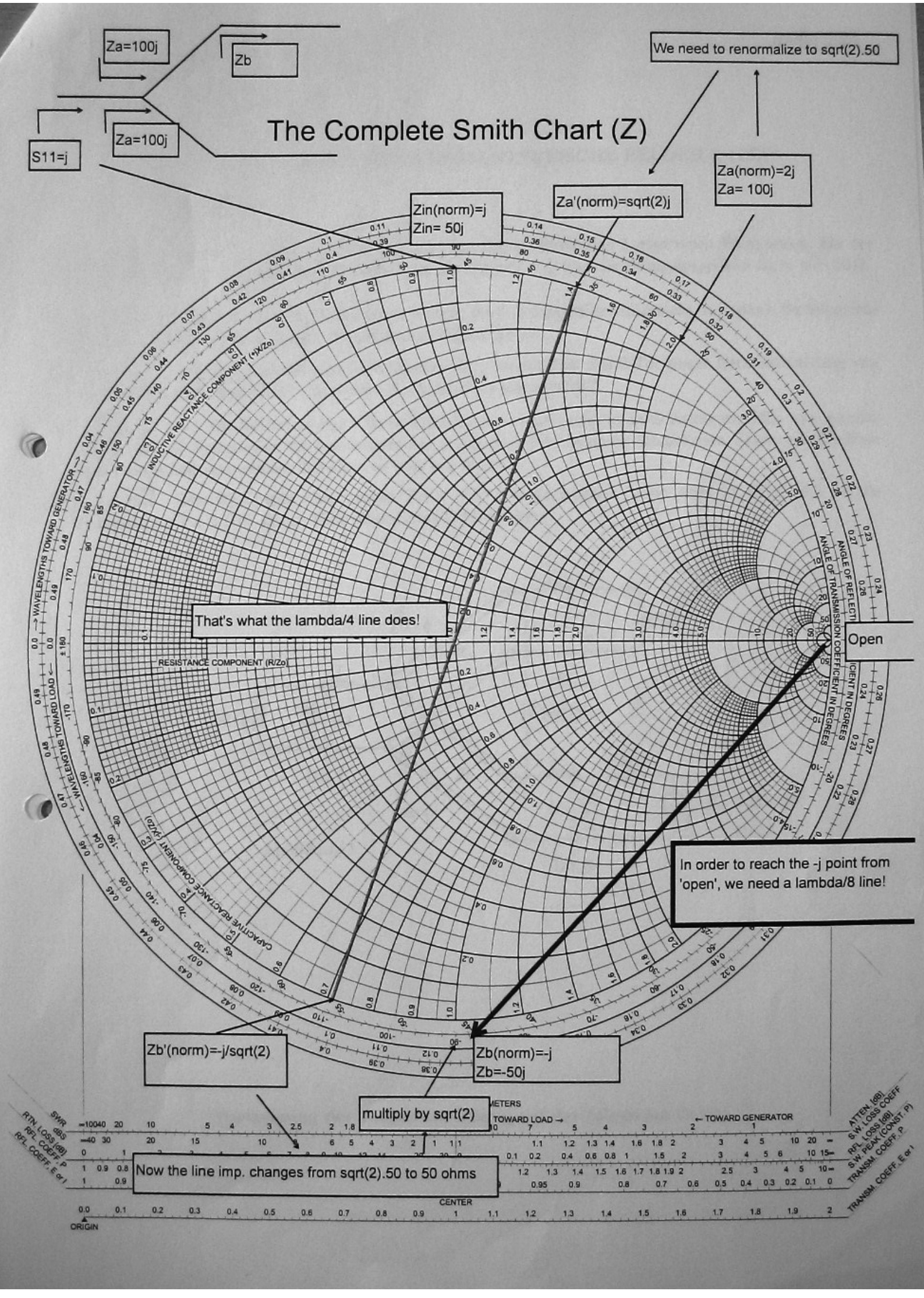
$\underline{U}_3 = -j\left(\frac{Z_{REF3}}{Z_{02}}\right).\underline{U}_1 = -j.\left(\frac{50.\sqrt{3}}{75.\sqrt{3}}\right).\underline{U}_1 = -j.\left(\frac{50}{75}\right).\underline{U}_1$

For the delivered powers:

$P_{RP2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\underline{U}_2|^2}{Z_{REF2}}$ and $P_{RP3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\underline{U}_3|^2}{Z_{REF3}}$ and with $\underline{U}_3 = \underline{U}_2$

$\frac{P_{RP2}}{P_{RP3}} = \frac{Z_{REF3}}{Z_{REF2}} = \frac{50.\sqrt{3}}{50/\sqrt{3}} = 3$

ELLER.RAUCHKULTUR
Clubmitglied


Za=100j
Zb
S11=j
Za=100j
The Complete Smith Chart (Z)
We need to renormalize to sqrt(2).50
Za(norm)=2j
Za= 100j
Za'(norm)=sqrt(2)j
Zin(norm)=j
Zin= 50j
That's what the lambda/4 line does!
Open
In order to reach the -j point from 'open', we need a lambda/8 line!
Zb'(norm)=-j/sqrt(2)
Zb(norm)=-j
Zb=-50j
multiply by sqrt(2)
Now the line imp. changes from sqrt(2).50 to 50 ohms
RESISTANCE COMPONENT (R/Zo)
INDUCTIVE REACTANCE COMPONENT (+jX/Zo)
CAPACITIVE REACTANCE COMPONENT (-jX/Zo)
WAVELENGTHS TOWARD GENERATOR
WAVELENGTHS TOWARD LOAD
ANGLE OF REFLECTION COEFFICIENT IN DEGREES
ANGLE OF TRANSMISSION COEFFICIENT IN DEGREES
TOWARD LOAD
TOWARD GENERATOR
CENTER
ORIGIN
SWR
RTN. LOSS (dB)
RFL. COEFF. P
RFL. COEFF. E or I
ATTEN. (dB)
S.W. LOSS COEFF
RFL. LOSS (dB)
S.W. PEAK (CONST. P)
TRANSM. COEFF. P
TRANSM. COEFF. E or I

Lösung zu Aufgabe 5 *Herbst 2007*

a) Das Netzwerk ist reziprok. Daraus folgt $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$

b) $\underline{Z}_{11}$und $\underline{Z}_{22}$: Spannungsteiler $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_c//(\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) = \ldots$ und $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_c//(\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) = \ldots$

$\underline{Z}_{21} = \frac{U_2}{I_1}\,|_{I_2=0} = \frac{\underline{Z}_d I_1''}{I_1' + I_1''} = \frac{\underline{Z}_d I_1''}{I_1'' + I_1''(\frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_d}{\underline{Z}_c})} = \frac{\underline{Z}_c \underline{Z}_d}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \underline{Z}_d}$

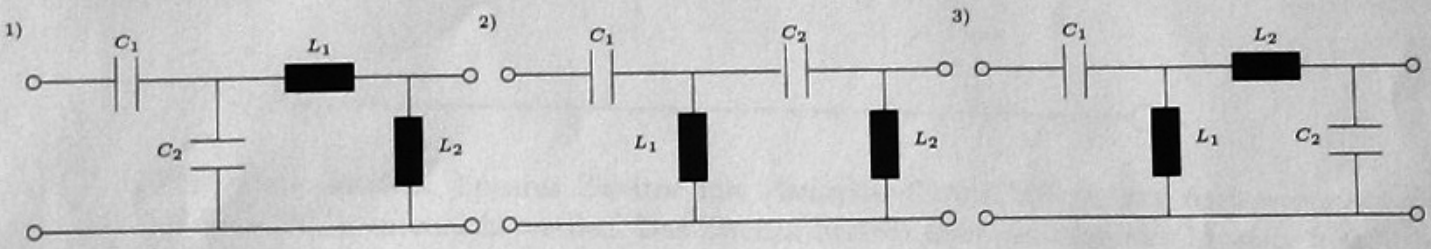
I_1': Strom durch $\underline{Z}_c$
I_1'': Strom durch $\underline{Z}_b$und $\underline{Z}_d$
reziprok $\Rightarrow$ $\underline{Z}_{12}$=$\underline{Z}_{21}$

$$\underline{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \underline{Z}_d} \begin{bmatrix} \underline{Z}_a(\underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \underline{Z}_d) + \underline{Z}_c(\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) & \underline{Z}_c \underline{Z}_d \\ \underline{Z}_c \underline{Z}_d & \underline{Z}_d(\underline{Z}_b + \underline{Z}_c) \end{bmatrix}$$

c) $\underline{Z}_a = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_{ap} C_1} + \mathrm{j}\omega_{ap}\frac{1}{\omega_{ap}^2 C_1} = 0$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{Z}}_{AP} = \frac{1}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \underline{Z}_d} \begin{bmatrix} \underline{Z}_c(\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) & \underline{Z}_c \underline{Z}_d \\ \underline{Z}_c \underline{Z}_d & \underline{Z}_d(\underline{Z}_b + \underline{Z}_c) \end{bmatrix}$$

d)



zu Netzwerk 2:
Netzwerk 2 ist kein Bandpass
zu Netzwerk 1:
$\underline{Z}_c = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}$ $\underline{Z}_d = \mathrm{j}\omega L_2$
$\underline{Z}_c - \underline{Z}_d = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2} - \mathrm{j}\omega L_2 \Rightarrow \mathrm{Im}\{\underline{Z}_c - \underline{Z}_d\} < 0$
zu Netzwerk 3:
$\underline{Z}_d = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2}$ $\underline{Z}_c = \mathrm{j}\omega L_1$
$\underline{Z}_c - \underline{Z}_d = +\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2} + \mathrm{j}\omega L_1 \Rightarrow \mathrm{Im}\{\underline{Z}_c - \underline{Z}_d\} > 0$
$\Rightarrow$Netzwerk 3 ist zu wählen

e) $Z_0 = 10\,\Omega$

$\underline{z}_{Transistor} = 1 - \mathrm{j}1$
$\underline{z}_a = 0$ $\underline{z}_b = \mathrm{j}0,6$ $\underline{z}_c = \mathrm{j}0,5$ $\underline{z}_d = -\mathrm{j}2$
$\underline{z}_{in} = \underline{z}_c//(\underline{z}_b + \underline{z}_d//\underline{z}_{Transistor}) = 0,4 + \mathrm{j}0,2$
$\underline{s}_{11} = \frac{0,4+\mathrm{j}0,2-1}{0,4+\mathrm{j}0,2+1} = -0,4 + \mathrm{j}0,2$
$\underline{z}_{a,ideal} = -\mathrm{j}0,2 \Rightarrow \underline{Z}_{a,ideal} = -\mathrm{j}2\,\Omega$
$z_q = 0,4 \Rightarrow Z_q = 4\Omega = 0,4 Z_0$

Musterlösung H07 / A6

a) $\underline{S}_{21} = \underline{S}'_{21} \, e^{j\beta(l_e + l_a)}$

$\underline{S}_{22} = \underline{S}'_{22} \, e^{j2\beta l_a}$

b) $\underline{S}_{12} = 0$, da $\underline{S}'_{12} = 0$

$\underline{S}_{11} = \underline{S}'_{11}$, da $\frac{l_e}{\lambda} = \frac{1}{2} \hat{=} 360°$ Drehung im SC

$\underline{S}_{22} = 0{,}55 \angle -114°$, da $\frac{l_a}{\lambda} = \frac{1}{8} \hat{=} 90°$ Drehung im SC

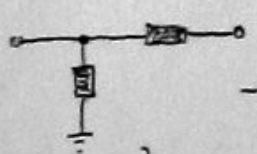
c) $r_{gs} = 0{,}93$ $\qquad c_{gd} = 0$, da $\underline{S}_{12} = 0$

$\frac{1}{j\omega C_{gs} \underline{z}_0} = -j\,2{,}1$

$\frac{1}{r_{ds}} = 0{,}83$

$j\omega C_{ds} \underline{z}_0 = j\,1{,}2$

d) Möglichkeit #1

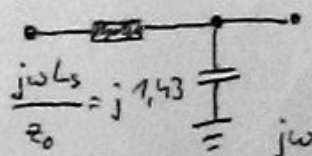


$\frac{j\omega L_s}{z_0} = j\,1{,}61$

$\rightarrow \underline{z}_A$

$\frac{z_0}{j\omega L_p} = -j\,0{,}32$

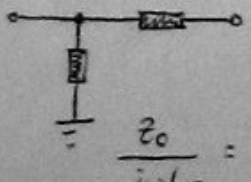
Möglichkeit #2



$\frac{j\omega L_s}{z_0} = j\,1{,}43$ $\rightarrow \underline{z}_A$

$j\omega C_p z_0 = j\,0{,}23$

Möglichkeit #3

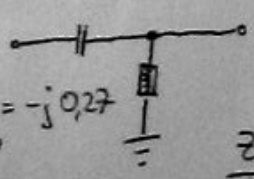


$\frac{j\omega L_s}{z_0} = j\,0{,}38$

$\rightarrow \underline{z}_A$

$\frac{z_0}{j\omega L_p} = -j\,1{,}98$

Möglichkeit #4



$\frac{1}{j\omega C_s z_0} = -j\,0{,}27$

$\rightarrow \underline{z}_A$

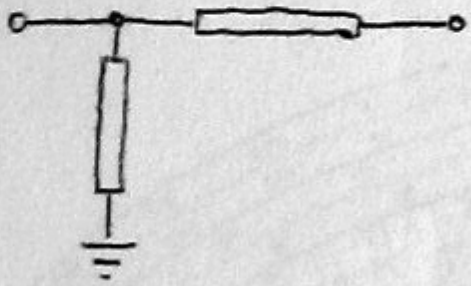
$\frac{z_0}{j\omega L_p} = -j\,1{,}69$

Musterlösung H07 / A6

e) Rauschzahl ohne EAN : F = 1,73 dB

Anpassung durch $l_p = 0{,}182\ \lambda$

$l_s = 0{,}068\ \lambda$



→ FET

Abschluss : short

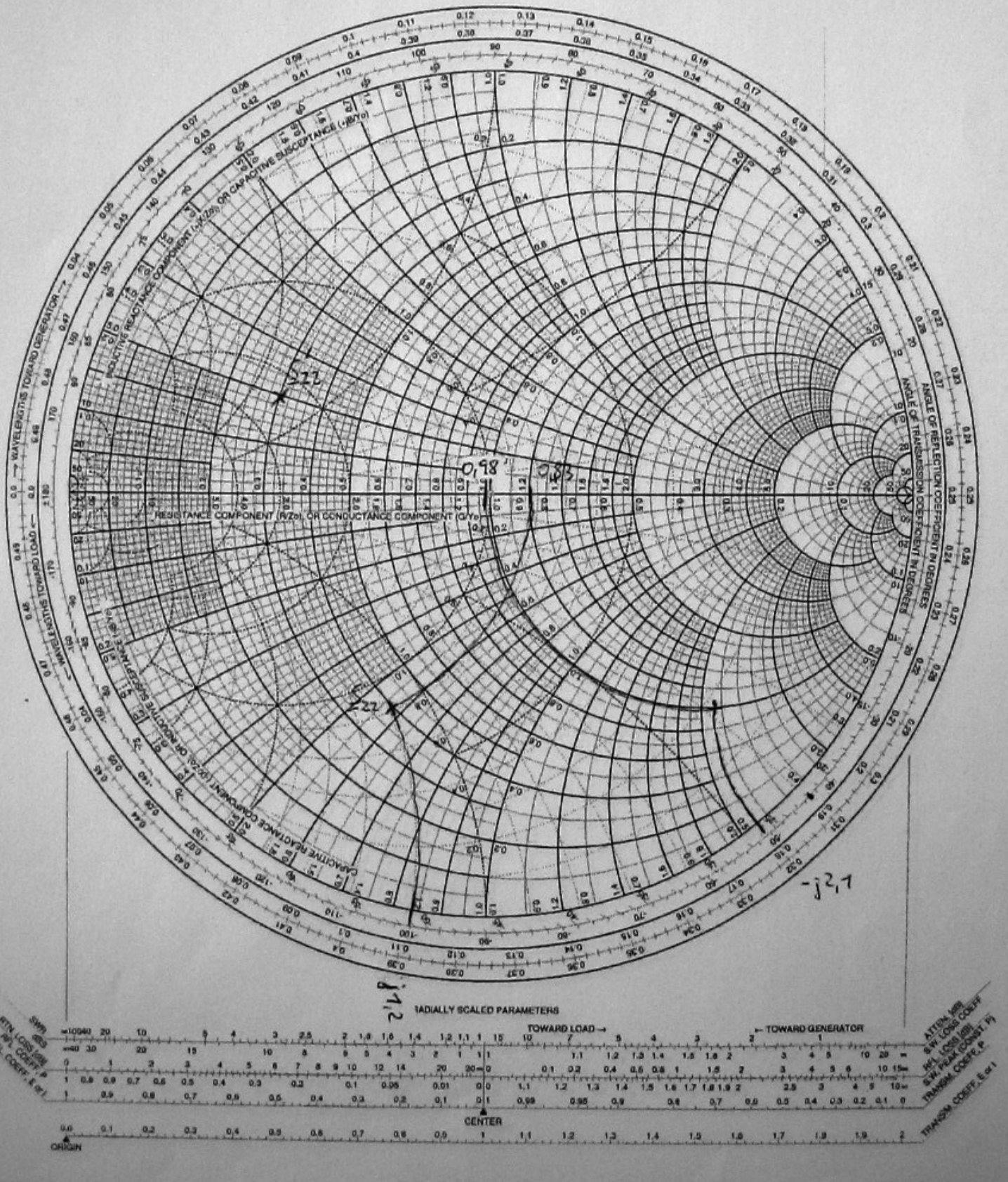
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt b), c)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

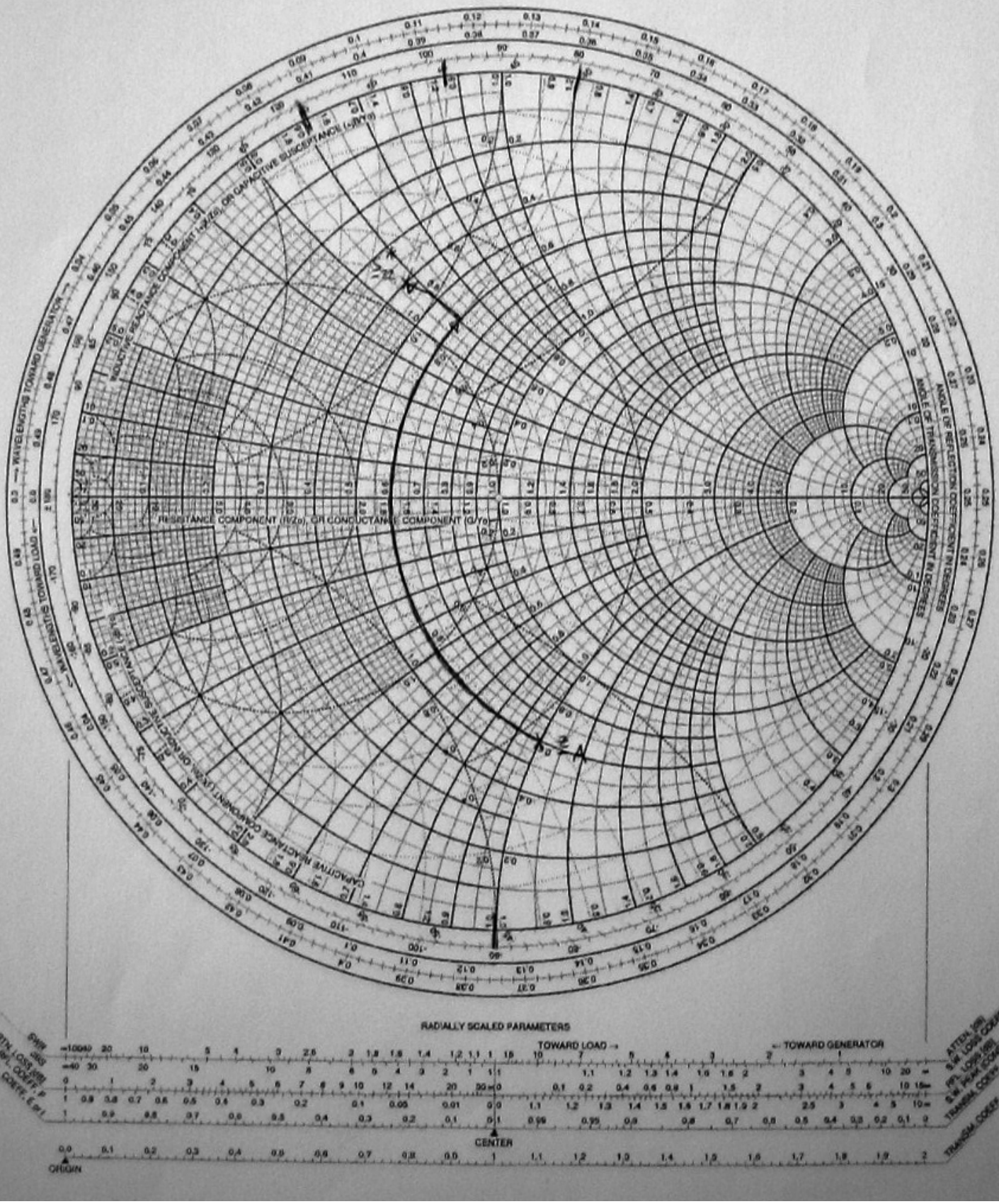
Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____

Möglichkeit #1



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

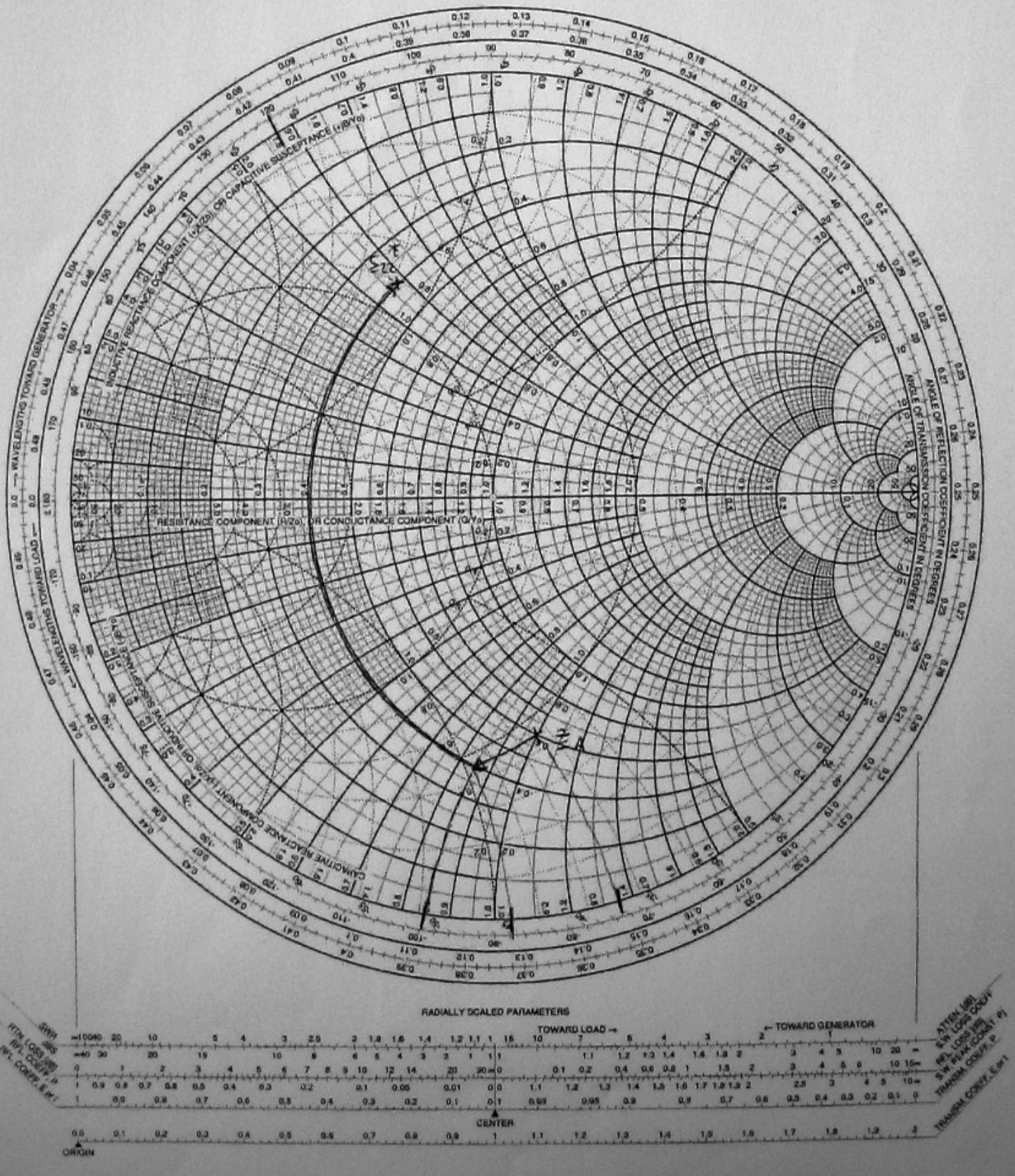
Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____

Möglichkeit #2



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

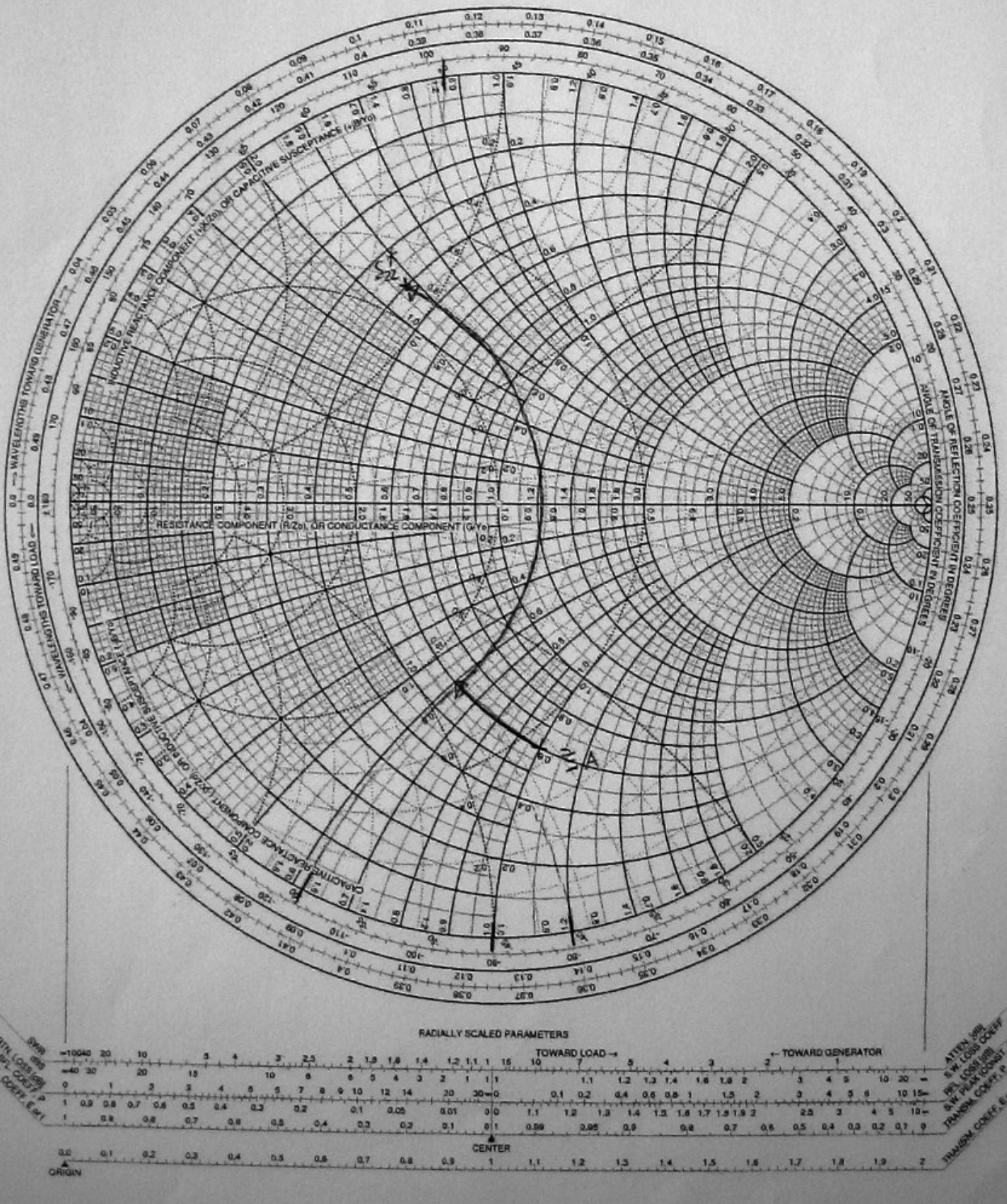
Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____

Möglichkeit #3



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

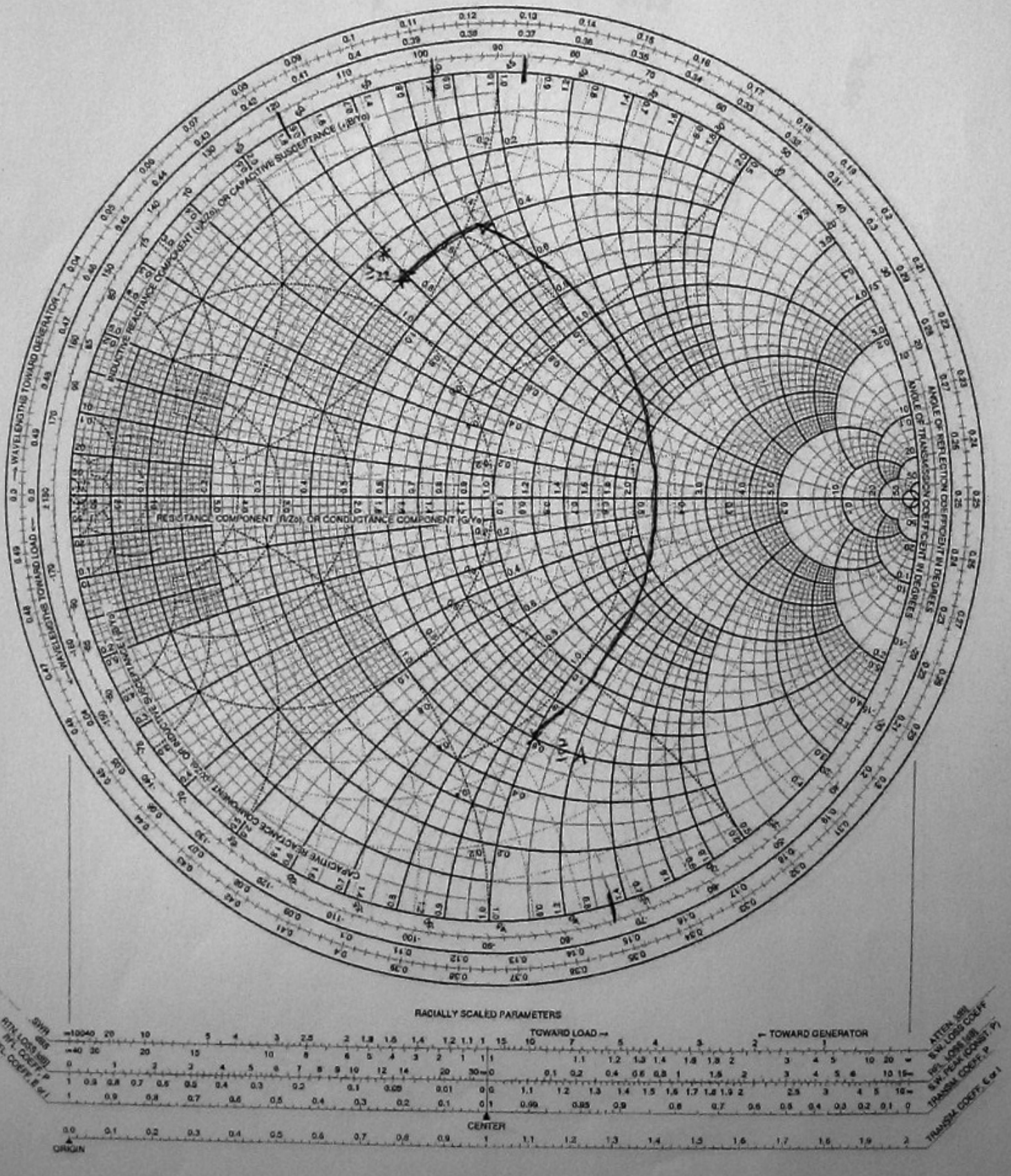
Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____

Möglichkeit #4



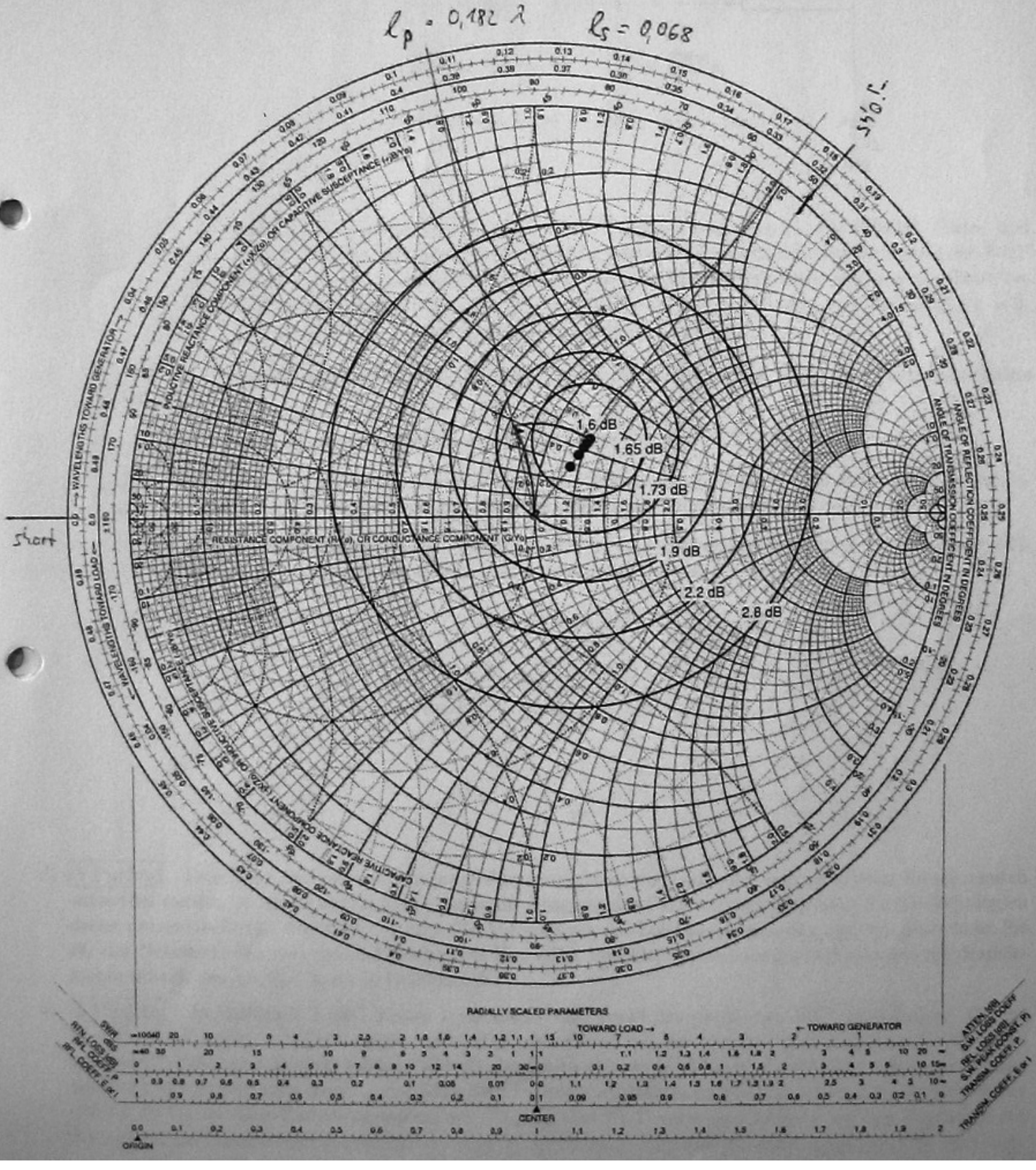
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2007

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt e)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



F07

Unterschied $\vec{F}$ und $\tilde{\vec{F}}$

(1) a) Fläche $\vec{F}$ $\qquad \vec{F} = \vec{e}_z \cdot \left(6 \cdot \frac{b^2}{4} + b \cdot \frac{b}{4}\right)$

$= \frac{7}{4} b^2 \cdot \vec{e}_z$ $\qquad$ 4 zählen von $\frac{b}{4}$ Quadraten

$\Phi_0 = B_0 \cdot (\vec{e}_z)^2 \cdot \frac{7}{4} b^2 = \frac{7}{4} b^2 B_0$

b) $\tilde{\Phi}_0 = B_0 \cdot (\vec{e}_z)^2 \cdot \frac{6}{4} b^2 = \frac{3}{2} b^2 B_0$ analog

c) Da $\vec{B}$ homogen und zeitlich konstant:

$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot \cos(\omega t)$

$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}_0 \cdot \cos(\omega t)$

d) Da der Pfad $A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$

nur in <u>idealen</u> Leitern verläuft, ist

das Pfadintegral über $\vec{B} \equiv 0$

e) Bestimmung von $I(t)$:

Es gilt $\vec{j} = \sigma_S \cdot \vec{E}$ in der Schicht S

In S bildet sich eine Stromverteilung

$\vec{j}(y) = -\vec{e}_x \cdot j_x(y)$ aus. $\qquad$ viele Richtg von $I(t)$ in Skizze

$$I(t) = d \int_0^{b/4} \vec{e}_x \cdot j_x(y) \cdot (-\vec{e}_x)\, dy$$

$$= -d \int_0^{b/4} j_x(y)\, dy$$

$$J_x(y) = \sigma_s \cdot E_x(y)$$

Induktion: Umlauf Schalten (s. d.)

$$\int_b^0 E_x(y)\,dx = -\dot{\Phi}(y)$$

Variiert linear in y zw. $\tilde{\Phi}(t)$ und $\hat{\Phi}(t)$

?

$$\Rightarrow E_x(y) = +\frac{1}{b}\dot{\Phi}(y) = B_0 \cdot \frac{1}{b} \cdot (-\omega) \cdot \sin(\omega t) \cdot \left[\frac{3}{2}b^2 + \left(\frac{y}{b/4}\right)\cdot\frac{b^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow J_x(y) = -\sigma_s \cdot \frac{\omega}{b}\sin(\omega t)\left[\frac{3}{2}b^2 + yb\right] B_0$$

$$I(t) = -d \cdot B_0 \int_0^{b/4} -\sigma_s \cdot \frac{\omega}{b} \cdot \sin(\omega t)\cdot\left[\frac{3}{2}b^2 + yb\right] dy$$

$$= B_0\, d\, \sigma_s \frac{\omega}{b}\sin(\omega t)\left[\frac{3}{2}b^2\cdot\frac{b}{4} + \frac{1}{2}b\cdot\frac{b^2}{16}\right]$$

$$= B_0 \cdot d \cdot \sigma_s \cdot \frac{\omega}{b}\sin(\omega t)\left[\frac{3}{8}b^{3\!/2} + \frac{1}{2}\frac{b^{3\!/2}}{16}\right]$$

$$= B_0 \cdot d \cdot \sigma_s \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot (13/32)\, b^2$$

(2) a) $\vec{E}(z) = E_0 \exp(-j k_1 z)\cdot \vec{e}_y$

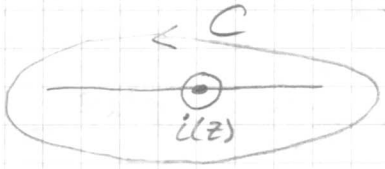
$$\underline{u}(z) = \int_{y=0}^{a} \vec{E}(z)\,d\vec{r} = \int_0^a E_0 e^{-jk_1 z}\cdot dy = E_0 \cdot a \cdot e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{-k_1}{\omega\mu_0} E_0\, e^{-jk_1 z}\cdot \vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{H}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \cdot E_0 \cdot e^{-j\underline{k}_1 z} \cdot \vec{e}_x = -\frac{1}{Z_F} E_0 \cdot e^{-j\underline{k}_1 z} \cdot \vec{e}_x$$

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

untere Platte



$$\underline{i}(z) = \oint_C \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \int_b^0 H_x(z)\, dx = -b \cdot H_x(z)$$

$$\underline{i}(z) = +\frac{1}{Z_F} \cdot b \cdot E_0 \cdot e^{-j\underline{k}_1 z}$$

$$Z_L = \frac{\underline{u}(z)}{\underline{i}(z)} = \frac{a}{b} \cdot Z_F = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

b) $\boxed{z=0}$ H_{tang} stetig, E_{tang} stetig

hier H_x stetig, E_y stetig

somit $E_{y1} = E_{y2} \Rightarrow \underline{u}_1(0) = \underline{u}_2(0)$ Spannung } stetig

$H_{x1} = H_{x2} \Rightarrow \underline{i}_1(0) = \underline{i}_2(0)$ Strom }

c) $\boxed{z=\ell}$ $E_{tang} = 0$ am idealen Leiter

$\Rightarrow E_{y2}(z=\ell) = 0$

$\Rightarrow \underline{u}(z=\ell) = 0$

d) Gebiet 1 ($z<0$)

$$\underline{u}_1(z) = a \cdot E_0 \cdot (e^{-j\underline{k}_1 z} + r \cdot e^{j\underline{k}_1 z}) \qquad \underline{k}_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}$$

$$\underline{i}_1(z) = \frac{b}{Z_{F1}} \cdot E_0 (e^{-j\underline{k}_1 z} - r \cdot e^{j\underline{k}_1 z}) \qquad Z_{F1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$$

Gebiet 2 ($z > 0$)

$k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}$

$$\underline{u}_2(z) = a \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 z} + a \cdot \underline{E}_2^r \cdot e^{j k_2 z}$$

$$\underline{i}_2(z) = \frac{b}{Z_{F2}} \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 z} - \frac{b}{Z_{F2}} \cdot \underline{E}_2^r \cdot e^{j k_2 z} \qquad Z_{F2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}$$

mit c) folgt:

$$\underline{u}_2(l) = a \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 \cdot l} + a \underline{E}_2^r \cdot e^{j k_2 l} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_2^r = - \underline{E}_2^l \cdot e^{-2 j k_2 l}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}_2(z) = a \cdot \underline{E}_2^l \left(e^{-j k_2 z} - e^{j k_2 (z-2l)} \right) \quad \Big| e^{-j k_2 l} \text{ ausklammern}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_2(z) = a \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 l} \left(e^{-j k_2 (z-l)} - e^{j k_2 (z-l)} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_2(z) = 2 \cdot j \cdot a \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 l} \cdot \sin\left(k_2 (l-z)\right)$$

analog $\Rightarrow \underline{i}_2(z) = \frac{b}{Z_{F2}} \underline{E}_2^l e^{-j k_2 l} \left(e^{-j k_2 (z-l)} + e^{j k_2 (z-l)} \right)$

$$\Rightarrow \underline{i}_2(z) = 2 \cdot \frac{b}{Z_{F2}} \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 l} \cdot \cos\left(k_2 (l-z)\right)$$

mit b) folgt:

$$\underline{u}_1(0) = a \cdot E_0 (1+r) = 2 \cdot j \cdot a \cdot \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 l} \sin(k_2 l) = \underline{u}_2(0)$$

$$\underline{i}_1(0) = \frac{b}{Z_{F1}} E_0 (1-r) = 2 \cdot \frac{b}{Z_{F2}} \underline{E}_2^l \cdot e^{-j k_2 l} \cos(k_2 l) = \underline{i}_2(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}_1(0)}{\underline{i}_1(0)} = \frac{\underline{u}_2(0)}{\underline{i}_2(0)} = j \cdot \frac{a \cdot Z_{F2}}{b} \cdot \tan(k_2 \cdot l)$$

$$= j \cdot Z_{L2} \cdot \tan(k_2 \cdot l)$$

e) $k_2 \cdot l = \pi \Rightarrow \tan(k_2 \cdot l) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\underline{u}_1(0)}{\underline{i}_1(0)} = 0 \quad \text{(Kurzschluß)}$$

f) $k_2 \cdot l = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty \Rightarrow \frac{\underline{u}_1(0)}{\underline{i}_1(0)} \to \infty$

(Leerlauf)

(3) a) $\Delta \vec{\underline{F}}_{1,2} + \omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_0 \vec{\underline{F}}_{1,2} = \vec{0}$

$$\Rightarrow f_{1,2}''(y) \cdot e^{-jk_{eff}z} - k_{eff}^2 f_{1,2}(y) \cdot e^{-jk_{eff}z} + \omega^2 \varepsilon_{1,2} \mu_0 f_{1,2}(y) e^{-jk_{eff}z} = 0$$

$k_{eff} = \omega \sqrt{\varepsilon_{eff} \mu_0}$

$$\Rightarrow f_1''(y) + (\varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 - \varepsilon_{eff} \mu_0 \omega^2) f_1(y) = 0$$

$$\Rightarrow f_1''(y) + p_1^2 f_1(y) = 0 \quad \text{mit} \quad p_1^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_{eff})$$

$$= \omega^2 \mu_0 (3\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})$$

analog

$$f_2''(y) - p_2^2 f_2(y) = 0 \quad \text{mit} \quad p_2^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{eff} - \varepsilon_2)$$

$$= \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{eff} - \varepsilon_0)$$

Beachte $\varepsilon_0 < \varepsilon_{eff} < 3\varepsilon_0$

$$\Rightarrow p_1^2 > 0, \; p_2^2 > 0 \Rightarrow p_1, p_2 \text{ reell}$$

Lösungen:

$$f_1(y) = A_1 \cdot \cos(p_1 y) + B_1 \cdot \sin(p_1 y)$$

$$f_2(y) = A_2 e^{p_2 y} + B_2 e^{-p_2 y}$$

b) Grenzbed. bei $y = 0$ $\quad E_{tang} = 0$ (idealer Leiter!)

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{x1}(y=0) = 0$$

$$\vec{\underline{E}}_1 = -e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0} \Rightarrow f_1(y) = A_1 \cos(p_1 y)$$

$$\vec{\underline{E}}_2 = -e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z} \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{e}_x = -e^{j\underline{\gamma}_{eff} z} p_2 (A_2 e^{p_2 y} - B_2 e^{-p_2 y}) \vec{e}_x$$

$$\vec{\underline{E}}_2 \to 0 \text{ für } y \to \infty \Rightarrow \boxed{A_2 = 0} \Rightarrow f_2(y) = B_2 e^{-p_2 y}$$

c) Grenzbed. bei $y = h$ $\quad E_{tang} = \text{stetig}$ $\quad H_{tang} = \text{stetig}$

$$\Rightarrow \quad \underline{E}_{x1}(y=h) = \underline{E}_{x2}(y=\ell)$$

$$\underline{H}_{z1}(y=\ell) = \underline{H}_{z2}(y=\ell)$$

$$\underline{H}_{x1}(y=h) = \underline{H}_{x2}(y=\ell) \quad \text{erfüllt da } \underline{H}_x \equiv 0$$

$$\underline{E}_{x1}(y=\ell) = \underline{E}_{x2}(y=\ell) \Rightarrow e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z} A_1 p_1 \sin(p_1 \ell) = e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z} B_2 p_2 e^{-p_2 h}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 p_1 \sin(p_1 \ell) = B_2 p_2 e^{-p_2 h}$$

$$\underline{H}_{z1}(y=h) = \underline{H}_{z2}(y=\ell) \Rightarrow \frac{e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z}}{j\omega\mu_0} (k_1^2 - \underline{\gamma}_{eff}^2) A_1 \cdot \cos(p_1 \ell)$$

$$= \frac{e^{-j\underline{\gamma}_{eff} z}}{j\omega\mu_0} (k_2^2 - \underline{\gamma}_{eff}^2) B_2 \cdot e^{-p_2 h}$$

$$k_1^2 - k_{eff}^2 = \omega^2 \mu_0 3\varepsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff} = p_1^2$$

$$k_2^2 - k_{eff}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff} = -p_2^2$$

$$\Rightarrow A_1 p_1^2 \cos(p_1 l) = -B_2 p_2^2 e^{-p_2 l}$$

$$\frac{1}{p_1} \tan(p_1 l) = -\frac{1}{p_2} \Rightarrow \tan(p_1 l) = -\frac{p_1}{p_2} \quad \text{q.e.d}$$

Als hier gilt $p_1 l = \frac{3\pi}{4}$

d) $\tan(p_1 l) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 = \frac{3\pi}{4l}$$

$$p_1 = \omega \sqrt{\mu_0 (3\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})} = \frac{3\pi}{4l} \qquad p_2 = \omega \sqrt{\mu_0 (\varepsilon_{eff} - \varepsilon_0)} = \frac{3\pi}{4l}$$

$$\Rightarrow 3\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff} = \varepsilon_{eff} - \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{eff} = 2\varepsilon_0 \qquad k_{eff} = \omega \sqrt{2\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$p_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{3\pi}{4l} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi}{4l} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

e) $\vec{E}_1 = \vec{e}_x A_1 e^{-j\omega\sqrt{2\varepsilon_0\mu_0} z} \frac{3\pi}{4l}$ si $\left(\frac{3\pi}{4} \; y/l\right)$

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x A_1 \frac{3\pi}{4l} e^{-j \frac{3\pi\sqrt{2}}{4l} z} \cdot \text{si}\left(\frac{3\pi}{4} \; y/l\right)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_x B_2 e^{-j\omega\sqrt{2\varepsilon_0\mu_0}} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4} y/l} \cdot \frac{3\pi}{4l}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_x B_2 \frac{3\pi}{4l} e^{-j\frac{3\sqrt{2}\pi}{4l} z} \; e^{-\frac{3\pi}{4} y/l}$$

$$\underline{B}_2 = A_1 \frac{p_1}{p_2} e^{+p_2 \ell} \sin(p_1 \ell) = A_1 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \vec{\underline{E}}_2 = \vec{e}_x \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 e^{-j \frac{3\sqrt{2}\pi}{4\ell} z} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}\left(1 - \frac{y}{\ell}\right)}$$

f) Forderung: $\left| \frac{\underline{E}_{2x}(y=H)}{\underline{E}_{2x}(y=\ell)} \right| \leq 10^{-2}$

$$\Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}\left(1 - \frac{H}{\ell}\right)} \leq 10^{-2} \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}\left(\frac{H}{\ell} - 1\right)} \geq 10^2$$

$$\frac{3\pi}{4}\left(H/\ell - 1\right) \geq \ln(10^2) \Rightarrow \frac{H}{\ell} \geq \frac{4}{3\pi} \underbrace{\ln(10^2)}_{\approx 2} + 1$$

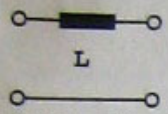
$$\approx 3$$

$$\Rightarrow n =: \frac{H}{\ell} \geq 3$$

$$\Rightarrow n_{min} = 3$$

Lösung zu Aufgabe 5 F07 A5

a)



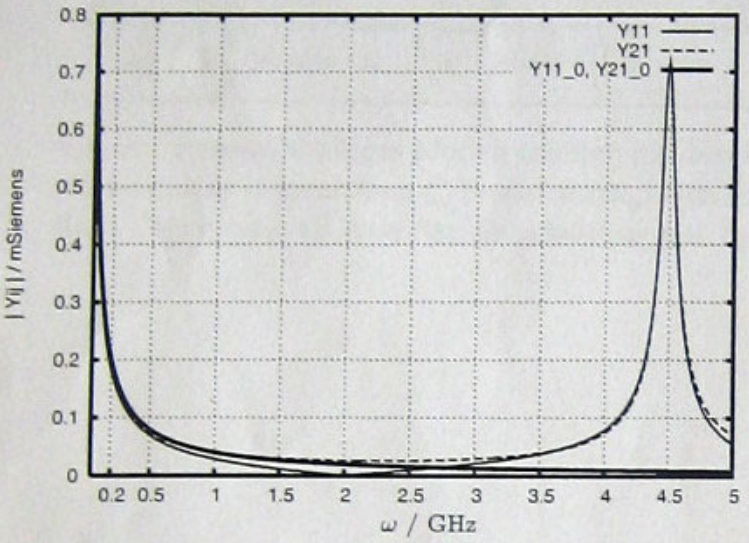
Gültig für $d \ll \lambda$.

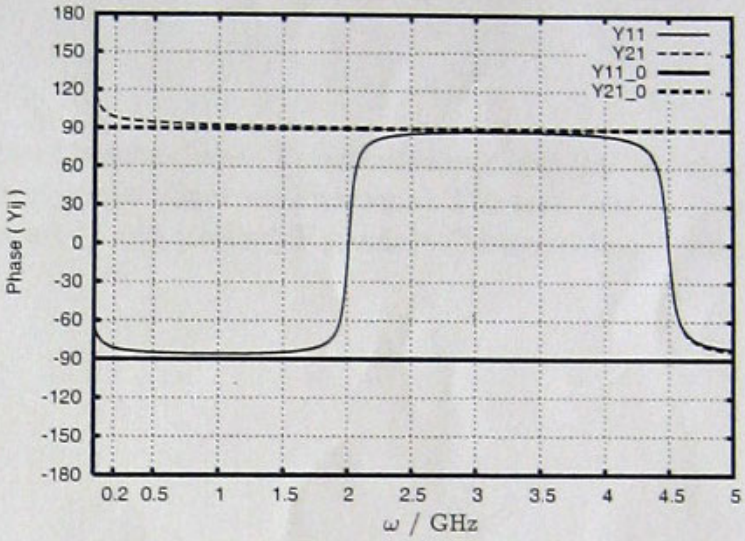
b) Admittanzparameter des Modells 0. Ordnung:

$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{j\omega L} = -\frac{j}{\omega L}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{j\omega L} = \frac{j}{\omega L}$$

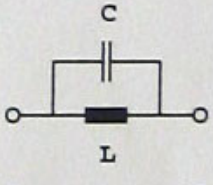
Ablesen: $|\underline{Y}_{11}| \approx 0.2\,\mathrm{S}$ bei $\omega = 0.2\,\mathrm{GHz} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega|\underline{Y}_{11}|} = \frac{1}{0.2\,\mathrm{S}*0.2\,\mathrm{GHz}} = \frac{1}{0.04}\,\mathrm{nH} = 25\,\mathrm{nH}$





c) Die Resonanz kann nur beschrieben werden, wenn eine Kapazität hinzugefügt wird. Physikalisch machen 2 Möglichkeiten Sinn:

Variante a (Kapazität zwischen den einzelnen Leitern)

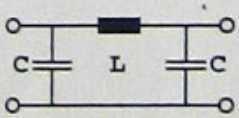


$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -j\omega C - \frac{1}{j\omega L}$$

Diese Variante scheidet aus, weil sowohl $\underline{Y}_{11}$ als auch $\underline{Y}_{21}$ bei der Frequenz mit $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ einen Vorzeichenwechsel besitzen, die numerisch simulierten Daten jedoch nur für $\underline{Y}_{11}$ einen Vorzeichenwechsel vorhersagen.

Variante b (Kapazität zur Massemetallisierung)



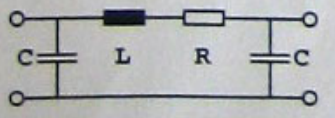
$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{-\frac{\underline{U}_1}{j\omega L}}{\underline{U}_1} = -\frac{1}{j\omega L}$$

Hier gibt es bei $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ einen Vorzeichenwechsel nur von $\underline{Y}_{11}$.

$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4*10^{18}\,\mathrm{Hz}^2*25*10^{-9}\,\mathrm{H}} = \frac{1}{10^{11}}\,\mathrm{F} = 10\,\mathrm{pF}$

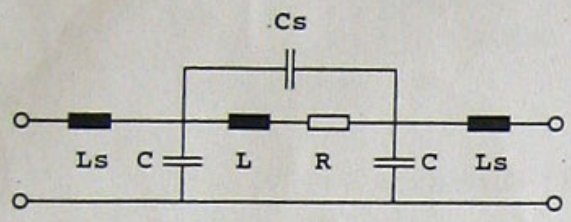
d)



Admittanzparameter des verlustbehafteten Modells 1. Ordnung:

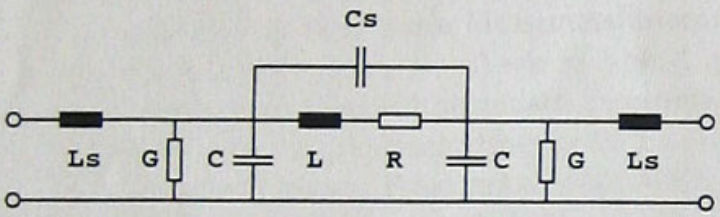
$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\frac{1}{R+j\omega L} \Rightarrow R + j\omega L = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\underline{Y}_{21}^*}{|\underline{Y}_{21}|^2}$. Dies ist eine komplexe Gleichung, wir benötigen nur den Realteil $\Rightarrow R = -\frac{\Re(\underline{Y}_{21})}{|\underline{Y}_{21}|^2} = -\frac{\cos(\arg(\underline{Y}_{21}))}{|\underline{Y}_{21}|}$.

e)



Die Resonanz bei $\omega = 4.5\,\mathrm{GHz}$ ist eine Serienresonanz ($\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{21} \to \infty$). Da aufgrund der leitenden Verbindung zwischen den Toren eine Serienkapazität physikalisch nicht sinnvoll ist, kommt nur eine weitere Serieninduktivität in Frage. Diese bildet zusammen mit der bisher nicht berücksichtigten Streukapazität zwischen den einzelnen Leiterabschnitten die Serienresonanz.

f)



Für ein allgemeingültiges Modell müßten die durch $\tan\delta$ beschriebenen Polarisationsverluste der Dielektrika als komplexe Kapazitäten $\underline{C}$ berücksichtigt werden (da proportional zur Frequenz). Für eine feste Frequenz kann dies immer als eine Parallelschaltung aus Leitwert G und (reeller) Kapazität C beschrieben werden.

Lösung zu Aufgabe 6 , Elektromagn. Felder EE; F2007

a) ESB: siehe Skript

$R_G = 20\ \Omega$, $\omega C_{GS} = \frac{1}{15}\ S$, $\omega C_{DS} = 0.015\ S$ und $R_{DS} = \frac{50}{0.9}\ \Omega$

b) $\underline{S}_{21} = \frac{\underline{U}_2 - Z_0\underline{I}_2}{\underline{U}_1 + Z_0\underline{I}_1} = \frac{-2Z_0\underline{I}_2}{\underline{U}_1 + Z_0\underline{I}_1}$

$-2Z_0\underline{I}_2 = -2\frac{g_m U_g}{\frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} + \frac{1}{Z_0}}$

$\underline{U}_1 + Z_0\underline{I}_1 = \underline{U}_1(1 + \frac{Z_0}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{GS}}}) = \underline{U}_g(1 + j\omega C_{GS}R_G)(1 + \frac{Z_0}{R_g + \frac{1}{j\omega C_{GS}}}) = \underline{U}_g(1 + j\omega C_{GS}(R_g + Z_0))$

$\underline{S}_{21} = \frac{-2g_m}{\frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} + \frac{1}{Z_0}} \frac{1}{1 + j\omega C_{GS}(R_g + Z_0)}$

c) Transformation von $\underline{S}_{22}$ zu $\underline{Z}_L^*$:

$l_p = 0.210\lambda$

$l_s = 0.145\lambda$

d) $\underline{\Gamma}'_Q = 0.43\angle j169°$

e) Transformation vom Ursprung zu $\underline{\Gamma}'_Q$:

$\omega C \approx 1.2 * 0.02\ S$

$\omega L \approx 0.57 * 50\ \Omega$

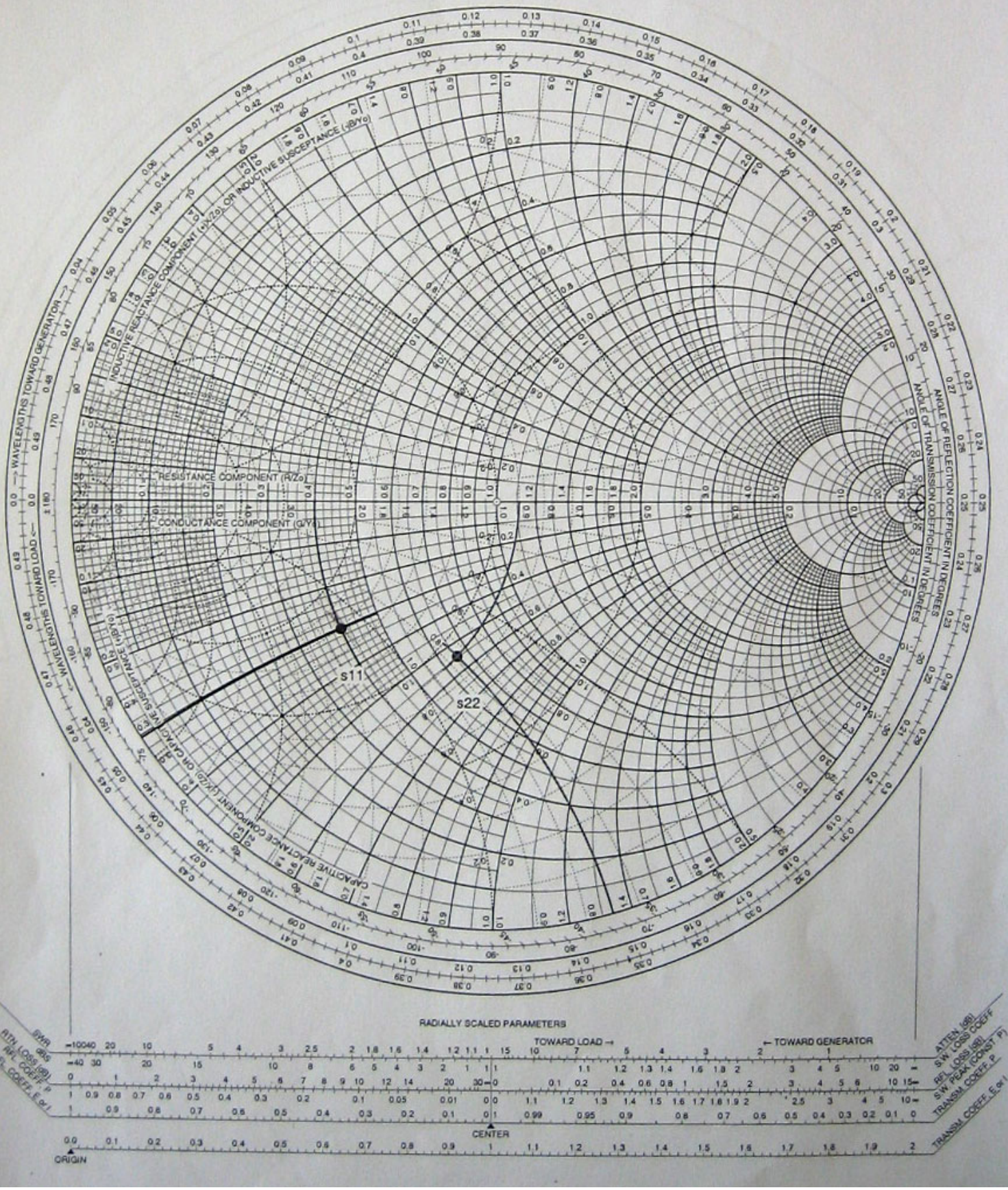
f) Transformation von $\underline{S}_{11}$ über zuvor entworfenes Eingangsanpassungsnetzwerk

$\Rightarrow \underline{\Gamma}_E \approx 0.27\angle j183°$

g) $\frac{P}{P_{verf.}} = 1 - |\underline{\Gamma}_E|^2$

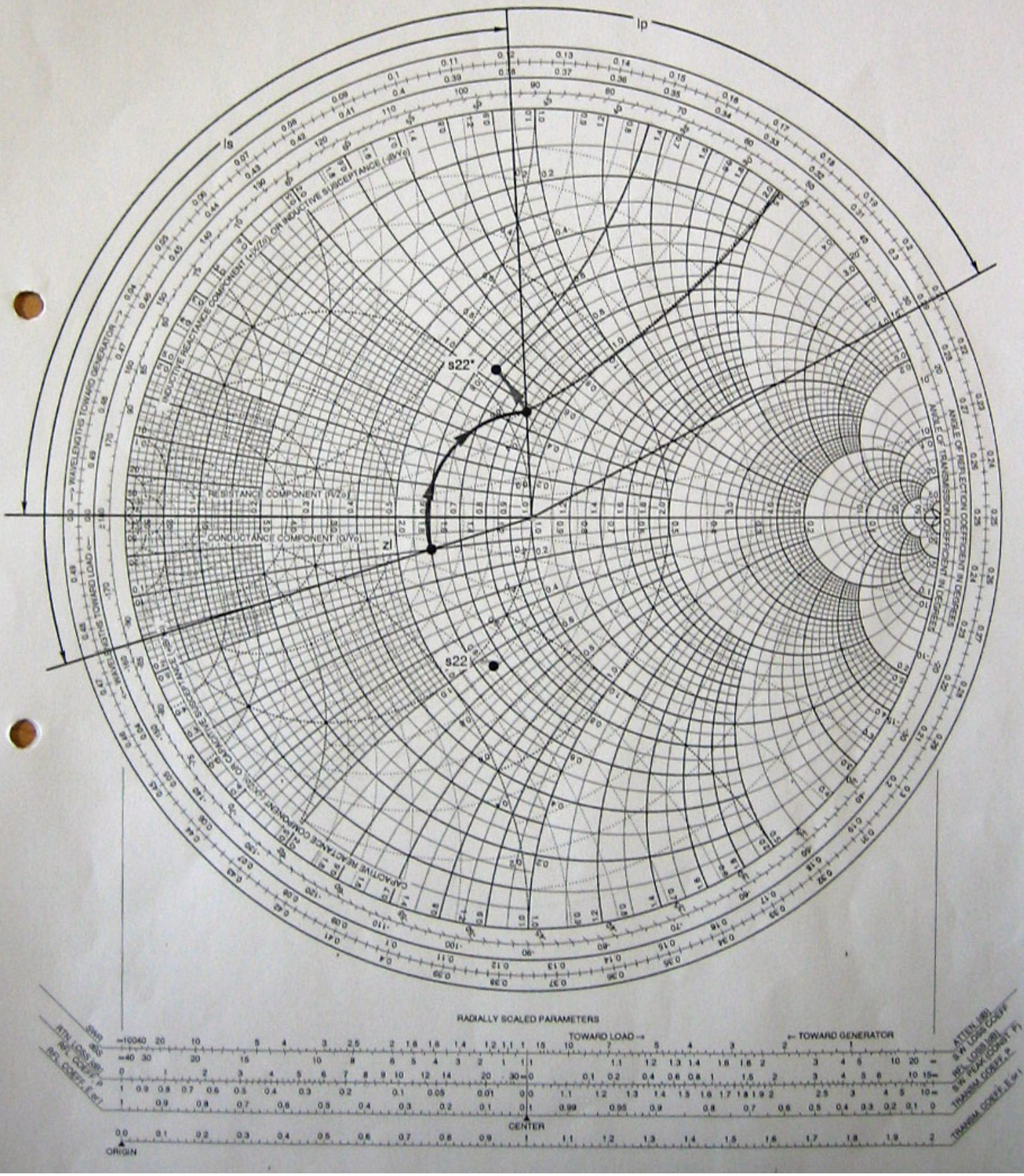
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6 Name: _____ Matr.Nr.: _____



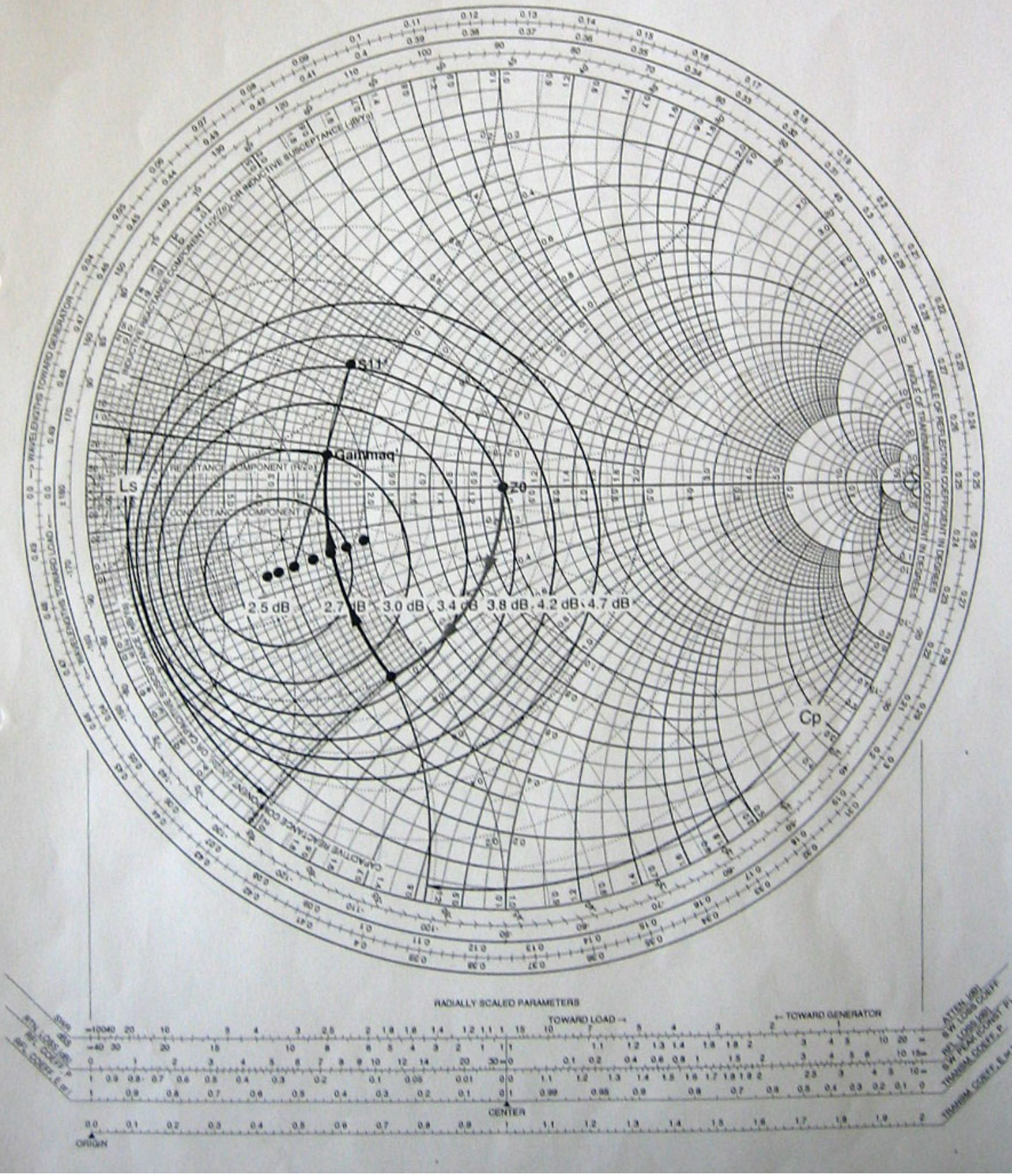
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6 Name: _____ Matr.Nr.: _____



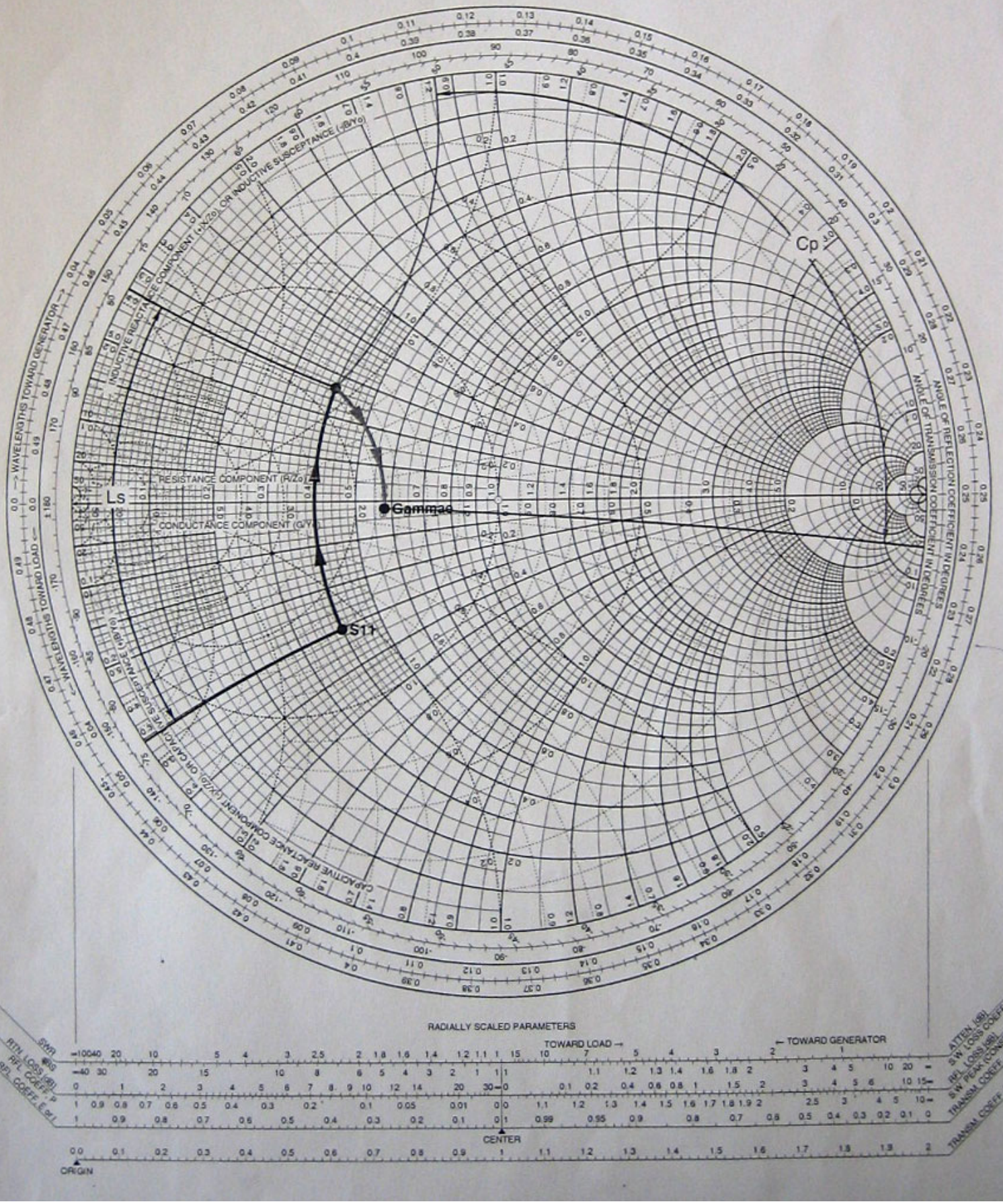
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6 Name: _____ Matr.Nr.: _____



KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 4 zu Aufgabe 6 Name: _____ Matr.Nr.: _____



H06 (1)

a) $\Phi = \int_{\text{Fläche (1),(2)...(8),(1)}} \vec{B}\, d\vec{F} = 2 \cdot \int_{\text{Fläche (1),(2),(3),(8)}} \vec{B}\, d\vec{F}$

$\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$

$d\vec{F} = \vec{e}_x \cdot \rho \cdot d\varphi\, d\rho$

|| Alternativ: 1/4 Kreisfläche $= \frac{\pi}{4} \rho^2$

$$\Phi = 2 \cdot B_0 \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\rho} \rho\, d\rho$$

$$= 2 \cdot B_0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2} = \frac{1}{2} \pi B_0 \rho^2$$

b) $\Phi(t) = \frac{\pi}{2} \cdot B_0 \cdot \rho^2 \cdot \cos(\omega t)$

c) $\vec{j} = \vec{e}_\varphi \cdot j_\varphi(\rho)$ Hinweis

z.Z. $\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot j_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$

$j_\rho = 0$, $\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$ q.e.d.

(*) $I_K(t) = d \cdot \int_{\rho_i}^{\rho_a} j_\varphi(\rho)\, d\rho$ $\qquad \vec{j} = \sigma_S \cdot \vec{E}$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{(1)\to(2)} \vec{E}\, d\vec{s} = -\dot{\Phi} \cdot \frac{1}{2}$$

$(1)\to(2)\to(3)\to(8)$

↖ nur ein Segment

auf idealen Leiter verschwindet $\vec{B}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{j_\varphi}{\sigma_S} \cdot \rho\, d\varphi = -\dot{\Phi} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot j_\varphi = \sigma_S \cdot \frac{\pi}{2} \cdot B_0 \cdot \rho^2 \sin(\omega t) \cdot \omega \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad j_\varphi = \frac{1}{2} \sigma_s \cdot B_0 \cdot \rho \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

in (*)

$$I_K(t) = d \cdot \sigma_s \cdot \frac{1}{2} \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{1}{2} (\rho_a^2 - \rho_i^2)$$

$$= \frac{\sigma_s \cdot d \cdot B_0 \cdot \omega}{4} \cdot \sin(\omega t) \cdot (\rho_a^2 - \rho_i^2)$$

d) $U_K(t)$ gesucht, so dass $I_K(t) \equiv 0$

$U_K(t)$ → zusätzliche Stromdichte $\vec{j}_{u_K}$
Bedingt

$$\vec{j}_{u_K}(\rho) = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{j}_{u_K,\varphi} \qquad E_K = \frac{U_K \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2} \rho} \quad (1 \text{ Segment})$$

$$\vec{j}_{u_K,\varphi} = \sigma_s \cdot E_K(\rho) = \sigma_s \cdot \frac{\frac{1}{2} U_K}{\frac{\pi}{2} \rho}$$

$$I_K(t) = 0 = \frac{\sigma_s \cdot d \cdot B_0 \cdot \omega}{4} \sin(\omega t)(\rho_a^2 - \rho_i^2) + \int_{\rho_i}^{\rho_a} \frac{1}{\rho} d\rho \cdot d \cdot \sigma_s \cdot \frac{U_K}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{B_0 \cdot \omega}{4} \cdot \sin(\omega t) \cdot (\rho_a^2 - \rho_i^2) = - \ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right) \cdot \frac{U_K}{\pi}$$

$$\Rightarrow U_K(t) = - \frac{\pi}{4} B_0 \omega \sin(\omega t) \cdot \frac{(\rho_a^2 - \rho_i^2)}{\ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)}$$

(2) a) $\vec{\underline{E}}(\rho, z) = \underline{E}(\rho) \cdot \exp(-j k_0 z) \cdot \vec{e}_\rho = \underline{E}_\rho \cdot \vec{e}_\rho$

Helmholtz-Gl.

$$(\Delta + k_0^2)\, \vec{\underline{E}}(\rho, z) = \vec{0}$$

Da $\vec{\underline{E}}$ nur Funktion von ρ und z sowie $\vec{\underline{E}} \parallel \vec{e}_\rho$ ist, gilt in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta \vec{\underline{E}}(\rho, z) = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \underline{E}_\rho) \right) + \frac{\partial^2 \underline{E}_\rho}{\partial z^2} \right] \cdot \vec{e}_\rho + 0$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \underline{E}_\rho) \right) - k_0^2 \underline{E}_\rho \right] \cdot \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{0} = (\Delta + k_0^2)\, \vec{\underline{E}}(\rho, z) = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \underline{E}_\rho) \right)$$

mit Lösung $\underline{E}_\rho \propto \rho$ und $\underline{E}_\rho \propto \frac{1}{\rho}$.

Wegen $\operatorname{div} \vec{\underline{E}}(\rho, z) = 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \underline{E}_\rho)$ bleibt nur $\underline{E} \propto \frac{1}{\rho}$ als Lösung übrig

Mit $U_0 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\underline{E}}(\rho, z=0)\, d\vec{r} = \int_a^b \underline{E}(\rho)\, d\rho$

$$= \int_a^b \frac{A}{\rho}\, d\rho = A \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow A = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

folgt: $\underline{E}(\rho) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{\rho}$

b) $\vec{\underline{H}}(\rho, z) = \frac{1}{Z} \cdot \vec{e}_x \times \vec{\underline{E}}(\rho, z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \exp(-j k_0 z) \cdot \vec{e}_\varphi$

c) $\underline{u}_1^{l}(z) = \int_{P_1'}^{P_2} \underline{\vec{E}}(\rho, z)\, d\vec{r} = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \exp(-j\underline{\gamma}_0 z) \int_a^b \frac{1}{\rho}\, d\rho$

$= U_0 \cdot \exp(-j\underline{\gamma}_0 z)$

$\underline{i}_1^{l}(z) = \oint_{C_0} \underline{\vec{H}}(\rho, z)\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi(\rho = a, z) \cdot a \cdot d\varphi$

$= 2\cdot\pi \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \exp(-j\underline{\gamma}_0 z)$

C_0 z. B. Kurve entlang d. Oberfläche des Innenleiters

$\Leftrightarrow \rho = a, \quad \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = 0 + (\underline{\vec{H}} \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot a \cdot d\varphi$

$Z_L = \frac{\underline{u}_1^{l}(z)}{\underline{i}_1^{l}(z)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \frac{\underline{\gamma}_0}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$

d) $\boxed{z=0}$ Hinweis Aufgabentext

$\underline{u}_1^{ges}(0) = \underline{u}_2^{ges}(0) \Leftrightarrow \underline{u}_1^{l}(0) + \underline{u}_1^{r}(0) = \underline{u}_2^{l}(0) + \underline{u}_2^{r}(0)$ (1)

$\underline{i}_1(0) = \underline{i}_2(0) + \underline{i}_S(0) = \underline{i}_2(0) + \underline{u}_1^{ges}(0)/R$ (2)

$\boxed{z=l}$ $\underline{u}_2^{ges}(l) = 0 = \underline{u}_2^{l}(l) + \underline{u}_2^{r}(l)$ (3)

e) $\underline{u}_1^{ges}(z) = \underline{u}_1^{l}(z) + \underline{u}_1^{r}(z) = \underline{U}_0 \cdot \exp(-j\underline{\gamma}_0 z) + \underline{U}_1^{r} \exp(j\underline{\gamma}_0 z)$

$\underline{u}_2^{ges}(z) = \underline{u}_2^{l}(z) + \underline{u}_2^{r}(z) = \underline{U}_2^{l} \exp(-j\underline{\gamma}_0 z) + \underline{U}_2^{r} \exp(j\underline{\gamma}_0 z)$

$\underline{i}_1^{ges}(z) = \frac{U_0}{Z_L} \cdot \exp(-j\underline{\gamma}_0 z) - \frac{U_1^{r}}{Z_L} \cdot \exp(j\underline{\gamma}_0 z)$

$$\underline{i}_2^{ges}(z) = \frac{\underline{u}_2^l}{Z_L} \cdot \exp(-j\xi_0 z) - \frac{\underline{u}_2^r}{Z_L} \cdot \exp(j\xi_0 z)$$

(3) → $0 = \underline{u}_2^l \exp(-j\xi_0 l) + \underline{u}_2^r \exp(j\xi_0 l)$

$$\Rightarrow \underline{u}_2^r = -\underline{u}_2^l \exp(-2j\xi_0 l)$$

(1) → $\underline{u}_0 + \underline{u}_1^r = \underline{u}_2^l + \underline{u}_2^r = \underline{u}_2^l (1 - \exp(-2j\xi_0 l))$

(2) → $\underline{u}_0 - \underline{u}_1^r = \underline{u}_2^l - \underline{u}_2^r + \frac{Z_L}{R}(\underline{u}_0 + \underline{u}_1^r)$

$$\Rightarrow \underline{u}_0 \left(1 - \frac{Z_L}{R}\right) - \underline{u}_1^r \left(1 + \frac{Z_L}{R}\right) = \underline{u}_2^l (1 + \exp(-2j\xi_0 l))$$

einsetzen von $\underline{u}_2^l$ aus dem vorherigen Teil liefert:

$$\underline{u}_0 \left(1 - \frac{Z_L}{R}\right) - \underline{u}_1^r \left(1 + \frac{Z_L}{R}\right) = \frac{(1 + \exp(-2j\xi_0 l))}{(1 - \exp(-2j\xi_0 l))} \cdot (\underline{u}_0 - \underline{u}_1^r)$$

$$= \frac{\cos(\xi_0 l)}{j \sin(\xi_0 l)} \cdot (\underline{u}_0 - \underline{u}_1^r) = -j \cot(\xi_0 l) \cdot (\underline{u}_0 - \underline{u}_1^r)$$

$$\Rightarrow \underline{u}_1^r = \underline{u}_0 \cdot \frac{1 - \frac{Z_L}{R} + j\cot(\xi_0 l)}{1 + \frac{Z_L}{R} - j\cot(\xi_0 l)}$$

f) Reflexionskoeffizient $\Gamma = 0$

$$0 = \Gamma = \frac{\underline{u}_1^r}{\underline{u}_0} \Rightarrow 0 = 1 - \frac{Z_L}{R} + j\cot(\xi_0 l)$$

ist erfüllt für $Z_L = R$ und $\xi_0 l = (n + \frac{1}{2})\pi$ $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow l = \frac{n + 1/2}{\xi_0} \pi$$

(3) a) $\underline{\vec{F}}_{1/2} = \Psi_{1/2}(y)\, e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_z$

Helmholtz $\Rightarrow$ $\Delta \underline{\vec{F}}_{1/2} + k_{1/2}^2 \underline{\vec{F}}_{1/2} = 0$; $k_{1/2} = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_{1/2}}$

$\Rightarrow \Psi_{1/2}''(y) - \beta^2 \Psi_{1/2}(y) + k_{1/2}^2 \Psi_{1/2}(y) = 0$

$\Rightarrow \Psi_1''(y) + p_1^2 \Psi_1(y) = 0$; $\Psi_2''(y) + p_2^2 \Psi_2(y) = 0$ (4)

mit $p_1 = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff}} = \omega\sqrt{\mu_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})}$

$p_2 = \sqrt{k_2^2 - \beta^2} = \sqrt{5\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{eff}} = \omega\sqrt{\mu_0 (5\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})}$

Lösung von (4)

$\Psi_1(y) = A_1 \cdot \cos(p_1 y) + B_1 \sin(p_1 y)$ (7)

$\Psi_2(y) = A_2 \cdot \cos[p_2(2b-y)] + B_2 \cdot \sin[p_2(2b-y)]$ (8)

b) $y = 0, 2b$: Mag. Wände $\Rightarrow H_{tang} = 0 \Rightarrow H_z = 0$ für $y = 0, 2b$

$H_{z,1/2} \sim \Psi_{1/2} \Rightarrow \Psi_1(y=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ (10)

$\Psi_2(y = 2b) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$ (11)

$$\underline{\vec{E}}_1\Big|_{y=b} = -e^{-j\beta z} \frac{d\Psi_1}{dy} \vec{e}_x = -B_1 p_1 \cos(p_1 b)\, e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{H}}_1\Big|_{y=b} = -\frac{e^{-j\beta z}}{\mu_0 \omega} \left(\beta p_1 B_1 \cos(p_1 b) \vec{e}_x + j p_1^2 B_1 \sin(p_1 b) \vec{e}_z \right)$$

$$\underline{\vec{H}}_1\Big|_{y=b} = -\frac{B_1 p_1}{\mu_0 \omega} e^{-j\beta z} \cos(p_1 b) \left[\beta \vec{e}_x + j p_1 \tan(p_1 b) \vec{e}_z \right]$$

c) $y = b$ $\quad E_{tang}$ stetig $\Rightarrow E_x$ stetig $\Rightarrow \frac{d\Psi}{dy}$ stetig

H_{tang} stetig $\Rightarrow H_z$ stetig ($H_x \equiv 0$!)

$\Rightarrow p^2 \Psi$ stetig

Somit: $$\left.\frac{d\Psi_1}{dy}\right|_{y=b} = \left.\frac{d\Psi_2}{dy}\right|_{y=b}$$

(16)

$$p_1^2 \Psi_1(y=b) = p_2^2 \Psi_2(y=b)$$

Mit (7), (8), (10), (11) folgt aus (16)

$$B_1 p_1 \cos(p_1 b) = -B_2 p_2 \cos(p_2 b)$$

$$B_1 p_1^2 \sin(p_1 b) = B_2 p_2^2 \sin(p_2 b)$$

$$\Rightarrow \quad p_1 \tan(p_1 b) = -p_2 \tan(p_2 b) \qquad (19)$$

oder $p_1 \tan(p_1 b) + p_2 \tan(p_2 b) = 0$ q.e.d.

d) $k_1 b = b \cdot \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 10^{-2}$

$$\Rightarrow p_1 b = \omega \sqrt{\mu_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})} \cdot b = \underbrace{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, b}_{= k_1 b} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}} = 10^{-2} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}}$$

$$p_2 b = \omega \sqrt{\mu_0 (5\varepsilon_0 - \varepsilon_{eff})}\, b = \underbrace{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, b}_{k_1 b} \sqrt{5 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}} = 10^{-2} \sqrt{5 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}}$$

Annahme: $0 < \varepsilon_{eff} < 5\varepsilon_0$

(23) $\Rightarrow \left| \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}} \right| < \left| \sqrt{1-5} \right| = 2 \Rightarrow |p_1 b| < 2 \cdot 10^{-2} \ll 1$

(24) $\Rightarrow \left| \sqrt{5 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}} \right| < \left| \sqrt{5-0} \right| = \sqrt{5} \Rightarrow |p_2 b| < \sqrt{5} \cdot 10^{-2} \ll 1$

Mit (23), (24) und Hinweis folgt aus (19)

$$p_1 \tan(p_1 b) \approx p_1^2 b = -p_2 \tan(p_2 b) \approx -p_2^2 b$$

$$\Rightarrow \quad p_1^2 b \approx \overset{\ominus}{?} p_2^2 b$$

also $\quad \xi_1^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}\right) = -\xi_1^2 \left(5 - \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}\right) \Rightarrow 6 = 2 \cdot \frac{\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_0}$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{eff} = 3\varepsilon_0}} \qquad \text{erfüllt Annahme}$$

Somit: $\quad p_1 = \frac{1}{b} 10^{-2} \sqrt{-2} = j\sqrt{2}\, 10^{-2} \frac{1}{b}$

$$p_2 = \frac{1}{b} 10^{-2} \sqrt{2} = \sqrt{2}\, 10^{-2} \frac{1}{b}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_0 3\varepsilon_0} = \frac{1}{b} \sqrt{3} \cdot 10^{-2}$$

(29) $v_{phase} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}} c_0$ ($c \hat{=}$ Vakuum-gesch

Aus (29): $\quad \frac{\partial v_{phase}}{\partial \omega} = 0$ wie bei TEM-Welle

e) $\xi_1 b = 10^{-2} \quad b = 1\,mm$

$$\Rightarrow \xi_1 b = \omega_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\, 1\,mm = 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \left[\omega_0 = \frac{10^{-2}}{mm} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{10^{-2}}{mm} c = \frac{10^{-2}}{mm} 3 \cdot 10^{11} \frac{mm}{s} \right.$$

$$\left. = 3 \cdot 10^9 \frac{1}{s} = 3\,GHz \right]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{\omega}{6} = 500\,MHz$$

Klausur EMF II EE H. G

4) a)

$C \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \frac{l w}{d_2}$

gültig für $l, w, d_2 \ll d_1$ (??) und $d_2 \ll l, w$ (keine Streufelder)

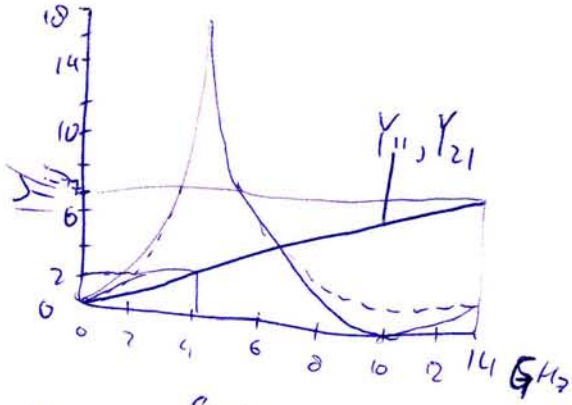
b) Admittanzparameter d. Modells 0. Ordnung:

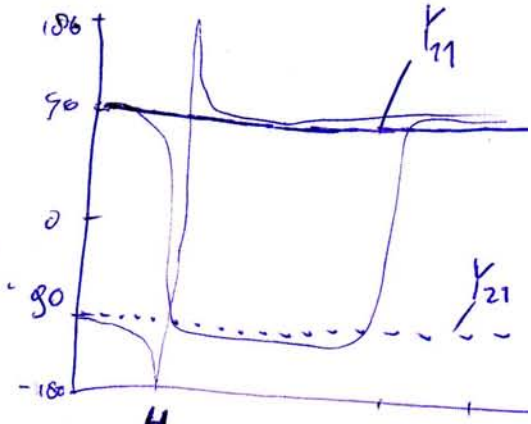
$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega C$

$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = -j\omega C$

Ablesen: $|\underline{Y}_{11}| \approx 1\,\text{mS}$ bei $\omega = 2\,\text{GHz}$

$\Rightarrow C = \frac{|\underline{Y}_{11}|}{\omega} = \frac{1\,\text{mS}}{2\,\text{GHz}} = 0{,}5\,\text{pF}$





c)

Resonanz: $\omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{16 \cdot 10^{18}\,\text{Hz}^2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-12}\,\text{F}} =$

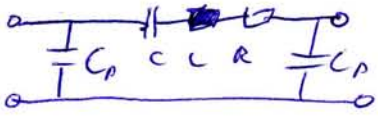
d)

Admittanzparameter d. Modells 1. Ordnung mit Verlusten:

$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}$. Bei der 1. Resonanzfrequenz gilt: $\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} = \frac{1}{16\,\text{mS}} = \frac{1}{16}\,\text{k}\Omega$.

R könnte auch über Y_{21} bestimmt werden ($\Rightarrow R = \frac{1}{18}\,\text{k}\Omega$).

Man sieht, dass das Modell 1. Ordnung bei dieser Frequenz schon nicht mehr stimmt.

e) 

Admittanzparameter d. vollständigen Modells 1. Ordnung:

$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} = j\omega C_p + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega L + R}$. Bei $\omega = 4\,\text{GHz}$ gilt

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$, also ist bei $\omega = 10\,\text{GHz}$ $\frac{4\omega L}{10} = \frac{10}{4\omega C}$

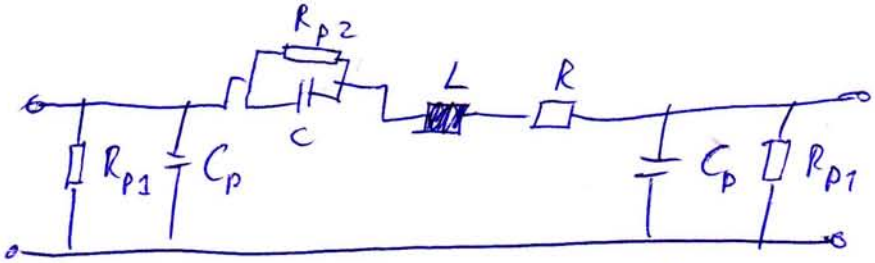
$\Rightarrow \frac{1}{j\omega L} + j\omega L = -j\frac{16\omega L}{100} + j\omega L = j\frac{84}{100} \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{8} \cdot 10^{-6}\,\Omega = j\cdot\frac{8400}{8}\,\Omega$.

R kann hier gegenüber L bei $\pm 10\,\%$ vernachlässigt werden $\Rightarrow$

$0 = Y_{11} \approx j\omega C_p + \frac{1}{j\frac{8400}{8}\,\Omega} \Rightarrow C_p \approx \frac{8}{\omega \cdot 8400\,\Omega} =$

$\frac{8}{84 \cdot 10^2}\,\text{F} = 2{,}1\,\text{pF}$

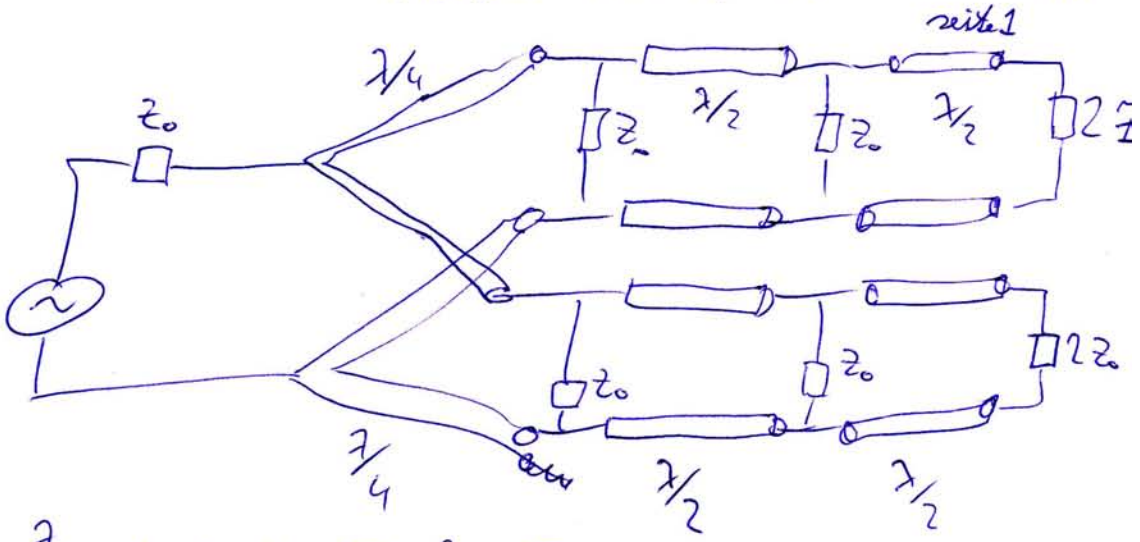
f)



Dielektrische Verluste sind als Leitwerte parallel zu den Kapazitäten zu modellieren, da sie durch die endliche Leitfähigkeit der Dielektrika entstehen.

Klausur EMF II EE M. Ø6

1) a)

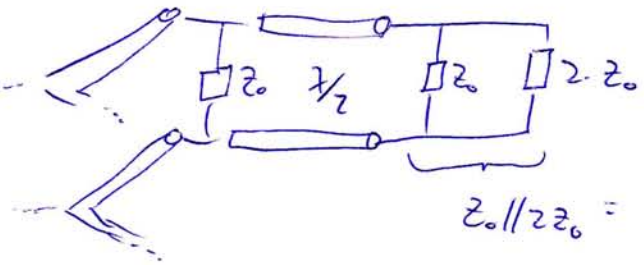


b) $l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \beta \cdot l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Z_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{jZ_L I_a}{\frac{j}{Z_L} U_a} = \frac{Z_L^2}{Z_a}$ ‖ $l = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \beta \cdot l = \pi$

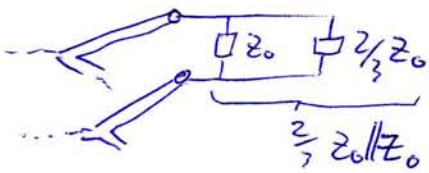
$\Rightarrow Z_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{-U_a}{-I_a} = Z$

$\lambda/2 \Rightarrow$



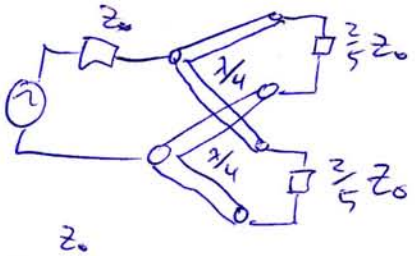
$Z_0 \| 2Z_0 = \frac{2}{3} Z_0$

$\lambda/2 \Rightarrow$

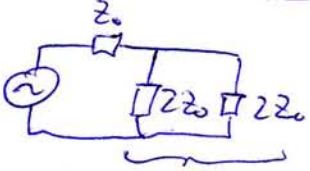


$\frac{2}{3} Z_0 \| Z_0 = \frac{2}{5} Z_0$

$\lambda/4 \Rightarrow$



$\frac{\lambda}{4} \Rightarrow Z_{in} = \frac{Z_L^2}{Z_a} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{5}} Z_0\right)^2}{\frac{2}{5} Z_0} = 2Z_0$



$Z_1 = Z_{in} \| Z_{in} = Z_0$

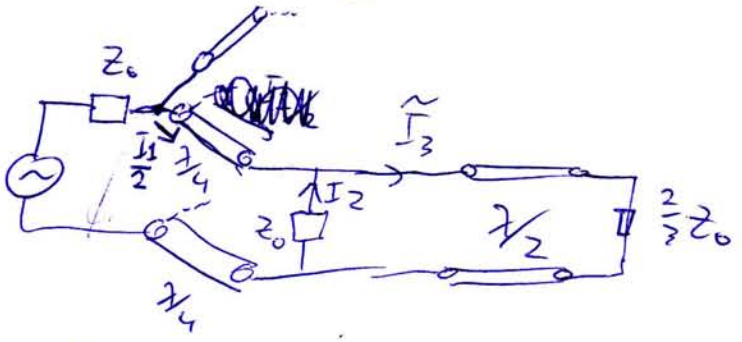
allg.: $U_i = (a_i + b_i)\sqrt{Z_{ci}}$; $I_i = (a_i - b_i)\sqrt{Z_{Li}}$

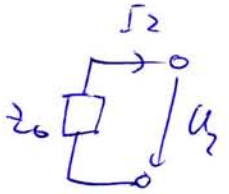
$\Rightarrow a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Li}}} + \sqrt{Z_{Ci}} \cdot I_i\right)$; $b_i = \frac{1}{2}\left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Ci}}} - \sqrt{Z_{Li}} \cdot I_i\right)$ ↷

$$\Rightarrow S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_j=0;\, j\neq 1}$$

$$S_{11} = \frac{U_1 - Z_0 I_1}{U_1 + Z_0 I_1} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = 0 \;//$$

c) $$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_j=0;\, j\neq 1} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_1 + Z_0 I_1} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2 \cdot Z_0 \cdot I_1}$$





$$\Rightarrow U_2 = -I_2 \cdot Z_0$$

$$\Rightarrow S_{21} = \frac{-2 I_2 \cdot Z_0}{2 Z_0 I_1} = \frac{-I_2}{I_1}$$

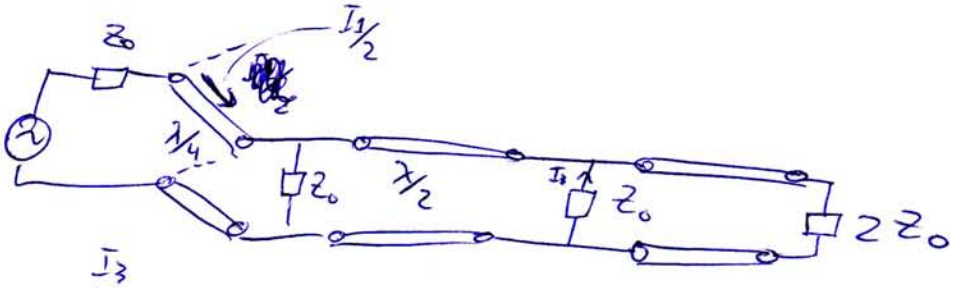
$\frac{\lambda}{4}$-Leitung: $$\Rightarrow \frac{I_1}{2} = \frac{j\sqrt{5}}{2Z_0} \cdot U_2$$

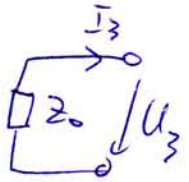
$$\Rightarrow \frac{I_1}{2} = \frac{j\sqrt{5}}{2Z_0} \cdot (-I_2 \cdot Z_0) \Rightarrow I_1 = -I_2\, j\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \underline{S_{21} = \frac{1}{j\sqrt{5}}}$$

Aus Symmetriegründen: $S_{61} = S_{21} = \frac{1}{j\sqrt{5}}$

forts. c) $S_{31} = \left.\frac{b_3}{a_1}\right|_{a_j=0;\, j\neq 1} = \frac{U_3 - Z_0 I_3}{2 Z_0 I_1}$





$\Rightarrow U_3 = -I_3 \cdot Z_0$

$\Rightarrow S_{31} = \frac{-2 Z_0 I_3}{2 Z_0 I_1} = -\frac{I_3}{I_1}$

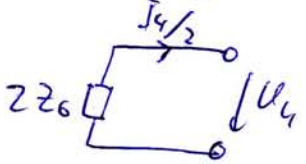
$\lambda/2$-Leitung: $U_2 = -U_3 \Rightarrow -I_2 Z_0 = -(-I_3 \cdot Z_0)$

$\Rightarrow I_3 = -I_2 = \frac{I_1}{j\sqrt{5}}$

$\Rightarrow S_{31} = -\frac{I_3}{I_1} = -\frac{1}{j\sqrt{5}}$

Aus Symmetrie: $S_{51} = S_{31} = \frac{-1}{j\sqrt{5}}$

d) $S_{41} = \left.\frac{b_4}{a_1}\right|_{a_j=0;\, j\neq 1} = \frac{U_4 - Z_0 I_4}{2 Z_0 I_1}$



$\Rightarrow U_4 = -\frac{I_4}{2} 2 Z_0 = -I_4 \cdot Z_0$

$\Rightarrow S_{41} = \frac{-2 I_4 Z_0}{2 Z_0 I_1} = -\frac{I_4}{I_1}$

$\lambda/2$-Leitung: $U_4 = -U_3 = U_2 \Rightarrow -I_4 \cdot Z_0 = -I_2 Z_0 \Rightarrow I_4 = I_2$

$\Rightarrow S_{41} = -\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{j\sqrt{5}} = S_{21} = S_{61}$

$\frac{|P_4|}{|P_1|} = \frac{1}{5}$

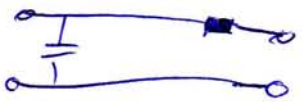
Klausur EMT II EE HT 06

6) a) $\underline{S}_{22} = \dfrac{\frac{1}{\underline{y}} - 1}{\frac{1}{\underline{y}} + 1}$ mit $\underline{y} = \dfrac{1}{r_{ds}} + j\omega C_{ds}$, $r_{ds} = \dfrac{R_{ds}}{Z_0}$, $j\omega C_{ds} = j\dfrac{\omega C_{ds}}{Y_0}$, $Y_0 = \dfrac{1}{Z_0}$

$$\underline{S}_{22} = \frac{1 - \frac{1}{r_{ds}} - j\omega C_{ds}}{1 + \frac{1}{r_{ds}} + j\omega C_{ds}}$$

b) Ohne Eingangsanpassungsnetzwerk: FET "sieht" am Eingang Γ_a. Mit Smith-Chart in Hilfblatt 1: $F = 0{,}8\,dB$

c) Eingangsanpassungsnetzwerk:



$\underline{y}_C = j\,0{,}9 - j\,0{,}06 = j\,0{,}84$

$\underline{z}_L = j\,0{,}32 - j\,0{,}19 = j\,0{,}63$

d) $\underline{y}_{C_{ds}} = j\,0{,}32$, $\underline{y}_{R_{ds}} = 0{,}55$

e) $\underline{z}_L = 0{,}5 + j\,0{,}41$, $\Gamma_L = 0{,}411 \angle 126°$

f) 1) nicht möglich, da serielle Leitung $> \frac{\lambda}{4}$ sein müsste
2) geht
3) geht nicht
4) geht

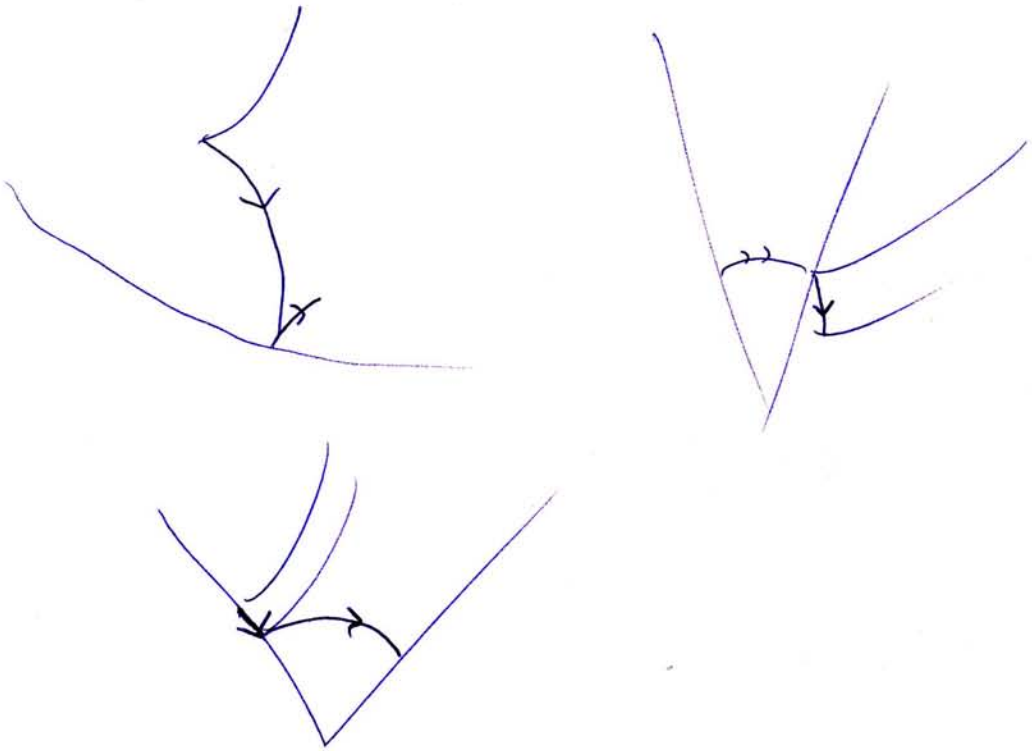
Lösung mit 2): $\dfrac{l_{s1}}{\lambda} = 0{,}160 - 0{,}074 = 0{,}086$

$\dfrac{l_{p1}}{\lambda} = 0{,}278 - 0{,}25 = 0{,}028$

Lsg mit 4): $\dfrac{l_{s2}}{\lambda} = 0{,}186 - 0{,}074 = 0{,}112$

$\dfrac{l_{p2}}{\lambda} = 0{,}278 - 0{,}25 = 0{,}028$

g) Netzwerk 2) ist eher als breitbandige Anpassungsstruktur zu betrachten, da die Länge d. Serienleitung geringer ist als bei Netzwerk 4). Anpassungsnetzwerke mit kürzeren Leitungen sind breitbandigen als solche mit langen Leitungen.



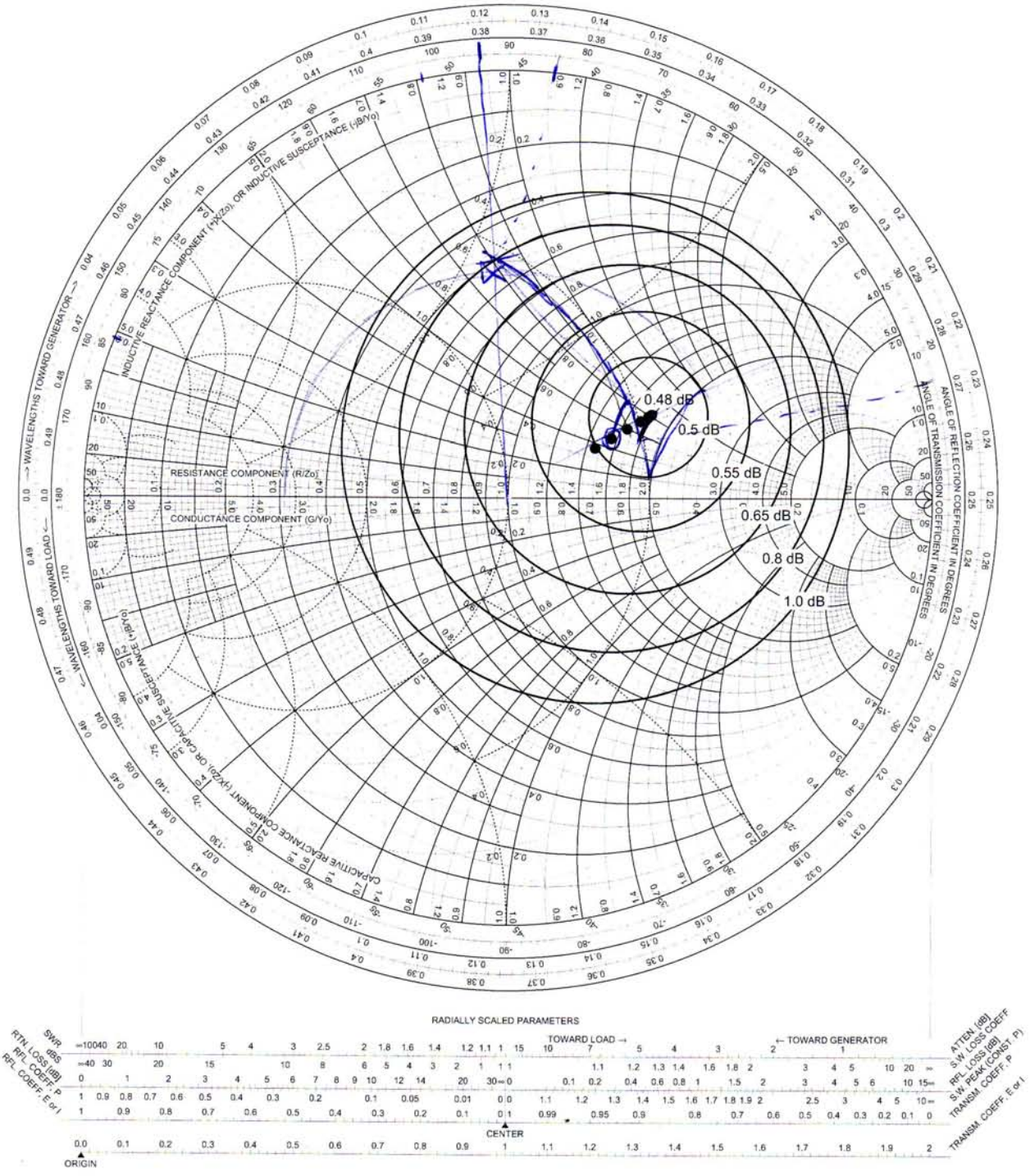
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt b), c)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



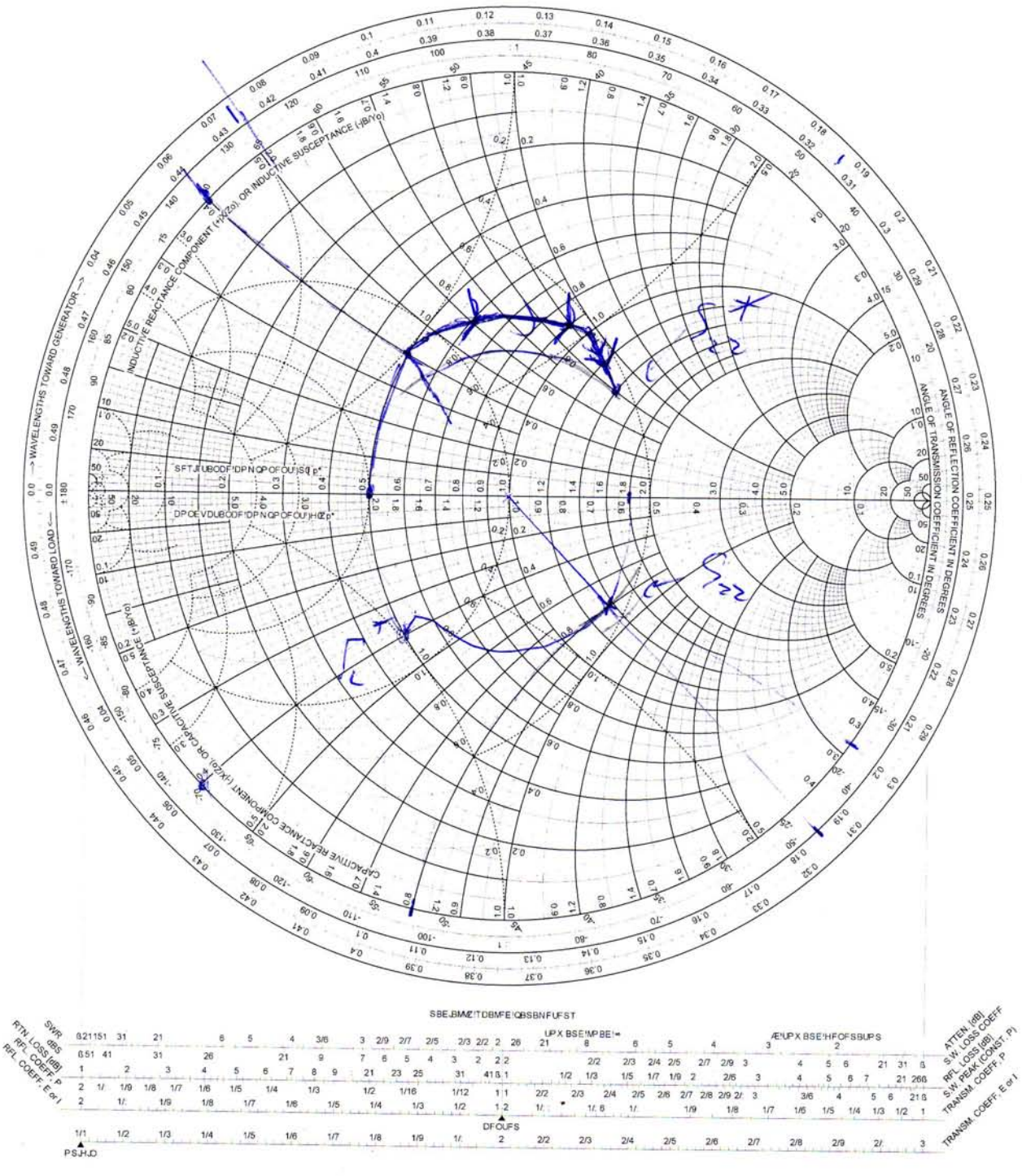
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d), e), f)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



F06 (1) a) Grenzbed. an magnetischer Wand sei $z=-h$

$$H_{tang} = 0 \Rightarrow \quad \underline{H}_x = 0 \; ; \quad \underline{H}_y = 0 \qquad (1)$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}} \; ; \quad \vec{A} = \vec{e}_z \left(\underline{p}_1 \underline{f}(r) + \underline{p}_2 \underline{f}(r_2) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H}_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\underline{p}_1 \underline{f}(r) + \underline{p}_2 \underline{f}(r_2) \right) \qquad (2)$$

$$\underline{H}_y = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\underline{p}_1 \underline{f}(r) + \underline{p}_2 \underline{f}(r_2) \right) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = \frac{d \underline{f}(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \underline{f}'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \underline{f}'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial \underline{f}(r)}{\partial y} = \underline{f}'(r) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \underline{f}'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \underline{f}(r_2)}{\partial x} = \underline{f}'(r_2) \frac{x}{r_2} \; ; \quad \frac{\partial \underline{f}(r_2)}{\partial y} = \underline{f}'(r_2) \frac{y}{r_2} \quad \text{(analog)}$$

Ferner gilt für $z=-h$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+(-h)^2} \qquad r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(2h-h)^2} \quad \text{also}$$

$$r = r_2 = \sqrt{x^2+y^2+h^2} \quad \text{für } z=-h$$

Damit aus (2), (3), (1):

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) \underline{f}'(r) \frac{y}{r} = 0 \quad \text{für } z=-h \; \forall \; x,y$$

$$(\underline{p}_1 + \underline{p}_2) \underline{f}'(r) \frac{x}{r} = 0 \quad \text{für } z=-h \; \forall \; x,y$$

Nur erfüllbar für $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{p}_2 = -\underline{p}_1 \Rightarrow \quad \underline{\vec{p}}_2 = -\underline{\vec{p}}_1 = -\underline{p}_1 \cdot \vec{e}_z$$

b) $$\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \underline{p}_1 \left(\frac{1}{r} e^{-j\xi r} - \frac{1}{r_2} e^{-j\xi r_2} \right) \quad (11)$$

c) $$\frac{1}{r_2} e^{-j\xi r_2} \approx \frac{1}{r+\Delta r} e^{-j\xi r - j\xi \Delta r} = \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \frac{1}{1+\frac{\Delta r}{r}} e^{-j\xi \Delta r}$$

$$\Delta r = 2h \cos\vartheta_2 \approx 2h\cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_2} e^{-j\xi r_2} \approx \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \frac{1}{1+\frac{2h}{r}\cos\vartheta} e^{-j\xi 2h\cos\vartheta}$$

Wegen $r \gg h$ ist $\frac{h}{r} \ll 1$ also $\frac{1}{1+\frac{2h}{r}\cos\vartheta} \approx 1 - \frac{2h}{r}\cos\vartheta$

Wegen $\xi \cdot h \ll 1$ ist $e^{-j\xi 2h\cos\vartheta} \approx 1 - j\xi 2h\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_2} e^{-j\xi r_2} \approx \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \left(1 - \frac{2h}{r}\cos\vartheta\right)\left(1 - j\xi 2h\cos\vartheta\right)$$

Da nur lineare Terme in h berücksichtigt werden sollen, folgt:

$$\frac{1}{r_2} e^{-j\xi r_2} \approx \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \left(1 - 2h\cos\vartheta \left[\frac{1}{r} + j\xi\right]\right)$$

$$= \frac{1}{r} e^{-j\xi r} - \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \frac{2h}{r}(1+j\xi r)\cos\vartheta$$

Damit aus (11)

$$\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \underline{p}_1 \frac{2h}{r^2} e^{-j\xi r} (1+j\xi r)\cos\vartheta$$

$$\underline{\vec{A}} = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0 h \underline{p}_1}{2\pi} \frac{e^{-j\xi r}}{r^2} (1+j\xi r)\cos\vartheta \quad \text{q.e.d}$$

d) Fernfeld: $\xi r \gg 1 \Rightarrow 1 + j\xi r \approx j\xi r$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{A}} = -\frac{\omega \mu_0 h \xi}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r} (\vec{e}_r \cos^2\vartheta - \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta)$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \underline{A}_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\underline{A}_r)\right)\frac{1}{\mu_0}$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi \frac{\omega h \xi}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-j\xi r}\sin\vartheta\cos\vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{1}{r}e^{-j\xi r}\cos^2\vartheta\right)\right)$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi \frac{\omega h \xi}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r}\left(-j\xi e^{-j\xi r}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{r}e^{-j\xi r} 2\sin\vartheta\cos\vartheta\right)$$

$$\underline{\vec{H}} = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega h \xi}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r_2} e^{-j\xi r}(j\xi r + 2)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Wegen $\xi r \gg$ folgt wieder $j\xi r + 2 \approx j\xi r$

Somit $$\underline{\vec{H}} = -\vec{e}_\varphi \frac{j\omega h \xi^2}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$= -\vec{e}_\varphi \frac{j\omega h \xi^2}{4\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r} \sin(2\vartheta)$$

e) Fernfeld = TEM-Welle

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -Z_F \vec{e}_r \times \underline{\vec{H}} \qquad Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega h \xi^2 Z_F}{2\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r}\sin\vartheta\cos\vartheta \quad \text{mit } \xi Z_F = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \omega\mu_0$$

$$= -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega h k^2 Z_F}{4\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r}\sin(2\vartheta) \qquad \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\vartheta$$

$$= -\vec{e}_\vartheta \frac{j\omega^3 h \mu_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon}}{4\pi} \underline{P}_1 \frac{1}{r} e^{-j\xi r}\sin(2\vartheta)$$

f) $\overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right\}$ $\quad \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{2} \vec{e}_r \, \mathrm{Re}\left\{ \frac{j\omega k \xi^2}{2\pi} \frac{\underline{p}_1}{r} Z_F \left(- \frac{j\omega k \xi^2}{2\pi} \frac{\underline{p}_1^*}{r} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \right) \right\}$$

$$\overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{2} \vec{e}_r \frac{\omega^2 k^2 \xi^4 Z_F}{4\pi^2} |\underline{p}_1|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta$$

$$= \vec{e}_r \cdot \frac{\omega^2 k^2 \xi^4 Z_F}{8\pi^2} |\underline{p}_1|^2 \frac{\sin^2\vartheta \cos^2\vartheta}{r^2}$$

$$= \vec{e}_r \frac{\omega^2 k^2 \xi^4 Z_F}{32\pi^2} |\underline{p}_1|^2 \frac{\sin^2(2\vartheta)}{r^2}$$

Minima: $\sin^2(2\vartheta) = 0 \Rightarrow \vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

Maxima: $\sin^2(2\vartheta) = 1 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$

$0 \le \vartheta \le \pi$!

$$\frac{\omega^2 k^2 \xi^4 Z_F}{4\pi^2} = \frac{\omega^6 k^2 \varepsilon \mu_0^2 \sqrt{\varepsilon \mu_0}}{4\pi^2}$$

(2) a) TEM_z-Welle $\Rightarrow \underline{E}_z = 0$

$$\underline{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\xi^2 + (-j\beta)^2 \right] \cdot \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \xi^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \xi = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$$\nabla^2 \underline{g} + \xi^2 \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{g} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \xi^2\right) \underline{g} = \nabla_{tr}^2 \cdot \underline{g} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{g} = e^{-j\beta z} \cdot \nabla_{tr}^2 \underline{\tilde{g}} = 0$$

muß für alle z gelten $\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{\tilde{g}} = 0$

b) magn. Wände G_1, G_2

$$\Rightarrow E_{norm} = 0 \Rightarrow E_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial n}\Big|_{Rand} = \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=a} = \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=b} = 0$$

mit Hinweis nur 1. Komponente $\Rightarrow E_\varphi = 0$ für alle φ

$\Rightarrow \vec{\underline{E}} = E_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

$E_\varphi \sim \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{\partial \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi} = 0$ für $E_\varphi = 0$

$\Rightarrow \underline{\tilde{g}} = \underline{\tilde{g}}(\varphi)$

$$\Rightarrow \nabla_{tr}^2 \underline{\tilde{g}} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{\tilde{g}}}{\partial \varphi^2} = 0$$

mit Lösg: $\underline{\tilde{g}}(\varphi) = A \cdot \varphi + B$ A, B Konstante

$\underline{\tilde{g}}(\varphi = 0) = B = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}$

$$\underline{\tilde{g}}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \frac{\pi}{2} = A_0 \Rightarrow A = \frac{A_0 \cdot 2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{g}}(\varphi) = \frac{A_0 \cdot 2}{\pi} \cdot \varphi$$

c) $\underline{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varrho} \frac{\partial \underline{g}}{\partial\varphi dz} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varrho}(-j\beta)\frac{2\hat{A}_0}{\pi} e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{2\hat{A}_0}{\varrho\pi} \cdot Z_F \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z_F} \vec{e}_z \times \underline{\vec{E}} = \frac{2\hat{A}_0}{\varrho\pi} e^{-j\beta z} \vec{e}_\varrho$$

d) $\underline{u}(z) = \int_{\text{Leiter 1}}^{\text{Leiter 2}} \underline{\vec{E}}\, d\vec{r} = -\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{Z_F 2\hat{A}_0}{\pi\varrho} e^{-j\beta z} \varrho\, d\varphi$

$$\underline{u}(z) = -\frac{Z_F \cdot \hat{A}_0 \cdot 2}{\pi} \frac{\pi}{2} e^{-j\beta z}$$

$$\underline{u}(z) = -Z_F \cdot \hat{A}_0 e^{-j\beta z}$$

$$\underline{i}(z) = \oint_C \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \int_{\varrho=b}^{a} \frac{2\hat{A}_0}{\varrho\pi} e^{-j\beta z} d\varrho$$

$$\underline{i}(z) = \frac{2\hat{A}_0}{\pi} e^{-j\beta z} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{u}(z)}{\underline{i}(z)} = Z_F \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

e) $-\frac{\partial \underline{i}}{\partial z} = (G' + j\omega C')\,\underline{u}$

einsetzen: $\Rightarrow -\frac{2\hat{A}_0}{\pi}(-j\beta) e^{-j\beta z} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$= (G' + j\omega C')(-Z_F \hat{A}_0) e^{-j\beta z}$$

$$\Rightarrow G' + j\omega C' = -\frac{2j\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\pi\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}} = \frac{2j\omega\varepsilon}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G' = 0}} \qquad C' = \frac{2\varepsilon}{\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = (R' + j\omega L')\cdot \underline{i}$$

$$\Rightarrow Z_F \cdot A_0 \cdot (-j\beta) = (R' + j\omega L')\ \frac{2A_0}{\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow R' + j\omega L' = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\,\pi\, j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{j\omega\mu_0\pi}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R' = 0}} \qquad L' = \frac{\mu_0\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)2}$$

(3) Helmholtz-Gl. $\Delta\vec{\underline{F}} + k^2\vec{\underline{F}} = 0 \qquad k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon$

Wegen $\frac{\partial^2}{\partial z^2}e^{-j\beta z} = -\beta^2 e^{-j\beta z}$ vereinfacht sich

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{zu}$$

$$\Delta = \Delta_{trans} + (-\beta^2)$$

$$\Rightarrow \Delta_{trans}\,\underline{\tilde{f}} + (k^2-\beta^2)\,\underline{\tilde{f}} = 0$$

$$(1) \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\underline{\tilde{f}}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\underline{\tilde{f}}}{\partial\varphi^2} + (k^2-\beta^2)\underline{\tilde{f}} = 0$$

b) Seperation in zyl. K.O. $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \psi(\rho)\cdot h(\varphi)$

gegeben: $h''(\varphi) + m^2 h(\varphi) = 0 \qquad (2)$

$m \neq 0 \Rightarrow \quad h(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)$

$m = 0 \Rightarrow \quad h(\varphi) = A_0 + B_0 \varphi$

c) Ans $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \psi(\rho)\cdot h(\varphi)$ folgt mit (1)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\right)h(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h(\varphi)}{\partial\varphi^2}\psi(\rho) + (k^2-\beta^2)\,h(\varphi)\,\psi(\rho) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{h(\varphi)}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2 h(\varphi)}\frac{\partial^2 h(\varphi)}{\partial\varphi^2}}_{=-m^2}\psi(\rho) + (k^2-\beta^2)\,\psi(\rho) = 0$$

?

Aus (2) folgt:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\right) + \frac{-m^2}{\rho^2}\psi(\rho) + (k^2-\beta^2)\,\psi(\rho) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\psi(\rho)}$$

$$\frac{1}{\psi(\rho)}\frac{\partial^2\psi(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{\psi(\rho)}\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho} + \underbrace{(k^2-\beta^2)}_{=p^2} - \frac{m^2}{\rho^2} = 0$$

?

Hinweis zu c)

Bess. DGL, allg. Lösung

$$\psi(\rho) = C_p J_m(p\rho) + D_p N_m(p\rho)$$

d) $\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\vec{e}_\rho}_{E_\rho} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \rho}\cdot\vec{e}_\varphi}_{E_\varphi}$

$F = \tilde{f}\cdot e^{-j\beta z}$

Randbed. $G_m(\varphi=0, \varphi=\pi)$

$$\vec{E}_{norm}\big|_{\varphi=0;\ \varphi=\pi} = 0 \Rightarrow E_\varphi(\varphi=0) = E_\varphi(\varphi=\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\cdot l(\varphi) e^{-j\beta z}\Big|_{\varphi=0,\ \varphi=\pi} = 0$$

Sei $\boxed{\varphi=0:}$

$m \neq 0 \Rightarrow l(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)$

$A_m \cos(0) + B_m \sin(0) = 0$

$\Rightarrow A_m = 0$

$m = 0 \Rightarrow l(\varphi) = A_0 + B_0 \cdot 0 \Rightarrow A_0 = 0$

Sei $\boxed{\varphi=\pi:}$ $m \neq 0 \Rightarrow l(\varphi) = B_m \sin(m\pi) \Rightarrow m = 1,2,3,4,\ldots$

$m = 0 \Rightarrow l(\varphi) = B_0 \cdot \pi \Rightarrow B_0 = 0$

$$\Rightarrow F = B_m \sin(m\varphi)\left(C_p J_m(p\rho) + D_p N_m(p\rho)\right) e^{-j\beta z}$$

e) $\underline{F}$ für $\rho \to 0$ nicht singulär!

$N_n(p\rho)$ also Singularität sei $\rho = 0$

$\Rightarrow D_p = 0$

$\boxed{\rho = a}$:

$$\vec{E}_{tan}\big|_{\rho=a} = 0 \Rightarrow E_\varphi(\rho=a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = 0$$

$$\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = C_p \cdot J_n'(p\rho) \Rightarrow C_p \cdot J_n'(p\rho)\big|_{\rho=a} = 0$$

$$\frac{\partial J_n(p\rho)}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = 0$$

$\Rightarrow p \cdot a = x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, x_{n4}, \dots$ sodass

x_{nn} die n'te Nullstelle von $J_n' = \frac{\partial J_n(x)}{\partial x}$ ist.

$p_{nn} \cdot a = x_{nn}$ mit $p_{nn} = p_{n1}, p_{n2}, \dots$ p_{nn} reell

$$\underline{F} = B_n \sin(n\varphi) C_n J_n(p_{nn}\rho)\, e^{-j\beta_{nn} z}$$

mit $\tilde{B}_{nn} = B_n C_n$

$$\Rightarrow \underline{F} = \tilde{B}_{nn} \sin(n\varphi) J_n(p_{nn}\rho)\, e^{-j\beta_{nn} z}$$

Seperationsbed. $p_{mn}^2 = k^2 - \beta_{mn}^2$

$$\beta_{mn}^2 = k^2 - p_{mn}^2$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - p_{mn}^2}$$

p_{mn} hat Aufgabe positiv und reell

f) $\underline{\vec{E}} = -\nabla \times \underline{\vec{F}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{F}}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\rho + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\varphi$

$$\underline{E}_\varphi = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \rho} = \tilde{B}_{mn} \sin(m\varphi) \cdot \frac{\partial J_m(p_{mn}\rho)}{\partial \rho} e^{-j\beta_{mn} z}$$

$$\underline{E}_\rho = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \varphi} = -\frac{\tilde{B}_{mn}\, m}{\rho} \cos(m\varphi) J_m(p_{mn}\rho) e^{-j\beta_{mn} z}$$

g) $\omega_{mn} \Rightarrow \beta_{mn} = 0$

$$0 = \sqrt{\omega_{mn}^2 \varepsilon \mu_0 - p_{mn}^2} \Rightarrow \omega_{mn}^2 \varepsilon \mu_0 = p_{mn}^2$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{p_{mn}^2}{\varepsilon \mu_0}}$$

Tabelle $x_{mn} (= p_{mn} \cdot a)$ für $m=1, n=1$

d.h. $\omega_{mn} = \omega_{11}$ ist kleinste Nullstelle der Tab

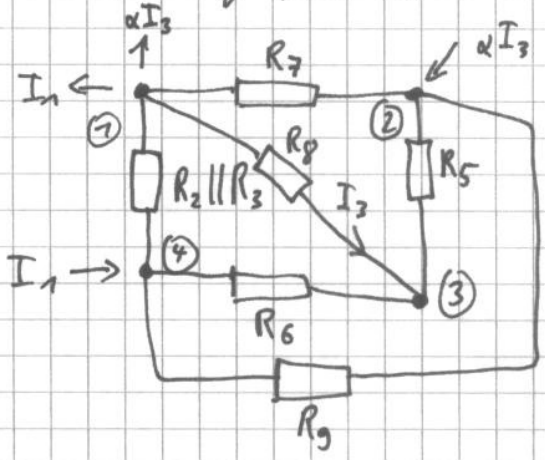
$$x' = 1{,}8412 \text{ und mit } a = 2\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow p_{11} = \frac{1{,}8412}{2\,\text{cm}}$$

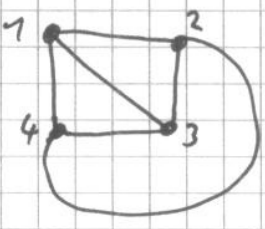
$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1{,}8412^2}{(2\,\text{cm})^2 \varepsilon \mu_0}} = \frac{1{,}8412}{2\,\text{cm}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu_0}} = \frac{0{,}9206}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}\,\text{cm}}$$

EMF Abschrift Lösung F06 A4

a) - J_2 entfernen, da in jedem Zweig eines Maschenumlaufs vorhanden.
- R_1 entfernen, da in Reihe mit idealer Stromquelle
- R_4 " " " " " Stromquelle
- Umwandlung der stromgesteuerten in eine spannungsgesteuerte Stromquelle: $I_3 = \frac{U_{R8}}{R_8}$
- Parallelschaltung von R_2 und R_3



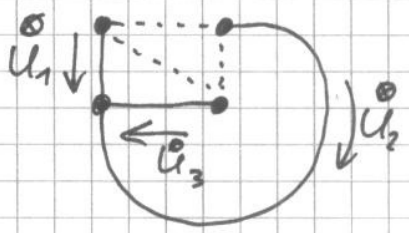
b) Graph:



$p = 3$

$m = 3$

Baum mit Baumzweigspannungen



c)

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2+G_3+G_7+G_8+\alpha G_8 & -G_7 & -G_8-\alpha G_8 \\ -G_7-\alpha G_8 & G_5+G_7+G_9 & -G_5+\alpha G_8 \\ -G_8 & -G_5 & G_5+G_6+G_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

d) $\overset{\otimes}{Y}(G_i = G) = \begin{bmatrix} 4G+\alpha G & -G & -G-\alpha G \\ -G-\alpha G & 3G & -G+\alpha G \\ -G & -G & 3G \end{bmatrix}$

Über R_3 fällt nur die Spannung $\overset{\otimes}{U}_2$ ab. Diese muss 0 werden.

Cramersche Regel: $\overset{\otimes}{U}_2 = \dfrac{J_1(-4G^2 - 2\alpha G^2)}{\det \overset{\otimes}{Y}(G_i = G)} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -2}}$

F06

Aufgabe 5 ①

a) Reziprozität: $\underline{S}^{(4)} = \underline{S}^{(4)T} \Rightarrow \underline{S}_{12}^{(4)} = \underline{S}_{21}^{(4)}$, $\underline{S}_{13}^{(4)} = \underline{S}_{31}^{(4)}$,

$\underline{S}_{14}^{(4)} = \underline{S}_{41}^{(4)}$, $\underline{S}_{32}^{(4)} = \underline{S}_{23}^{(4)}$, $\underline{S}_{42}^{(4)} = \underline{S}_{24}^{(4)}$, $\underline{S}_{43}^{(4)} = \underline{S}_{34}^{(4)}$

Symmetrie: $\underline{S}_{11}^{(4)} = \underline{S}_{22}^{(4)} = \underline{S}_{33}^{(4)} = \underline{S}_{44}^{(4)}$ und $\underline{S}_{23}^{(4)} = \underline{S}_{14}^{(4)}$, $\underline{S}_{24}^{(4)} = \underline{S}_{13}^{(4)}$,

$\underline{S}_{34}^{(4)} = \underline{S}_{12}^{(4)}$

b) $\varphi_E = \varphi_0 \Rightarrow \beta_E \ell = \beta_0 \ell \Rightarrow \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{effE}}}{c_0}\ell = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{eff0}}}{c_0}\ell$

$\Rightarrow \varepsilon_{effE} = \varepsilon_{eff0} \Rightarrow \varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

Für $\varphi_E = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ist $\underline{A} = \frac{1}{1 - j z_{LE}}$, $\underline{B} = \frac{1}{1 + j z_{LE}}$,

$\underline{C} = \frac{1}{1 - j z_{L0}}$, $\underline{D} = \frac{1}{1 + j z_{L0}}$

Reflexionsfreiheit an allen 4 Toren: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33} = \underline{S}_{44} = 0$.

Zusammenhang zwischen z_{LE} und z_{L0}:

$$\underline{S}_{11}^{(4)} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - j z_{LE}} + \frac{1}{1 + j z_{LE}} + \frac{1}{1 - j z_{L0}} + \frac{1}{1 + j z_{L0}}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 + j z_{LE} + 1 - j z_{LE}}{1 + z_{LE}^2} + \frac{1 - j z_{L0} + 1 + j z_{L0}}{1 + z_{L0}^2}\right)$$

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + z_{LE}^2} + \frac{2}{1 + z_{L0}^2}\right)$$

$$1 + z_{LE}^2 + z_{L0}^2 + z_{LE}^2 z_{L0}^2 = 1 + z_{L0}^2 + 1 + z_{LE}^2$$

$$z_{LE}^2 z_{L0}^2 = 1$$

$\underline{S}_{21}^{(4)}$, $\underline{S}_{31}^{(4)}$ und $\underline{S}_{41}^{(4)}$ lassen sich dann vereinfachen zu:

$$\underline{S}_{21}^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1 + z_{LE}^2} - \frac{2}{1 + z_{L0}^2}\right) = -\left(\frac{1}{1 + z_{LE}^2} - \frac{z_{LE}^2}{z_{LE}^2 + 1}\right) = \frac{z_{LE}^2 - 1}{1 + z_{LE}^2}$$

FO6

Aufgabe 5 ②

$$\underline{S}_{31}^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2jz_{LE}}{1+z_{LE}^2} - \frac{2jz_{LO}}{1+z_{LO}^2}\right) = -\left(\frac{jz_{LE}}{1+z_{LE}^2} - \frac{jz_{LE}}{z_{LE}^2+1}\right) = 0$$

$$\underline{S}_{41}^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2jz_{LE}}{1+z_{LE}^2} + \frac{2jz_{LO}}{1+z_{LO}^2}\right) = -\left(\frac{jz_{LE}}{1+z_{LE}^2} + \frac{jz_{LE}}{z_{LE}^2+1}\right) = \frac{-2jz_{LE}}{1+z_{LE}^2}$$

Mit den Abkürzungen $\underline{p} = \frac{z_{LE}^2 - 1}{z_{LE}^2 + 1}$ und $\underline{q} = \frac{-2jz_{LE}}{z_{LE}^2+1}$ gilt

$$\underline{S}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{p} & 0 & \underline{q} \\ \underline{p} & 0 & \underline{q} & 0 \\ 0 & \underline{q} & 0 & \underline{p} \\ \underline{q} & 0 & \underline{p} & 0 \end{bmatrix}$$

c) Reflexionsfaktor eines Kurzschlusses: $\underline{\Gamma} = -1$. Also ist

$$\underline{b} = \underline{S}^{(4)} \cdot \underline{a}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ -\underline{a}_2 \\ \underline{b}_3 \\ -\underline{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{p} & 0 & \underline{q} \\ \underline{p} & 0 & \underline{q} & 0 \\ 0 & \underline{q} & 0 & \underline{p} \\ \underline{q} & 0 & \underline{p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \\ \underline{a}_4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{a}_2 = -\underline{p}\,\underline{a}_1 - \underline{q}\,\underline{a}_3$ und $\underline{a}_4 = -\underline{q}\,\underline{a}_1 - \underline{p}\,\underline{a}_3$.

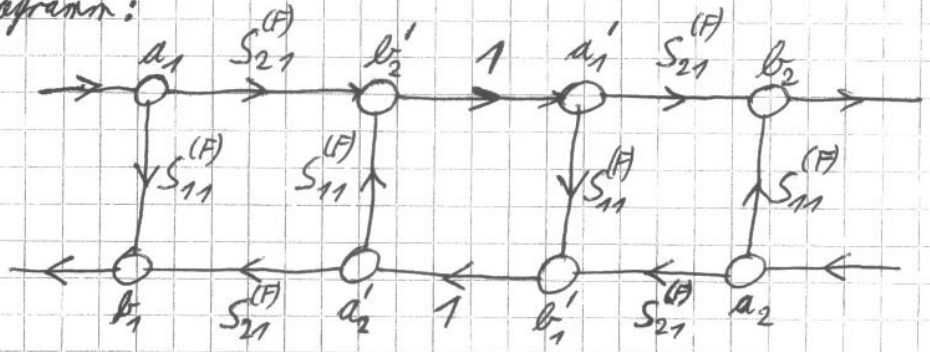
Damit folgt $\underline{b}_1 = -\underline{p}^2\underline{a}_1 - \underline{p}\,\underline{q}\,\underline{a}_3 - \underline{q}^2\underline{a}_1 - \underline{q}\,\underline{p}\,\underline{a}_3$ und aus Symmetrie- und Reziprozitätsgründen

$$\underline{S}^{(F)} = \begin{bmatrix} -\underline{p}^2 - \underline{q}^2 & -2\underline{p}\,\underline{q} \\ -2\underline{p}\,\underline{q} & -\underline{p}^2 - \underline{q}^2 \end{bmatrix}$$

FO6

Aufgabe 5 ③

d) Signalflussdiagramm:



ablesen: $\underline{b}_2' = \underline{S}_{21}^{(F)}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{11}^{(F)}\left(\underline{S}_{21}^{(F)}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{b}_2'\right)$

$$= \frac{\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_2$$

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)}\left(\underline{S}_{21}^{(F)}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{b}_2'\right)$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)2}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{S}_{21}\left(\frac{\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{S}_{21}^{(F)}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_2\right)$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^{(F)2}\,\underline{a}_2 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)}\,\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{11}^{(F)2}\,\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_2$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)}\,\frac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}+\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{21}^{(F)2}-\underline{S}_{21}^{(F)2}\,\underline{S}_{11}^{(F)2}+\underline{S}_{11}^{(F)2}\,\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}}\,\underline{a}_2$$

Damit ist die erste Zeile von $\underline{S}^{(K)}$ bekannt, und aus Symmetrie und Reziprozitätsgründen folgt

$$\underline{S}^{(K)} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)}\,\dfrac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}+\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} & \dfrac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \\ \dfrac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} & \underline{S}_{11}^{(F)}\,\dfrac{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}+\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1-\underline{S}_{11}^{(F)2}} \end{bmatrix}$$

e) Für verlustlose N-Tore gilt $\underline{S}\cdot\underline{S}^{*T} = E$.

FO6

Aufgabe 5 ④

Das Filter ist reziprok, daher vereinfacht sich dies zu

$$\underline{S}^{(F)} \cdot \underline{S}^{(F)*} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)} & \underline{S}_{21}^{(F)} \\ \underline{S}_{21}^{(F)} & \underline{S}_{22}^{(F)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^{(F)*} & \underline{S}_{21}^{(F)*} \\ \underline{S}_{21}^{(F)*} & \underline{S}_{22}^{(F)*} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\underline{S}_{11}^{(F)}|^2 + |\underline{S}_{21}^{(F)}|^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Also ist $|\underline{S}_{11}^{(F)}|^2 + |\underline{S}_{21}^{(F)}|^2 = 1.$

f) Da $\underline{S}_{11}^{(F)}$ rein reell und $\underline{S}_{21}^{(F)}$ rein imaginär ist, gilt:

$$\underline{S}_{11}^{(K)} = \underline{S}_{11}^{(F)} \frac{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2} + \underline{S}_{21}^{(F)2}}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= \underline{S}_{11}^{(F)} \frac{1 - |\underline{S}_{11}^{(F)}|^2 - |\underline{S}_{21}|^2}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= 0$$

$$\underline{S}_{21}^{(K)} = \frac{\underline{S}_{21}^{(F)2}}{1 - \underline{S}_{11}^{(F)2}}$$

$$= \frac{-|\underline{S}_{21}^{(F)}|^2}{1 - |\underline{S}_{11}^{(F)}|^2}$$

$$= -1$$

und damit $\underline{S}^{(K)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

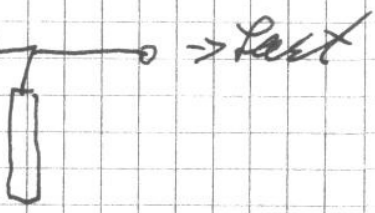
F06 / A6 Musterlösung

a) Stichleitung wirkt wie paralleler ~~Kondensator~~ Kondensator → Abschluss = open

$l_p = 0,164\,\lambda$

$l_s = 0,134\,\lambda$

Topologie: FET-1 ← ○——▭——○ → Last



b) Bestimmen von S_{22} aus $S_{22}^* \Rightarrow S_{22} = 0,64 \angle -134°$

$\angle -1340$

c) Neue Topologie:

FET-1 ← ○——▭——○ → FET-2

Abschluss: open

$l_s = 0,088\,\lambda$

$l_p = 0,06\,\lambda$

d) Am Eingang von FET-2 liegt ebenfalls Leitungsanpassung vor. Wenn man ausgehend von S_{22} durch das Anpassungsnetzwerk "läuft" landet man bei S_{11}^*

e) $Z_A = 0,5 + \cancel{0,}\,j\,1,5$

FET-2 ← ○——|——○ → Z_A

$Z_c = 1,06$

$y_c = 0,75$

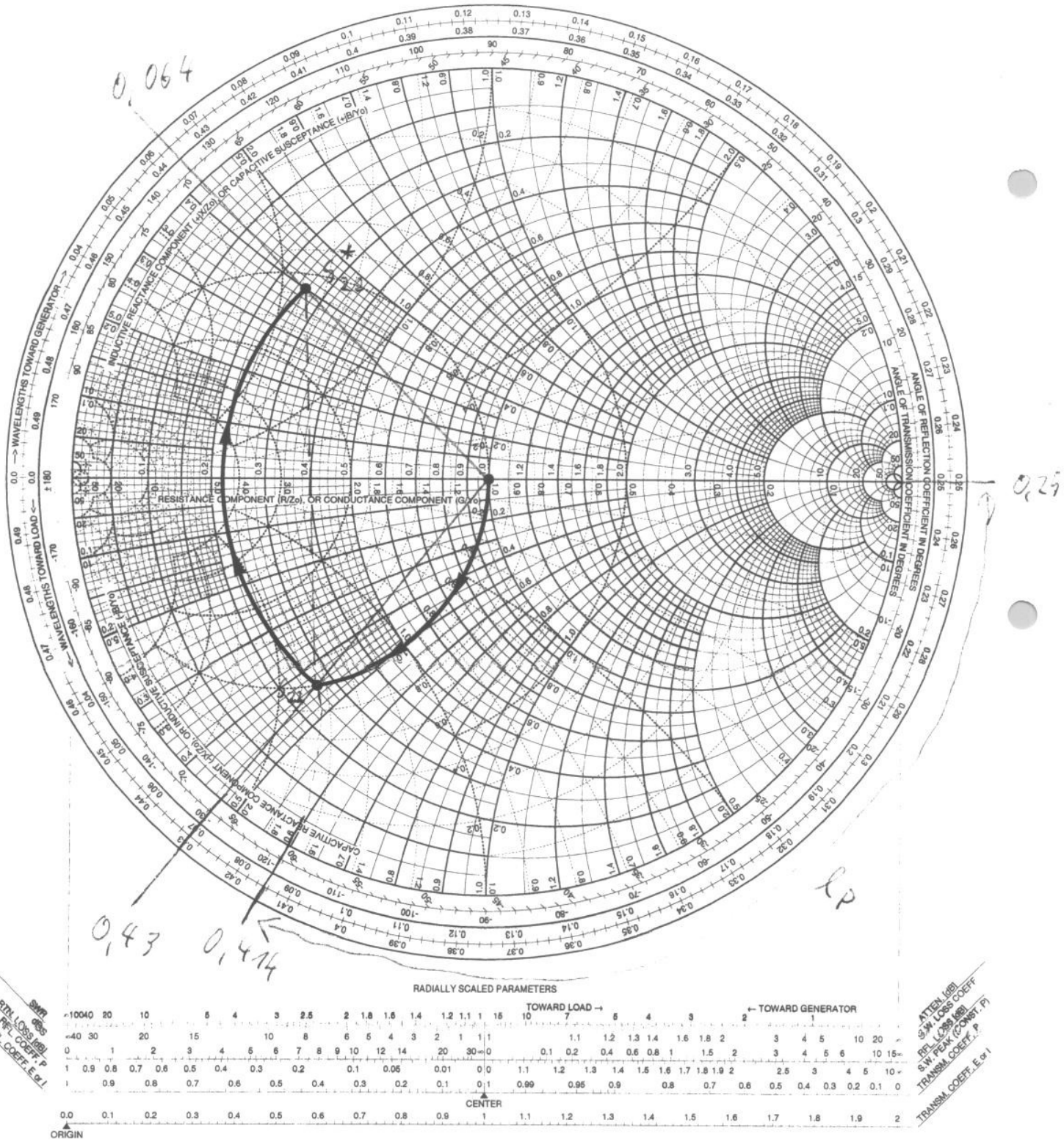
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt a), b)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

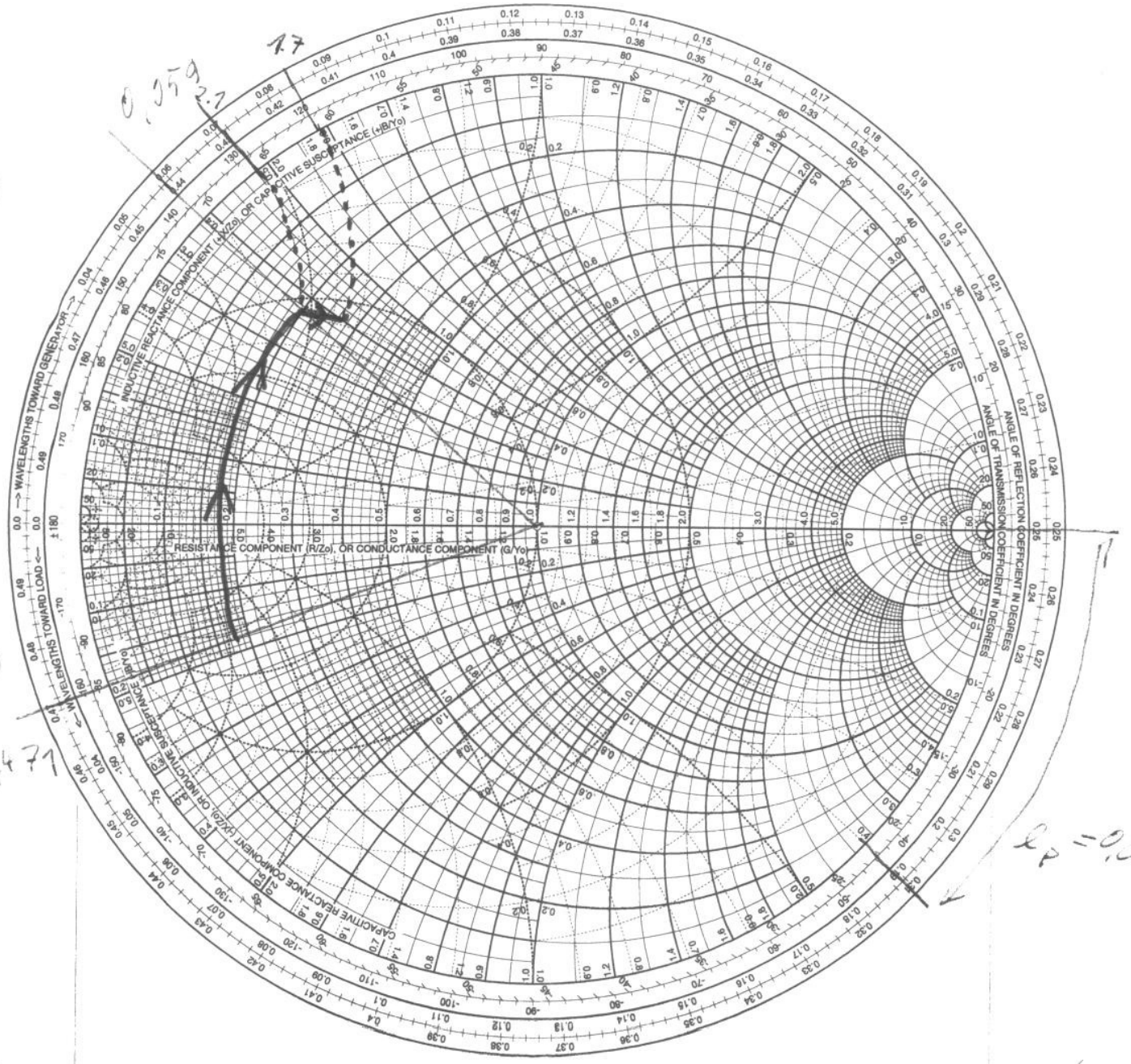
Frühjahr 2006

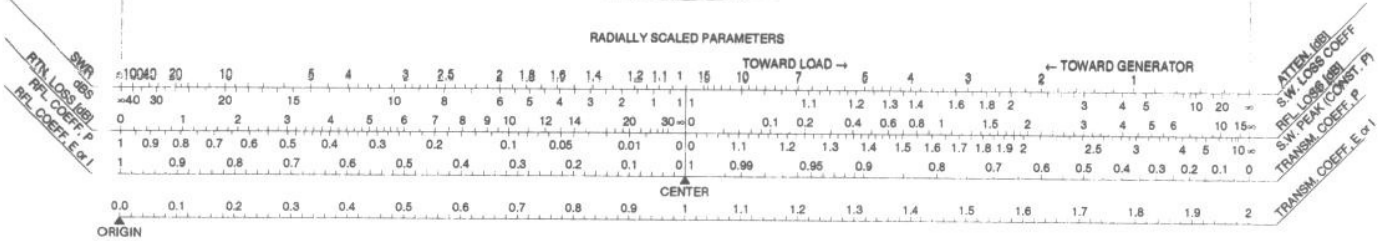
KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____

2.1 - 1.7 = 0,4





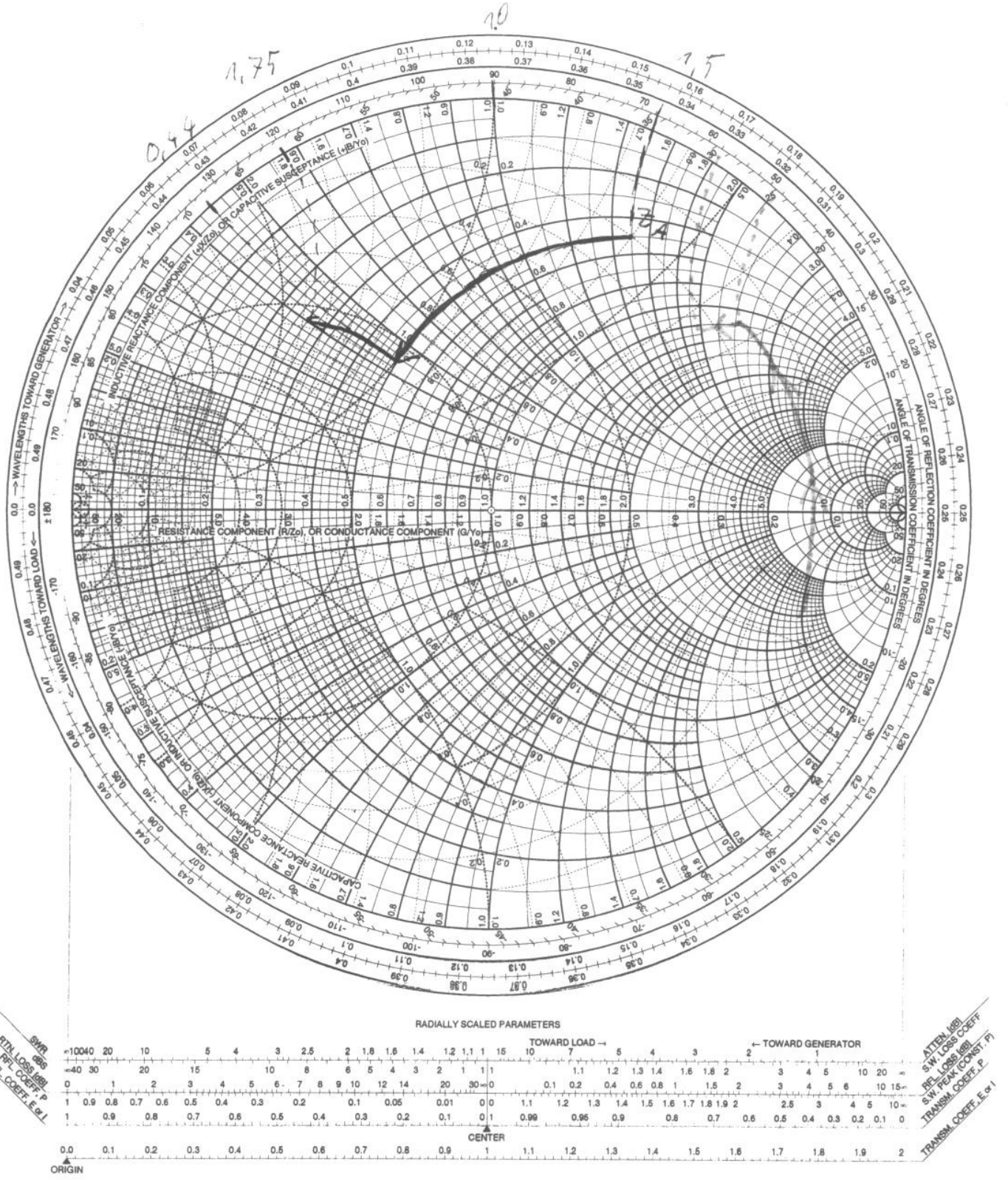
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2006

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)"

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt e)

Name: _____ **Matr.Nr.:** _____



Aufgabe 1

a) $I(t)$ erzeugt $B_G(t) = I(t)\mu_0 \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$

hier: $\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_z$; $r = x$

für $d \ll a$ gilt: $\Psi_{L1}(t) = \Phi_{L1}(t) = \int_{x=a}^{2a} \int_{y=y_0}^{y_0+a} \vec{B}_G(t)\, dy\, dx\, \vec{e}_z$ ($d\vec{F}_1$)

$$\Phi_{L1}(t) = \int_{x=a}^{2a} \int_{y=y_0}^{y_0+a} I(t)\mu_0 \frac{1}{2\pi x}\, dy\, dx\, (-\vec{e}_z)\vec{e}_z \quad (-1)$$

$$\Phi_{L1}(t) = -I(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi} \int_{x=a}^{2a} \frac{1}{x}\, dx = -I(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left[\ln x\right]_a^{2a}$$

$$\dot{\Phi}_{L1}(t) = -\dot{I}(t)\cdot\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2$$

b) $\oint_{L1} \vec{E}\, d\vec{s} = -\dot{\Phi}_{L1} = I_1 R_1$

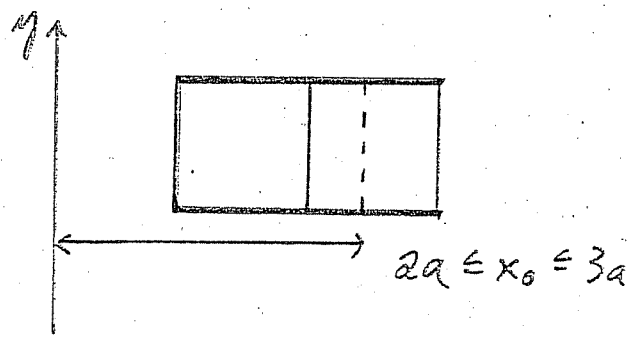
$$\Rightarrow I_1(t) = -\frac{\dot{\Phi}_{L1}}{R_1} = \dot{I}(t)\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2$$

$$I_1(t) = -I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{1}{R_1}\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2$$

c) Da $\vec{j}$ nur eine Komponente hat ($\vec{j} = j_y \vec{e}_y$) erhält man mit:

$$\operatorname{div}\vec{j} = \frac{dj_y}{dy} = 0 \Rightarrow \vec{j} = j_y(x)\vec{e}_y$$

$$\vec{j}(x) = \vec{E}(x)\sigma = E_y(x)\sigma\vec{e}_y$$



Bündelfluss der Stromschleife

analog zu a)

$$\Rightarrow \Phi_{L2}(t) = -I(t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int_{x=a}^{x_0}\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \Phi_{L2}(t) = -I(t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x_0}{a}$$

$$\int_{\text{Stromschleife}} \vec{E}\,d\vec{s} = -\dot{\Phi}_{L2}(t, x=x_0) = -I_0\,\omega\,\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x_0}{a}$$

$x = x_0$

$\vec{E}$ nur auf Platte von Null verschieden

$$\Rightarrow \oint_{\text{Stromschleife}} \vec{E}\,d\vec{s} = a\,E_y(x=x_0)$$

$x = x_0$

$$\Rightarrow E_y(x=x_0) = -\frac{\dot{\Phi}_{L2}(t, x=x_0)}{a} \quad ;\ \text{allgemein: } E_y(x) = -\frac{\dot{\Phi}_{L2}(t,x)}{a}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{j}(x) = -\frac{\sigma}{a} I_0\,\omega\,\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x}{a}\,\vec{e}_y} \quad ;\ 2a \le x \le 3a$$

$$I_2(t) = \int_{z=0}^{d}\int_{x=2a}^{3a} j_y(x)\,dx\,dz$$

$$I_2(t) = -d\,\frac{\sigma}{a}\,\omega\,I_0\,\sin(\omega t)\,\frac{\mu_0 a}{2\pi}\int_{x=2a}^{3a}\ln\frac{x}{a}\,dx$$

Substitution: $u = \frac{x}{a}$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow I_2(t) = -d\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\,\sin(\omega t)\int_{u=2}^{3} a\ln u\,du$$

$$= \underbrace{-ad\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\,\sin(\omega t)}_{\tilde{I}}\cdot\left[u\ln u - u\right]_{u=2}^{3}$$

$$= \tilde{I}\left[3\ln 3 - 3 - 2\ln 2 + 2\right]$$

$$= \tilde{I}\left[\ln\frac{3^3}{2^2} - 1\right]$$

$$= \underline{I_2 = -ad\,\frac{\sigma\omega\mu_0}{2\pi} I_0\,\sin(\omega t)\left[\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1\right]}$$

d) Flußverkettung Ψ_{L2} ist der mit $\frac{dI}{I}$ gewichtete Mittelwert der Bündelflüsse sämtlicher Stromfäden

$$\Rightarrow \Psi_{L2} = \frac{1}{I_2} \int_{x=2a}^{3a} \Phi_{L2}(x,t) \cdot \underbrace{d \cdot J_4(x)}_{} \, dx$$

$$\Rightarrow \Psi_{L2} = \frac{\hat{I}\left[-I_0 \cos(\omega t) \frac{\mu_0}{2\pi}\right]}{\hat{I}\left[\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1\right]} \cdot d \cdot I_2 \int_{x=2a}^{3a} \ln\frac{x}{a} \ln\frac{x}{a}$$

$$= - \frac{I_0 \cos(\omega t) \frac{\mu_0}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1} \int_{u=2}^{3} a (\ln u)^2 \, du \quad \left[\text{Substitution: } u = \frac{x}{a};\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\right]$$

$$= - I(t) \cdot \frac{\frac{\mu_0 a}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1} \cdot \left[u (\ln u)^2 - 2u \ln u + 2u\right]_{u=2}^{3}$$

$$= - I(t) \cdot \frac{\frac{\mu_0 a}{2\pi}}{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1} \left[3(\ln 3)^2 - 6\ln 3 + 6 - 2(\ln 2)^2 + 4\ln 2 - 4\right]$$

$$\Rightarrow \Psi_{L2} = - \frac{I(t)\mu_0 a}{2\pi} \cdot \frac{3(\ln 3)^2 - 2(\ln 2)^2 + 2 - 2\ln\left(\frac{27}{4}\right)}{\ln\left(\frac{27}{4}\right) - 1}$$

Aufgabe 2

a) $\underline{\vec{A}}_0 = \vec{e}_z \frac{j\omega\mu_0}{4\pi r} \underline{P} \cdot e^{-jk_0 r}$; $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ (1)

$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cdot \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \cdot \sin\vartheta$ (Formelsammlung) (2)

$\Rightarrow \underline{\vec{A}}_0 = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \underline{P} \left(\vec{e}_r \frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \cdot \cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta \right)$ (3)

$\Rightarrow \underline{\vec{H}}_0 = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \underline{\vec{A}}_0 = \frac{j\omega}{4\pi r} \underline{P} \cdot \vec{e}_\varphi \left(-\sin\vartheta \frac{d}{dr}\left(\cdot e^{-jk_0 r}\right) - \frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta) \right)$

$\Rightarrow \underline{\vec{H}}_0 = \vec{e}_\varphi \frac{j\omega}{4\pi} \underline{P} \frac{1}{r}\left(jk_0 + \frac{1}{r}\right) e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta$

$\underline{\vec{H}}_0 = \vec{e}_\varphi \frac{j\omega}{4\pi} \underline{P} \frac{1}{r^2}\left(jk_0 r + 1\right) \cdot e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta$ (5)

Fernfeld: $k_0 r \gg 1 \Rightarrow jk_0 r + 1 \approx jk_0 r$ (6)

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{H}}_0 = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega k_0}{4\pi r} \underline{P} e^{-jk_0 r} \cdot \sin\vartheta}$ (7)

b) TEM-Welle: $\underline{\vec{E}}_0 = -Z_0 \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_0$; $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$; $\vec{n} = \vec{e}_r$ (8)

$-\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\vartheta$ (9)

$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_0 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_0 Z_0}{4\pi} \underline{P} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_0 r}$ (10)

$\boxed{k_0 Z_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \omega\mu_0}$ (11)

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}_0 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2\mu_0}{4\pi} \underline{P} \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_0 r}}$ (12)

c) $\overline{\vec{S}_0(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}_0 \times \underline{\vec{H}}_0^* \right\}$; $\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = +\vec{e}_r$ (13)

$\Rightarrow \underline{\vec{E}}_0 \times \underline{\vec{H}}_0^* = \vec{e}_r \frac{\omega^2 k_0^2}{16\pi^2} Z_0 \underline{P}\underline{P}^* \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \vec{e}_r \frac{\omega^3\mu_0\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{16\pi^2} |P|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{\vec{S}_0(t)} = \vec{e}_r \frac{\omega^2 k_0^2 Z_0}{32\pi^2} |P|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} = \vec{e}_r \frac{\omega^4\mu_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{32\pi^2} |P|^2 \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}}$ (15)

d) $\underline{\vec{H}}_r = \vec{e}_\varphi \frac{\omega k_0}{4\pi r} \underline{P}_r e^{jk_0 r} \sin\vartheta$ (16)

Bei der rücklaufenden Welle gilt analog zu b) $\underline{\vec{E}}_r = -Z_0 \vec{n}_r \times \underline{\vec{H}}_r$

mit $\boxed{\vec{n}_r = -\vec{e}_r}$ (17)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}_r = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_0 Z_0}{4\pi} \underline{P}_r \frac{\sin\vartheta}{r} e^{jk_0 r} \underset{(11)}{=} -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \underline{P}_r \frac{\sin\vartheta}{r} e^{jk_0 r}} \quad (18)$$

e) Man erhält $\underline{\vec{H}}_1$ und $\underline{\vec{E}}_1$, indem man in (7) und (10) bzw. (12) ε_0 durch ε_1, k_0 durch k_1, Z_0 durch Z_1 und $\underline{P}$ durch $\underline{P}_1$ ersetzt.

$$\boxed{\underline{\vec{H}}_1 = -\vec{e}_\varphi \frac{\omega k_1}{4\pi r} \underline{P}_1 e^{-jk_1 r} \cdot \sin\vartheta \quad ; k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}} \quad (19)$$

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_1 = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega k_1 \varepsilon_1}{4\pi} \underline{P}_1 \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-jk_1 r} = -\vec{e}_\vartheta \frac{\omega^2 \mu_0}{4\pi} \underline{P}_1 \frac{\sin\vartheta}{r} \cdot e^{-jk_1 r}} \quad (20)$$

mit $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$; $Z_1 k_1 = \omega\mu_0$ (analog zu (11)) (21)

f) Bei $r = a$ gilt:

1) $\vec{E}_{tang}$ stetig $\Rightarrow \underline{E}_{\vartheta,\text{Gebiet}0}(r=a) = \underline{E}_{\vartheta,\text{Gebiet}1}(r=a)$ (22)

$\vec{H}_{tang}$ stetig $\Rightarrow \underline{H}_{\varphi,\text{Gebiet}0}(r=a) = \underline{H}_{\varphi,\text{Gebiet}1}(r=a)$ (23)

g) Es gilt $\underline{\vec{E}}_{\text{Gebiet}0} = \underline{\vec{E}}_0 + \underline{\vec{E}}_r$; $\underline{\vec{H}}_{\text{Gebiet}0} = \underline{\vec{H}}_0 + \underline{\vec{H}}_r$ (24)

Dann folgt aus (22), (12), (18), (20)

$$\underline{P} \cdot e^{-jk_0 a} + \underline{P}_r \cdot e^{jk_0 a} = \underline{P}_1 \cdot e^{-jk_1 a} \quad (25)$$

Analog aus (23), (7), (16), (19):

$$-\underline{P} k_0 e^{-jk_0 a} + \underline{P}_r k_0 \cdot e^{jk_0 a} = -\underline{P}_1 k_1 e^{-jk_1 a} \quad (26)$$

$$\Rightarrow \underline{P} e^{-jk_0 a} - \underline{P}_r e^{jk_0 a} = \frac{k_1}{k_0} \underline{P}_1 e^{-jk_1 a} \quad (27)$$

(25)+(27): $2\underline{P} \cdot e^{-jk_0 a} = \underline{P}_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right) \cdot e^{-jk_1 a} = \underline{P}_1 \frac{k_0 + k_1}{k_0} e^{-jk_1 a}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{P}_1 = \frac{2 \cdot k_0}{k_0 + k_1} \underline{P} \cdot e^{j a (k_1 - k_0)}} \qquad (28)$$

(25) − (27): $2\underline{P}_r \cdot e^{j k_0 a} = \underline{P}_1 \left(1 - \frac{k_1}{k_0}\right) e^{-j k_1 a} = P_1 \frac{k_0 - k_1}{k_0} e^{-j k_1 a}$

$$\overset{(28)}{\Rightarrow} 2\underline{P}_r e^{j k_0 a} = 2 \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \underline{P} \cdot e^{-j k_0 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{P}_r = \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \underline{P} \cdot e^{-2 j k_0 a}} \qquad (29)$$

i) Man erhält $\vec{S}_1(t)$ aus $\vec{S}_0(t)$ [siehe (15)], indem man in (15) ε_0 durch ε_1, k_0 durch k_1, Z_0 durch Z_1 und $\underline{P}$ durch $\underline{P}_1$ ersetzt:

$$\boxed{\overline{\vec{S}_1(t)} = \vec{e}_r \frac{\omega^2 k_1^2 Z_1}{32\pi^2} |\underline{P}_1|^2 \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} = \vec{e}_r \frac{\omega^4 \mu_0 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}{32\pi^2} |\underline{P}_1|^2 \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}} \qquad (30)$$

$$f = \frac{|\overline{\vec{S}_1(t)}|}{|\overline{\vec{S}_0(t)}|} = \frac{|\underline{P}_1|^2}{|\underline{P}|^2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \quad ; \quad \eta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} \qquad (31)$$

$$\Rightarrow f = \eta \frac{|\underline{P}_1|^2}{|\underline{P}|^2} \overset{(28)}{=} \eta \frac{4 k_0^2}{(k_0 + k_1)^2} = \frac{4\eta}{\left(1 + \frac{k_1}{k_0}\right)^2} \qquad (32)$$

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}} = \eta$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2}} \quad ; \text{ wegen } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 \text{ gilt } \eta \geq 1 \qquad (33)$$

Spezialfall: $\varepsilon_1 = 9\varepsilon_0 \Rightarrow \eta = 3 \Rightarrow \boxed{f = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 75\%}$ (34)

Es dringt nur 75% der Leistung in den Raum 1 ein, die der Dipol im freien Raum abstrahlen würde.

Aufgabe 3

a) Helmholtz-Gleichung: $\Delta \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z + k^2 \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z = 0$

b) Separationsansatz: $\underline{f}(x,y,z) = u(x)\cdot v(y)\, e^{-j\beta z}$

$$\frac{\Delta \underline{f}(x,y,z)}{\underline{f}(x,y,z)} = \frac{1}{u(x)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x)\right) + \frac{1}{v(y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)\right) - \beta^2 = -k^2$$

$$= -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + k_x^2 u(x) = 0 \;;\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y) + k_y^2 v(y) = 0;$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\Rightarrow \underline{u(x) = A_1\cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)\;;\; v(y) = A_3\cos(k_y y) + A_4 \sin(k_y y)}$$

c) Auf G_1 bis G_4 gilt: $\vec{E}\times\vec{n} = 0$, also:

$$E_x|_{y=0} = 0\;;\; E_x|_{y=b} = 0\;;\; E_y|_{x=0} = 0\;;\; E_y|_{x=a} = 0$$

sowie $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \vec{n}} = 0$, also:

$$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow A_4 = 0\;;\; \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{l\pi}{b}\;;$$

$$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow A_2 = 0\;;\; \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}\;;$$

$$n, l \in [0;1;2;3;\ldots] = \mathbb{N}_0$$

$$\underline{\underline{\underline{f}}}(x,y,z) = A'_{n,l}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\left[\omega^2\varepsilon\mu - \frac{n\pi}{a} - \frac{l\pi}{b}\right]^{\frac{1}{2}}z\right)$$

a) $\underline{\vec{E}} = -\nabla \times \underline{\Pi}\,\vec{e}_z = -\frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial y}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial x}\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \underline{E}_{x,mn} = -\frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial y} = A'_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mn}z\right)$$

$$= \underline{n A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mn}z\right)}$$

für $A_{mn} = A'_{mn}\frac{\pi}{b}$, analog für $\underline{E}_{y,mn} = \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial x}$

b) Auf G_5 gilt: $\vec{E}\times\vec{n} = 0$, also $E_{tan} = 0$, d.h.

$$\vec{E}\cdot\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{E_x - E_y = 0}$$

f) Auf G_6 gilt: $\underline{E}_{x,mn} = \underline{E}_{y,mn}$ für $y = b - x$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}(b-x)\right) = -m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}(b-x)\right)$$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\underbrace{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{b}x\right)}_{(-1)^n\cdot\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right)} = -m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\underbrace{\cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{b}x\right)}_{(-1)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right)}$$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

Dies ist erfüllt für $n = m$.

$$\underline{E}_{x,mm} = m A_{mm}\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mm}z\right)$$

$$\underline{E}_{y,mm} = -m A_{mm}\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mm}z\right)$$

$$\beta_{mm} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - 2\frac{m\pi}{b}}$$

Aufgabe 3

a) Helmholtz-Gleichung: $\Delta \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z + k^2 \underline{f}(x,y,z)\vec{e}_z = 0$

b) Separationsansatz: $\underline{f}(x,y,z) = u(x)\cdot v(y)\, e^{-j\beta z}$

$$\frac{\Delta \underline{f}(x,y,z)}{\underline{f}(x,y,z)} = \frac{1}{u(x)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x)\right) + \frac{1}{v(y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y)\right) - \beta^2 = -k^2$$

$$= -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x) + k_x^2 u(x) = 0 \;;\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}v(y) + k_y^2 v(y) = 0;$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - k_x^2 - k_y^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = A_1\cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x)\;;\; v(y) = A_3\cos(k_y y) + A_4 \sin(k_y y)$$

c) Auf G_1 bis G_4 gilt: $\vec{E}\times\vec{n} = 0$, also:

$$E_x\big|_{y=0} = 0\;;\; E_x\big|_{y=b} = 0\;;\; E_y\big|_{x=0} = 0\;;\; E_y\big|_{x=a} = 0$$

sowie $\frac{\partial \underline{f}}{\partial \vec{n}} = 0$, also:

$$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow A_4 = 0\;;\; \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \Rightarrow k_y = \frac{l\pi}{b}\;;$$

$$\left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow A_2 = 0\;;\; \left.\frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n\pi}{a}\;;$$

$$n, l \in [0; 1; 2; 3; \ldots] = \mathbb{N}_0$$

$$\underline{f}(x,y,z) = A'_{n,l}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\left[\omega^2\varepsilon\mu - \frac{n\pi}{a} - \frac{l\pi}{b}\right]^{\frac{1}{2}}z\right)$$

H05

a) $\underline{\vec{E}} = -\nabla \times \underline{\Phi}\,\vec{e}_z = -\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial y}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial x}\vec{e}_y + 0\cdot\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \underline{E}_{x,mn} = -\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial y} = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mn}z\right)$$

$$= \underline{n A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mn}z\right)}$$

für $A_{mn} = A'_{mn}\frac{\pi}{b}$, analog für $\underline{E}_{y,mn} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial x}$

c) Auf G_5 gilt: $\vec{E}\times\vec{n} = 0$, also $E_{tan} = 0$, d.h.

$$\vec{E}\cdot\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{E_x - E_y = 0}$$

f) Auf G_6 gilt: $\underline{E}_{x,mn} = \underline{E}_{y,mn}$ für $y = b - x$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}(b-x)\right) = -m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}(b-x)\right)$$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\underbrace{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{b}x\right)}_{(-1)^n\cdot\left(-\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right)} = -m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\underbrace{\cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{b}x\right)}_{(-1)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right)}$$

$$\Rightarrow n\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = m\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)$$

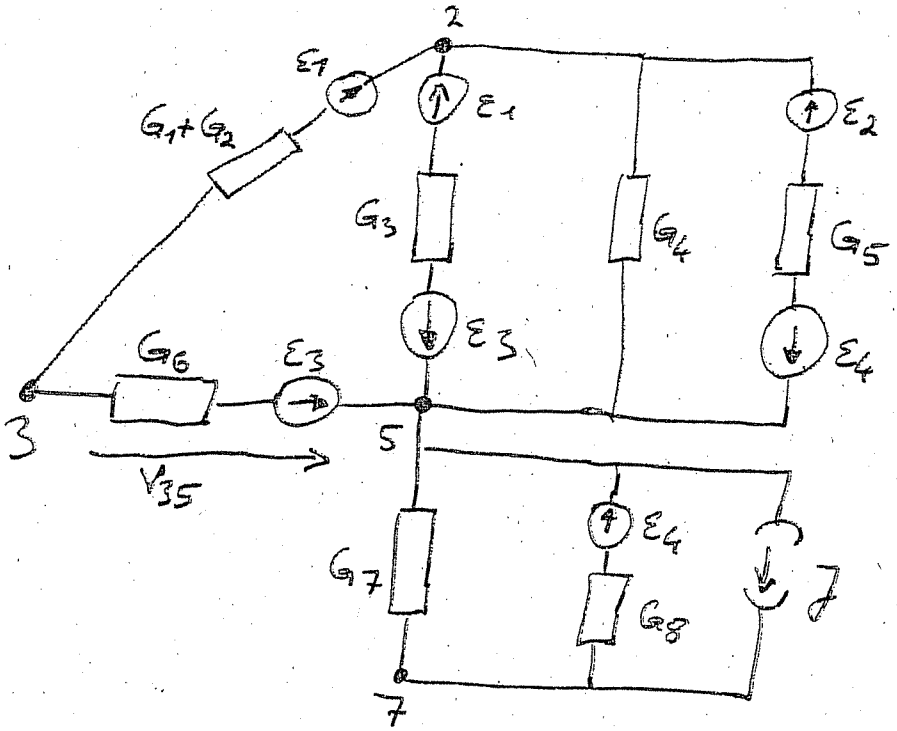
Dies ist erfüllt für $n = m$.

$$\underline{E}_{x,mm} = m A_{mm}\cos\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mm}z\right)$$

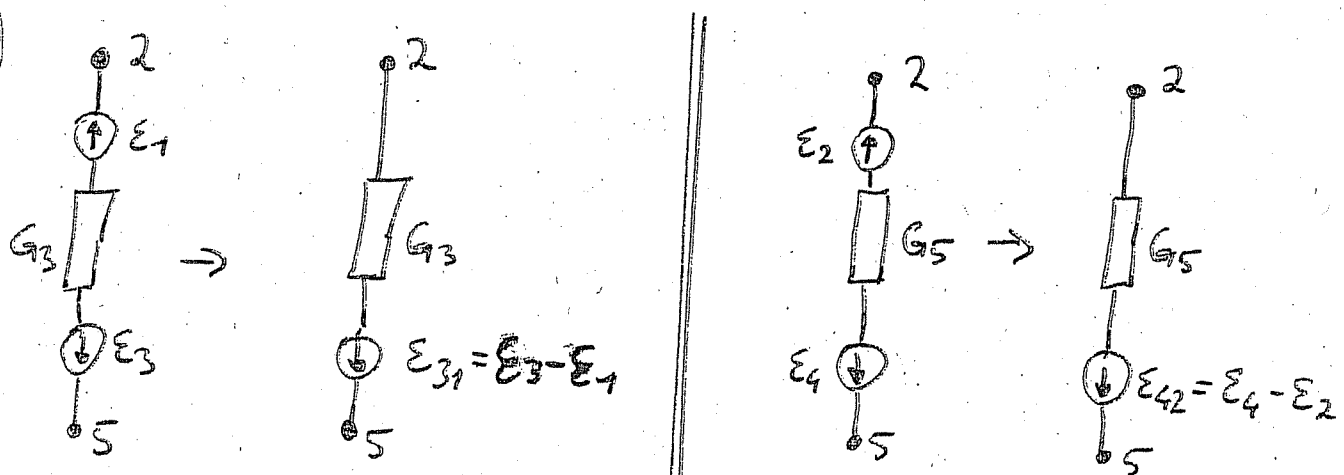
$$\underline{E}_{y,mm} = -m A_{mm}\sin\left(\frac{m\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\exp\left(-j\beta_{mm}z\right)$$

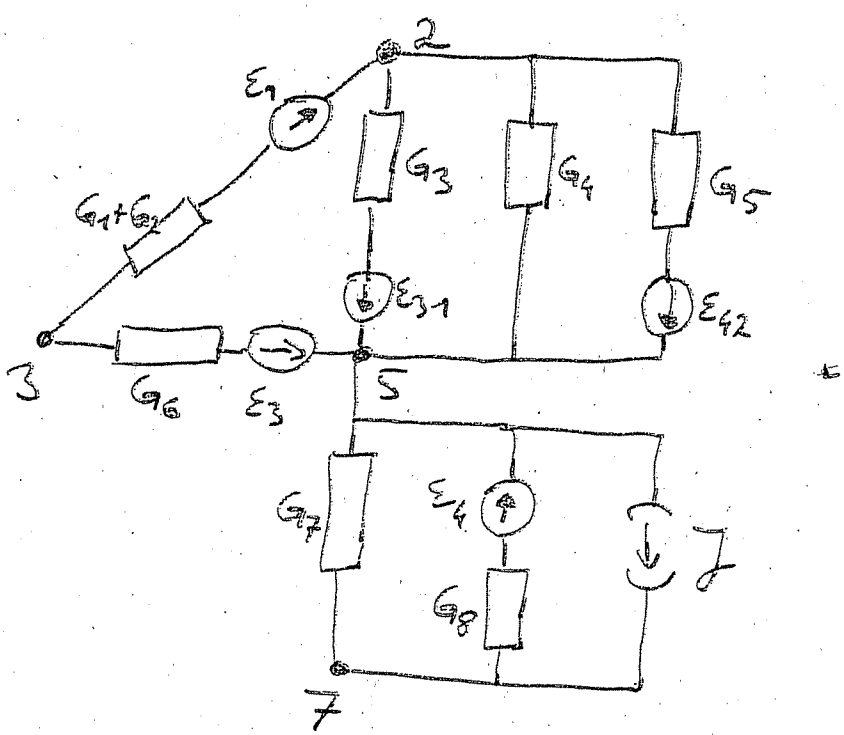
$$\beta_{mm} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - 2\frac{m\pi}{b}}$$

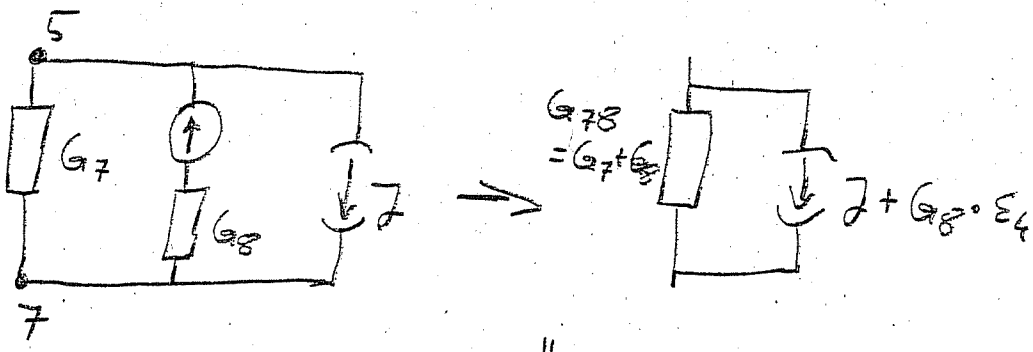
a)

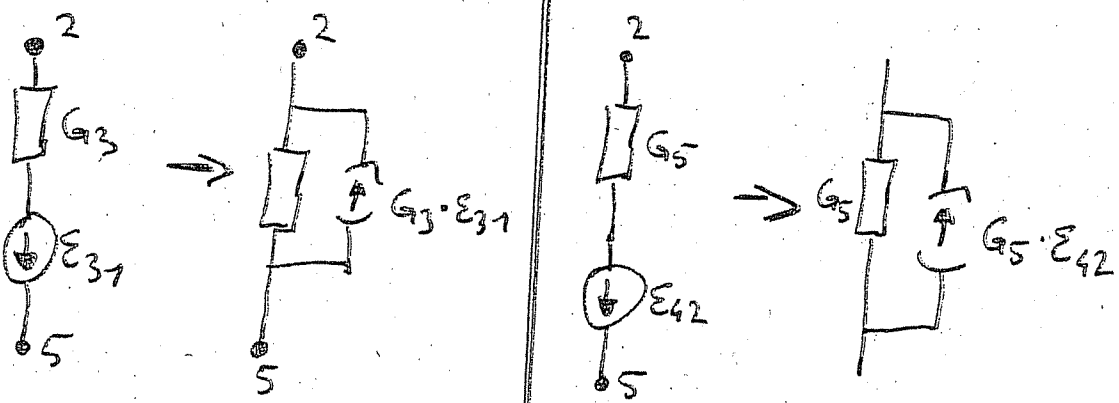

2
$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
G_1+G_2
G_3
G_4
G_5
$\mathcal{E}_3$
$\mathcal{E}_4$
G_6
$\mathcal{E}_3$
3
5
V_{35}
$\mathcal{E}_4$
G_7
G_8
J
7

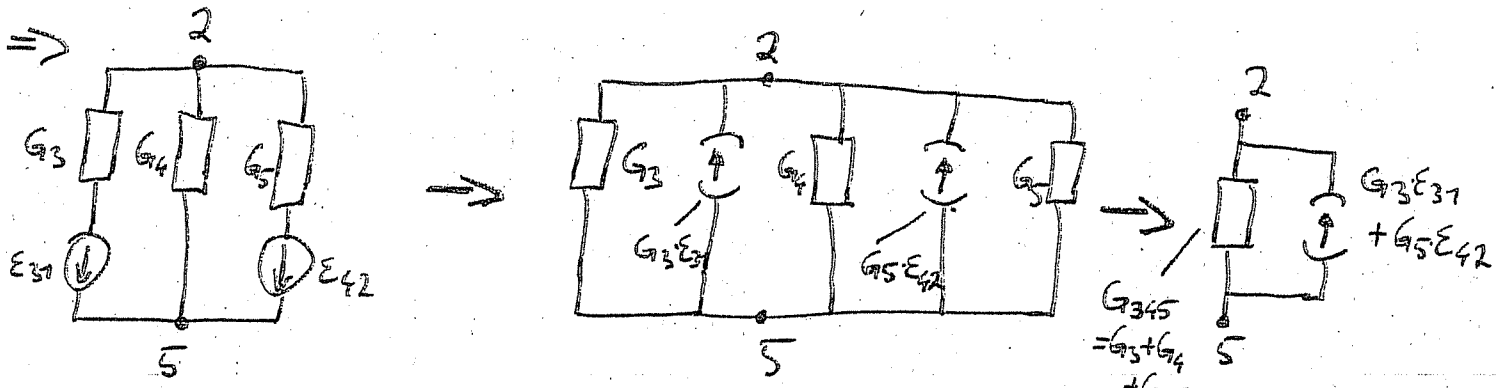
b)

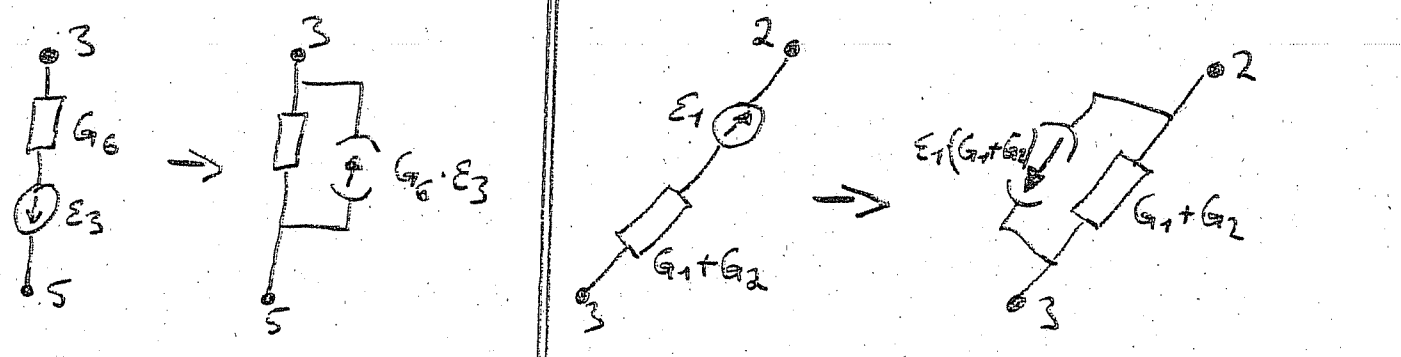

2
$\mathcal{E}_1$
G_3
$\mathcal{E}_3$
5
$\mathcal{E}_{31}=\mathcal{E}_3-\mathcal{E}_1$
$\mathcal{E}_2$
G_5
$\mathcal{E}_4$
$\mathcal{E}_{42}=\mathcal{E}_4-\mathcal{E}_2$

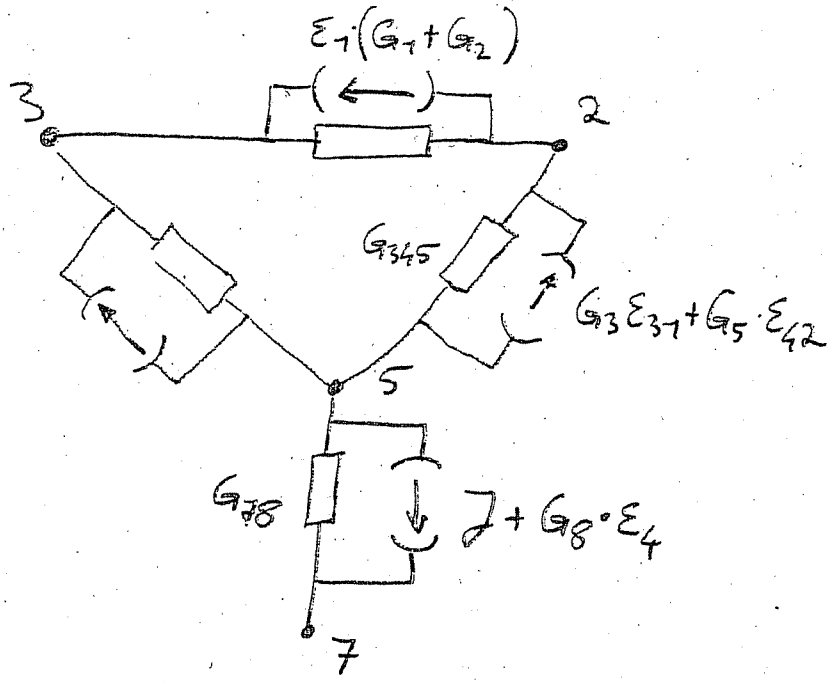

2
$\mathcal{E}_1$
G_3
G_4
G_5
G_1+G_2
$\mathcal{E}_{31}$
$\mathcal{E}_{42}$
3
G_6
$\mathcal{E}_3$
5
G_7
$\mathcal{E}_4$
J
G_8
7

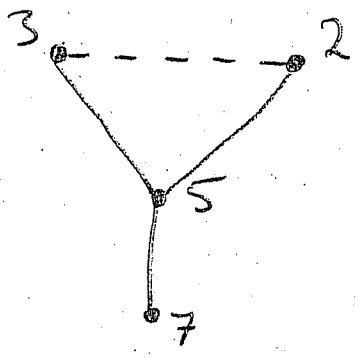

5
G_7
G_8
J
7
G_{78}
$= G_7 + G_8$
$J + G_8 \cdot \varepsilon_4$


2
G_3
ε_{31}
5
$G_3 \cdot \varepsilon_{31}$
G_5
ε_{42}
$G_5 \cdot \varepsilon_{42}$


2
G_3
G_4
G_5
ε_{31}
ε_{42}
5
$G_3 \varepsilon_{31}$
$G_5 \varepsilon_{42}$
G_{345}
$= G_3 + G_4$
$+ G_5$
$G_3 \varepsilon_{31}$
$+ G_5 \varepsilon_{42}$


3
G_6
ε_3
5
$G_6 \cdot \varepsilon_3$
2
ε_1
$G_1 + G_2$
3
$\varepsilon_1 (G_1 + G_2)$





c) Vollständig: nein

Zweige $z=4$ Knoten $K=4$

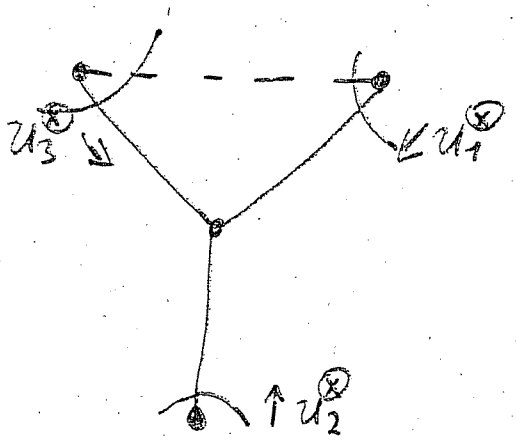
Anzahl der linear unabhängigen Schnittmengengleichungen

Rang des Graphen: $p=k-s=4-1=3$

Anzahl der linear unabhängigen Maschengleichungen:

erste Bettische Zahl: $m=z-p=\cancel{z}-k+s=4-4+1=1$

d)



$$\vec{\underset{\otimes}{J}} = \begin{pmatrix} \underset{\otimes}{J_1} \\ \underset{\otimes}{J_2} \\ \underset{\otimes}{J_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_3\varepsilon_{31} + G_5\varepsilon_{42} - \varepsilon_1(G_1+G_2) \\ J + G_8\cdot\varepsilon_4 \\ G_6\varepsilon_3 - \varepsilon_1(G_1+G_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} G_3(\varepsilon_3-\varepsilon_1) + G_5(\varepsilon_4-\varepsilon_2) - \varepsilon_1(G_1+G_2) \\ J + G_8\cdot\varepsilon_4 \\ G_6\cdot\varepsilon_3 - \varepsilon_1(G_1+G_2) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\otimes}{Y} = \begin{pmatrix} G_1+G_2+G_3+G_4+G_5 & 0 & -G_1-G_2 \\ 0 & G_7+G_8 & 0 \\ -G_1-G_2 & 0 & G_1+G_2+G_6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\underset{\otimes}{U}} = \begin{pmatrix} \underset{\otimes}{U_1} \\ \underset{\otimes}{U_2} \\ \underset{\otimes}{U_3} \end{pmatrix}$$

e) $U_{35} = 0 = \underset{\otimes}{U_3}$

$\varepsilon_1 = 0 \wedge \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \wedge G_3 = G_5$

$$\underset{\otimes}{J} = \begin{pmatrix} G_5(\varepsilon_2-0) + G_5(\varepsilon_4-\varepsilon_2) - 0 \\ J + G_8\cdot\varepsilon_4 \\ G_6\cdot\varepsilon_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_5\cdot\varepsilon_4 \\ J + G_8\cdot\varepsilon_4 \\ G_6\cdot\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$U_{35} = \underset{\otimes}{U_3} = 0$ Kramersche Regel:

$$\det\begin{pmatrix} G_1+G_2+2\cdot G_3+G_4 & 0 & G_3\varepsilon_4 \\ 0 & G_7+G_8 & J+G_8\varepsilon_4 \\ -G_1-G_2 & 0 & G_6\cdot\varepsilon_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(G_1+G_2+2G_3+G_4)(G_7+G_8)G_6\cdot\varepsilon_3 - G_3\cdot\varepsilon_4(G_7+G_8)\cdot(-(G_1+G_2)) = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_4\frac{(G_1+G_2)G_3}{(G_1+G_2+2G_3+G_4)G_6}$$

Aufgabe 5

a) Symmetrie: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33}$

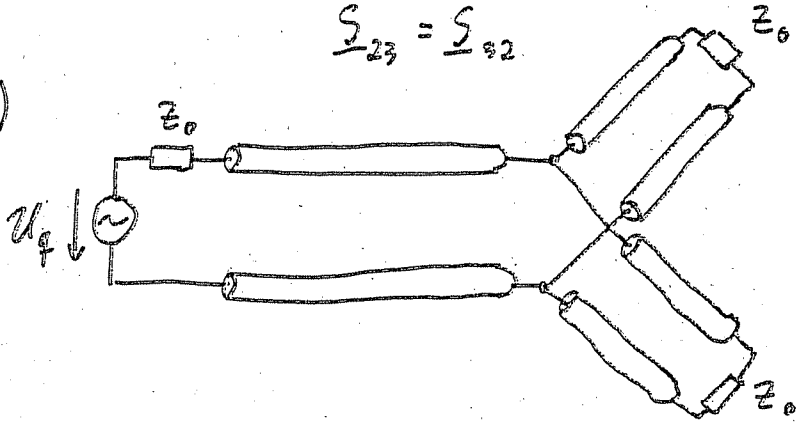
$\underline{S}_{12} = \underline{S}_{13} = \underline{S}_{23}$

Reziprokität: $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

$\underline{S}_{13} = \underline{S}_{31}$

$\underline{S}_{23} = \underline{S}_{32}$

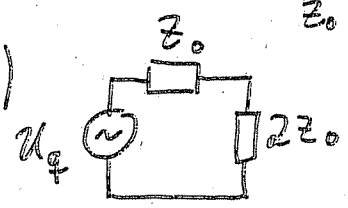
b)



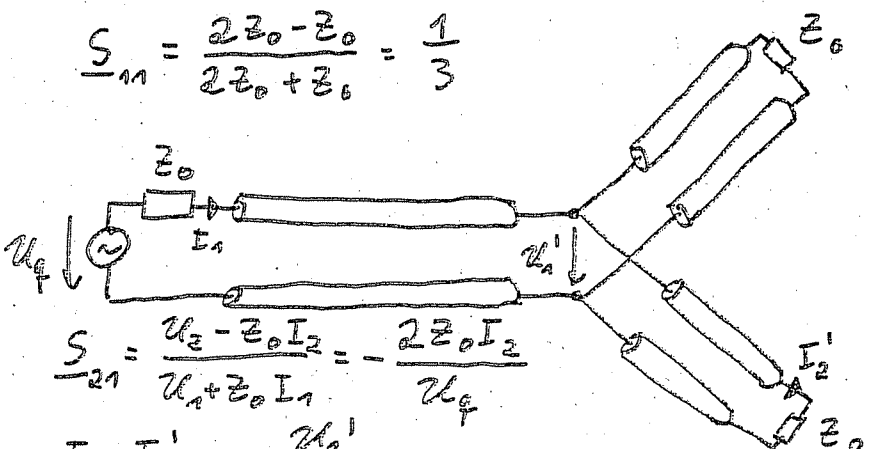
c) Transformation über $\frac{\lambda}{4}$-Leitung:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{j Z_0 I_2}{\frac{j}{Z_0} U_2} = \frac{Z_0^2}{Z_2} \Rightarrow Z_1 Z_2 = Z_0^2$$

d)



$$\underline{S}_{11} = \frac{2Z_0 - Z_0}{2Z_0 + Z_0} = \frac{1}{3}$$



$$\underline{S}_{21} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{2Z_0 I_2}{U_q}$$

$$I_2 = -I_2' = -\frac{U_1'}{jZ_0}$$

$$U_1' = -\frac{jZ_0}{I_1}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1$$

$$U_q = 3 Z_0 I_1$$

$$\Rightarrow \underline{S}_{21} = -\frac{2}{3}$$

H05 Seite 141/24

e) $$S \cdot S^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) Am Streuparameter $\underline{S}_{31} = \underline{S}_{21} = -\frac{2}{3}$ erkennt man, daß zwischen b_3 und a_1 ein Phasenunterschied von 180° besteht.
Anschauliche Deutung: Die Welle durchläuft zwischen Tor 1 und Tor 3 eine $\frac{\lambda}{2}$ lange Leitung.

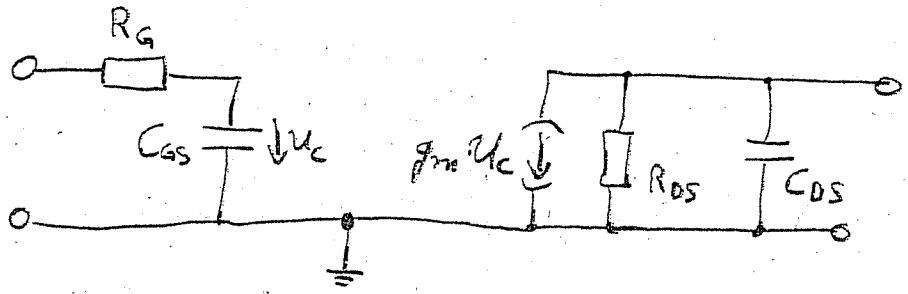
g) Resultierende Streumatrix:

$$S' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}a & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}a & \frac{1}{3}a^{-2} & -\frac{2}{3}a \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}a & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

h) $$(1 - |S'_{11}|^2) \cdot |\underline{S}'_{21}|^2 = \frac{4}{9}$$

i) Leerlauf im Kreuzungspunkt, also Kurzschluß an Ebene 3

a)



Da der Transistor unilateral ist, hängt $\underline{S}_{11}$ nur von R_G und C_{GS} und $\underline{S}_{22}$ nur von R_{DS} und C_{DS} ab.

Aus Smith Chart ablesen:

Zu $\underline{S}_{11}$ gehörige normierte Impedanz: $\underline{z}_{S11} = 0{,}43 - j\,0{,}40$ $(R_G + C_{GS})$

Zu $\underline{S}_{22}$ " " Admittanz: $\underline{y}_{S22} = 0{,}20 + j\,0{,}40$ $(R_{DS} \parallel C_{DS})$

Also ist

$$R_G = 0{,}43 \cdot 50\,\Omega = 21{,}5\,\Omega$$

$$\omega C_{GS} = \frac{1}{0{,}4 \cdot 50\,\Omega} = 0{,}05\,S$$

$$R_{DS} = \frac{50\,\Omega}{0{,}2} = 250\,\Omega$$

$$\omega C_{DS} = \frac{0{,}4}{50\,\Omega} = 0{,}008\,S$$

b) Für Leistungsanpassung müßte $\underline{\Gamma}_Q = \underline{S}_{11}^*$ gelten.
Die bestmögliche Annäherung ist daher derjenige Punkt $\underline{\Gamma}_Q$ auf dem Kreis $F = 3{,}4\,dB$, für den $\underline{\Gamma}_Q - \underline{S}_{11}^*$ minimal wird:

$$\underline{\Gamma}_Q = 0{,}4 \angle 152°$$

c) Die gezeigte Topologie des Anpassungsnetzwerkes ist die einzig mögliche, da bei Anschluss der Stichleitung auf der Seite des Transistors die Serienleitung keinen Einfluss hätte (sie würde die Phase von 0 ändern), und mit einer Stichleitung alleine die benötigte Transformation nicht durchgeführt werden kann.

Transformation im Smith Chart: Mit Admittanz $\underline{y}_P$ vom Ursprung aus, dann mit Serienleitung $\underline{\Gamma}_Q$.

Ablesen: $\underline{y}_P = j\,0{,}87$, $\ell_S = 0{,}539\lambda - 0{,}407\lambda = 0{,}132\lambda$

Also ist $\underline{y}_P$ kapazitiv, der Abschluss der Stichleitung offen und die Länge $\ell_P = 0{,}363\lambda - 0{,}25\lambda = 0{,}113\lambda$

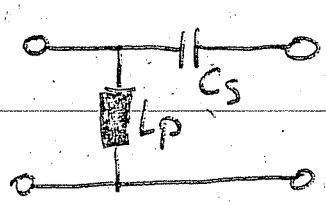
Alternativer Wert von $\underline{\Gamma}_Q$:

Transformation im Smith Chart: Mit Admittanz $\underline{y}_P$ vom Ursprung aus, dann mit Serienleitung bis $\underline{\Gamma}_Q$.

Ablesen: $\underline{y}_P = j\,1{,}95$, $\ell_S = 0{,}5+42\lambda - 0{,}437\lambda = 0{,}077\lambda$

Also ist $\underline{y}_P$ kapazitiv, der Abschluss der Stichleitung offen und die Länge $\ell_P = 0{,}425\lambda - 0{,}25\lambda = 0{,}175\lambda$

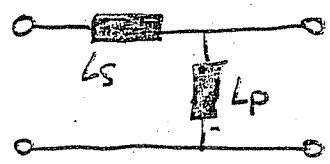
f) Variante 1:



$\underline{z}_{C_S} = -j\,2{,}01$

$\underline{y}_{L_P} = -j\,0{,}70$

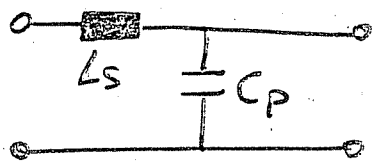
Variante 2:



$\underline{y}_{Lp} = -j0{,}61$

$\underline{z}_{Ls} = j \cdot 7{,}26$

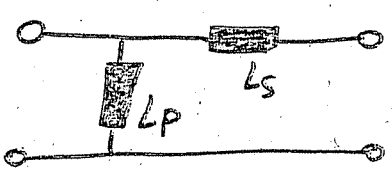
Variante 3:



$\underline{y}_{Cp} = j\,0{,}36$

$\underline{z}_{Ls} = j\,2{,}76$

Variante 4:



$\underline{z}_{Ls} = j\,2{,}61$

$\underline{y}_{Lp} = -j\,0{,}10$

e) Der Verstärker ist uneingeschränkt stabil. Hinreichende Bedingung für uneingeschränkte Stabilität des Transistors ist

$$|\underline{\Gamma}_i| < 1 \;\wedge\; |\underline{\Gamma}_a| < 1$$

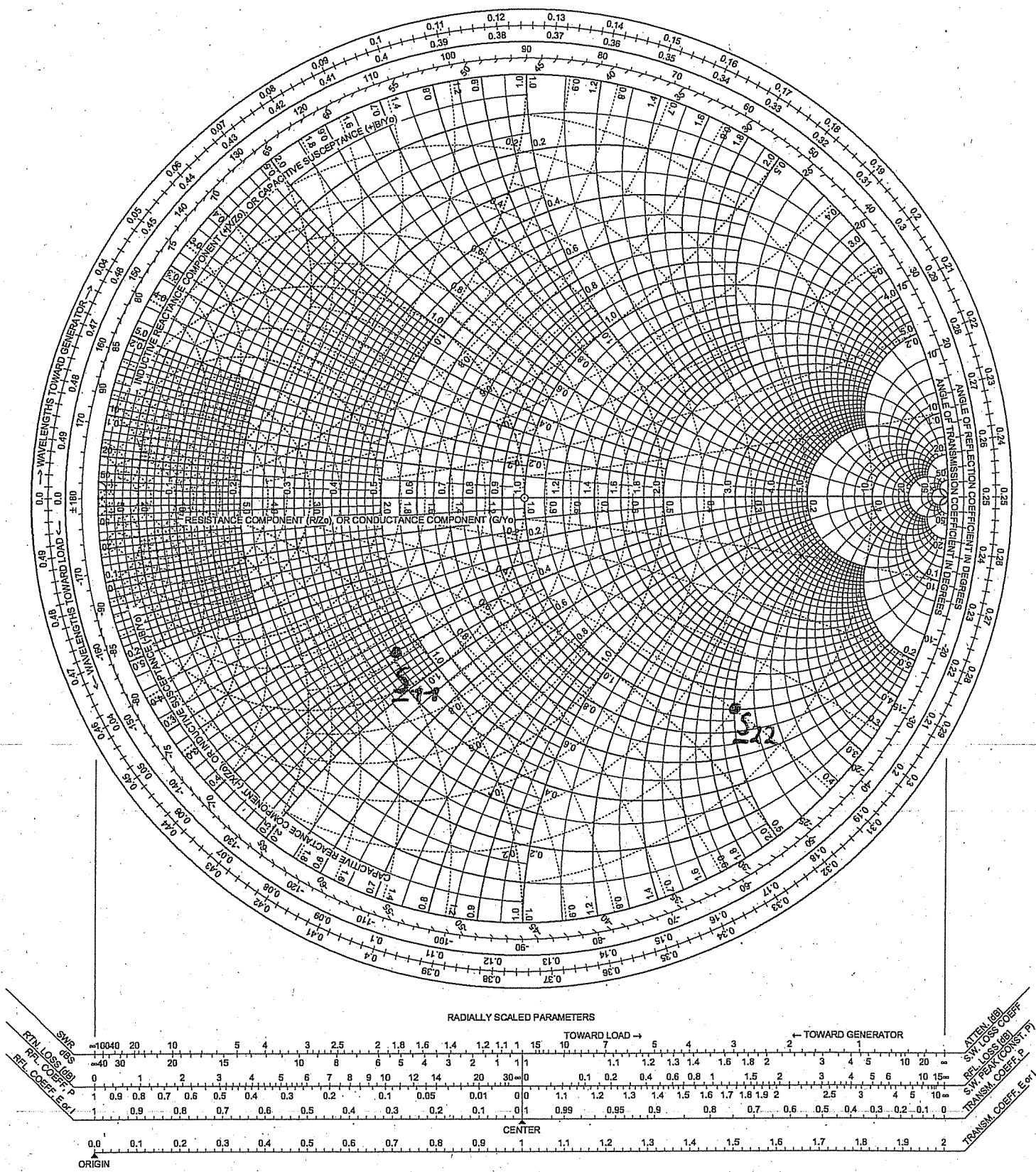
Hier: $|\underline{\Gamma}_i| = |\underline{S}_{11}| < 1$

$|\underline{\Gamma}_a| = |\underline{S}_{22}| < 1$ sind erfüllt laut Aufgabenstellung.

Die Anpassungsnetzwerke sind rein passiv, daher können die Eingangs- und Ausgangsreflexionsfaktoren des kompletten Verstärkers nicht größer als $|\underline{\Gamma}_i|$ und $|\underline{\Gamma}_a|$ des Transistors sein.

Zu Aufgabe 6 a): Seite 18/24 EMF H05

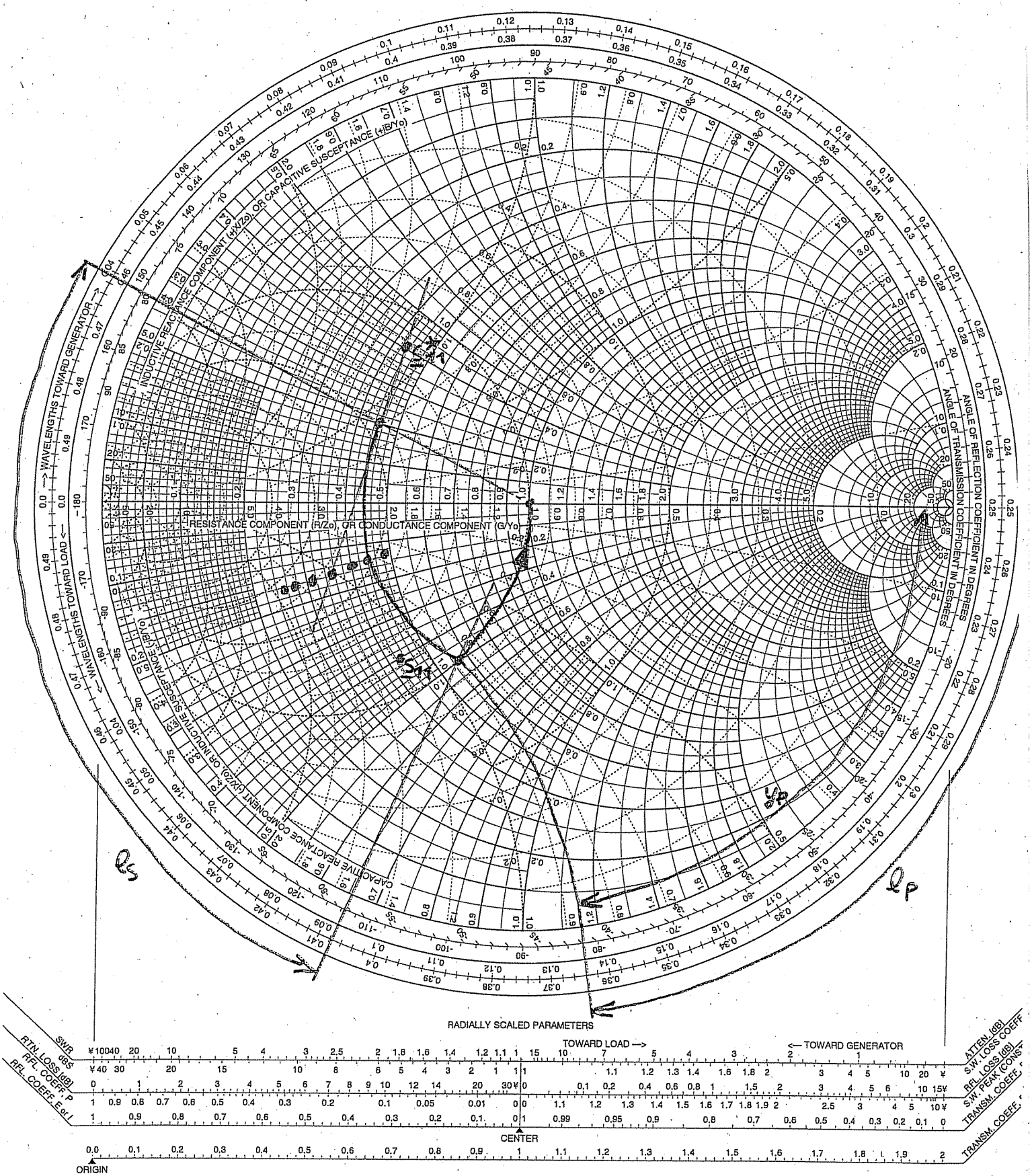
The Complete Smith Chart (ZY)



zu Aufgabe 6c):

(Lösung aus 6b))

The Complete Smith Chart

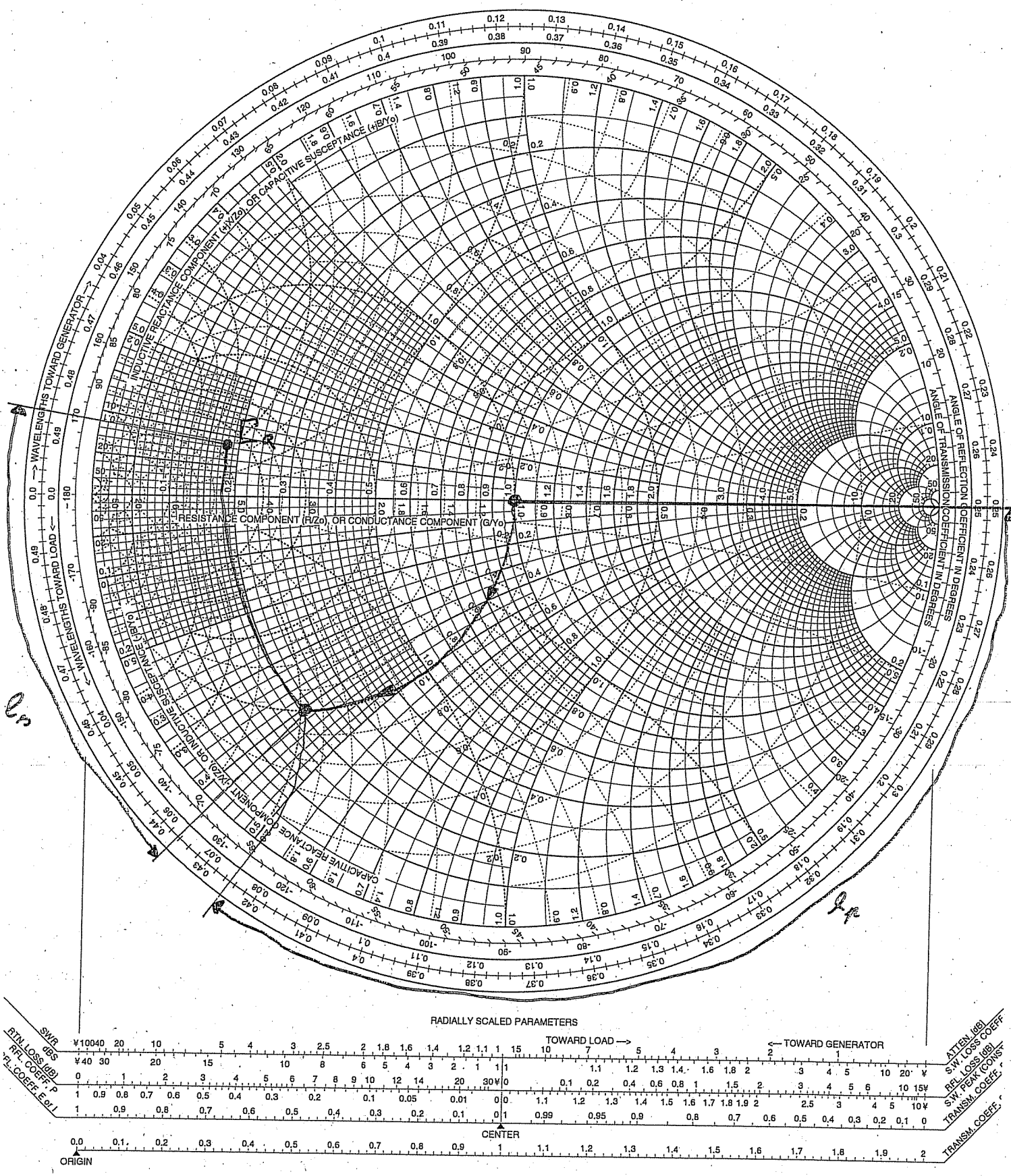


Zu Aufgabe 6c):
(Alternativlösung "ohne 6)")

Seite 20/24

EMT HoS

The Complete Smith Chart



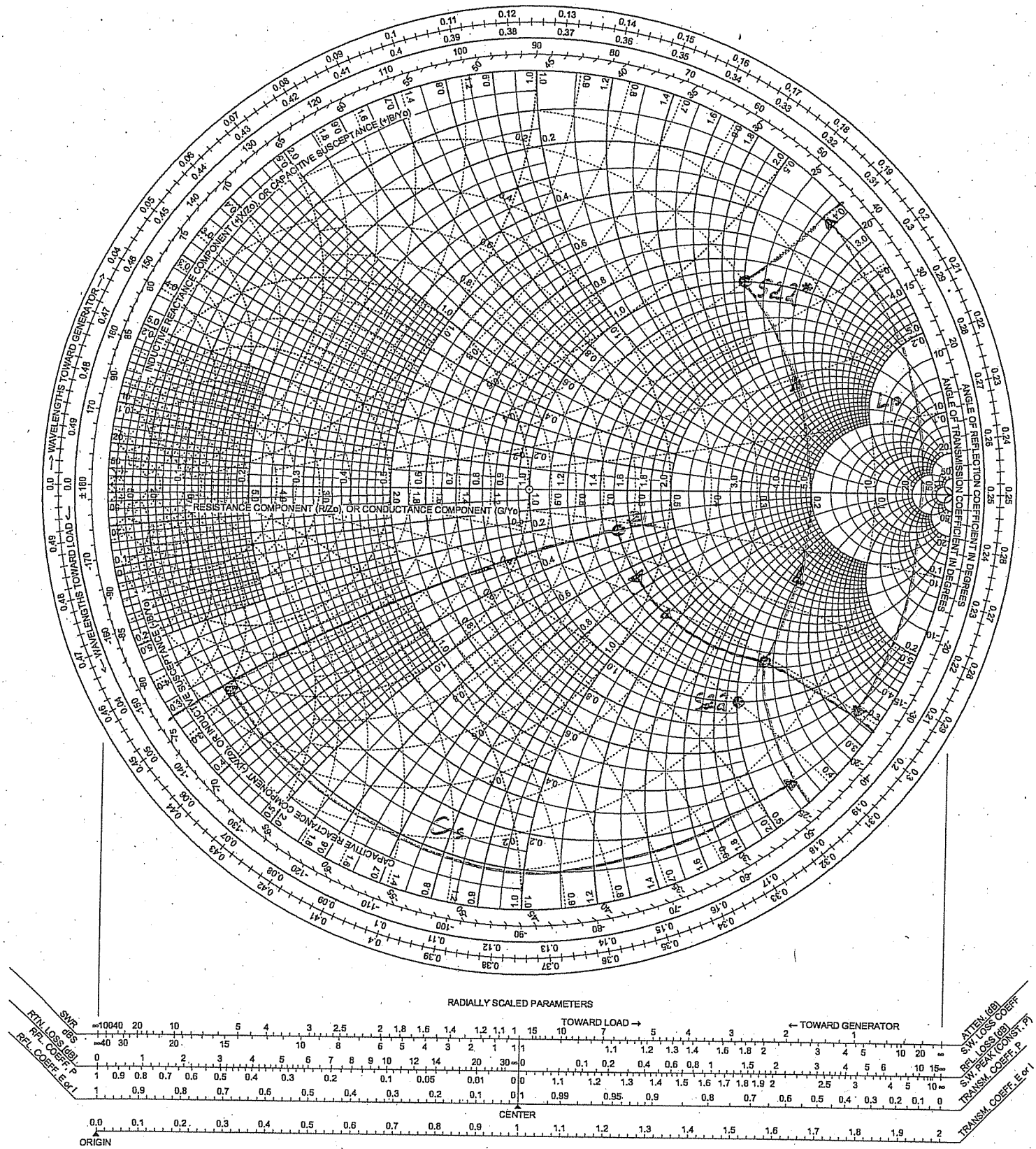
HU5

Seite 21/24

zu Aufgabe 6d)

Variante 1:

The Complete Smith Chart (ZY)



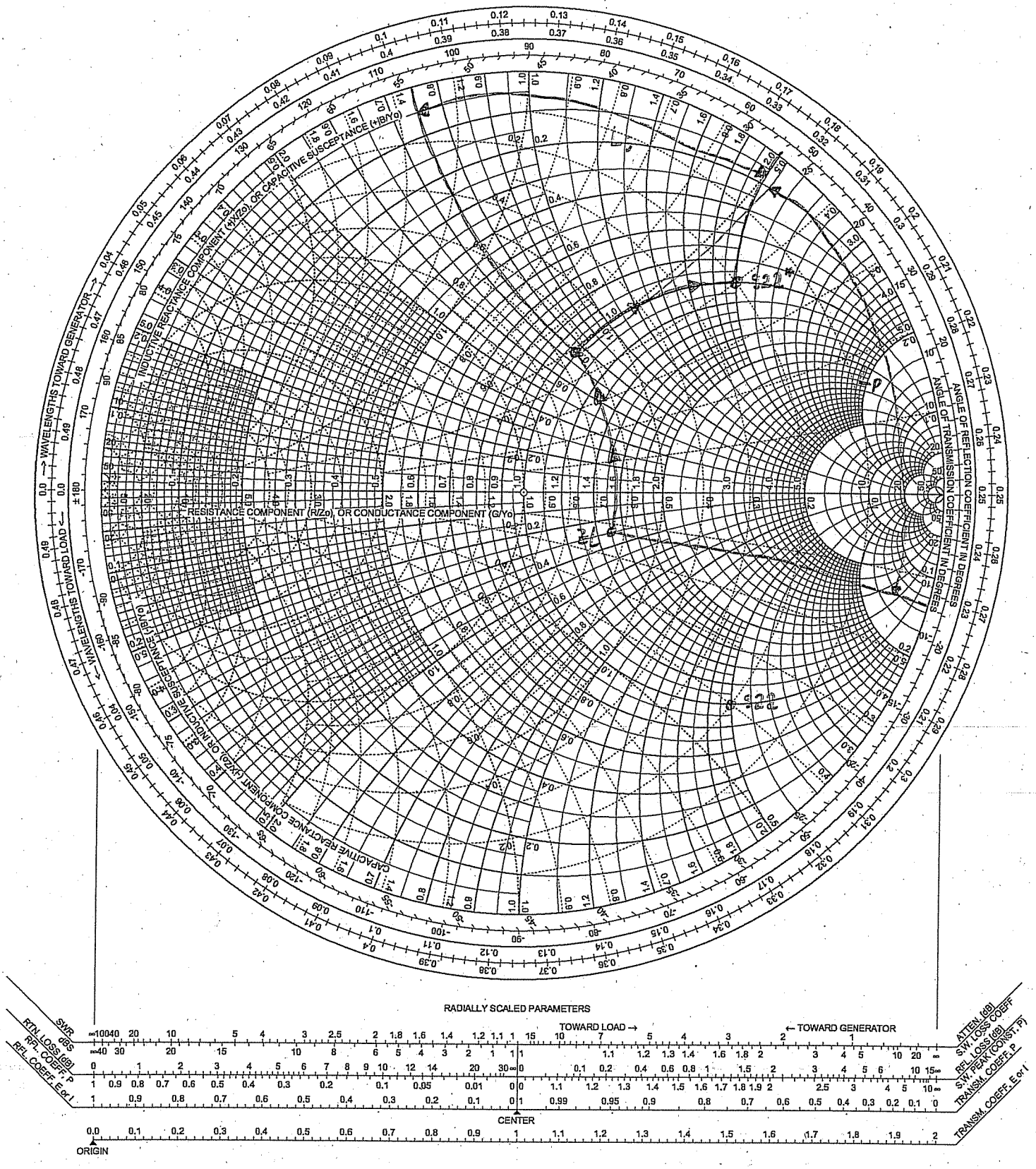
H05

Seite 22/24

zu Aufgabe 6 d)

Variante 2:

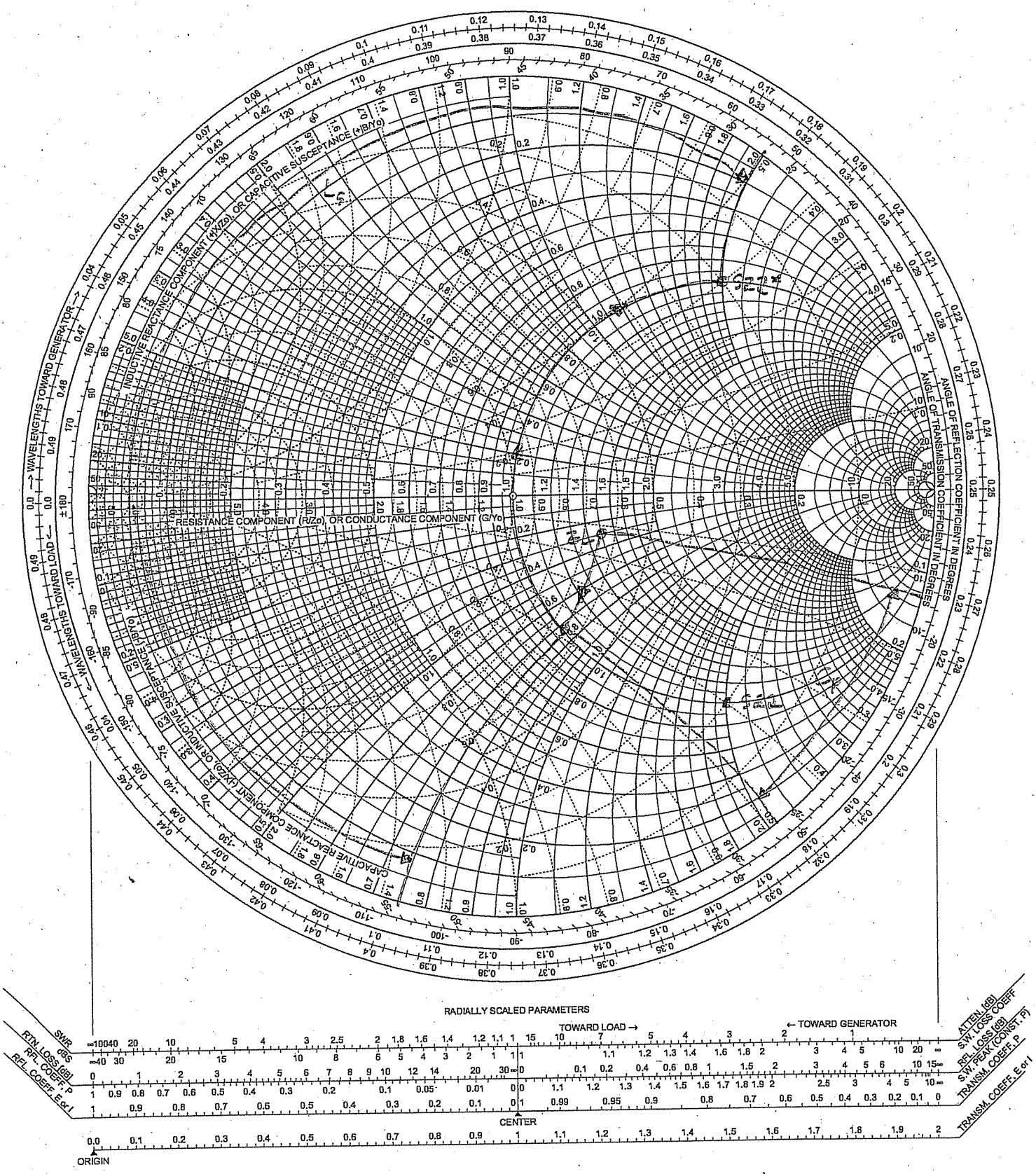
The Complete Smith Chart (ZY)



H05
zu Aufgabe 6d)
Variante 3:

Seite 23/24

The Complete Smith Chart (ZY)



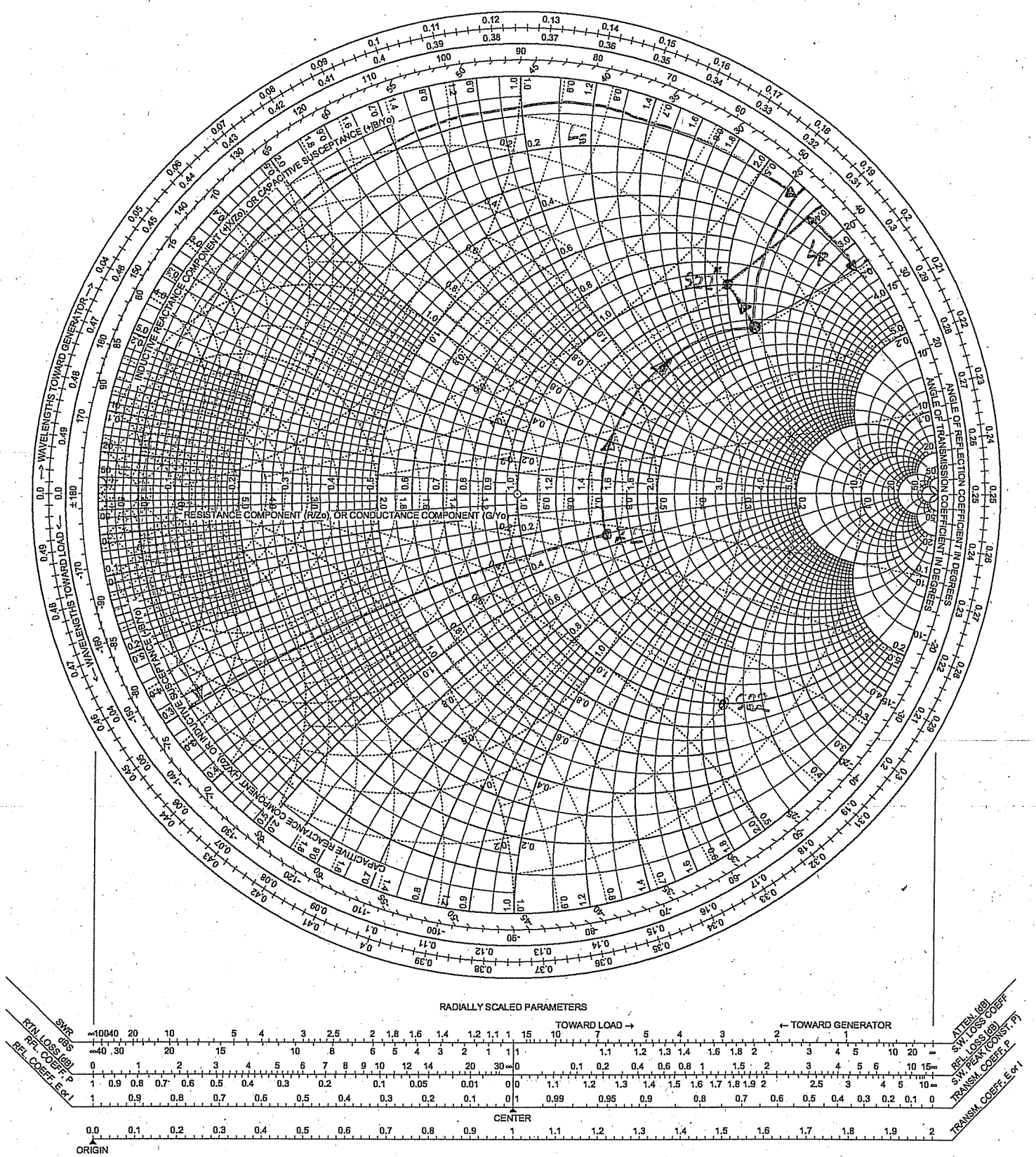
HU5

Tme 24/24

2a Bufgabe 6d)

Variante 4:

The Complete Smith Chart (ZY)



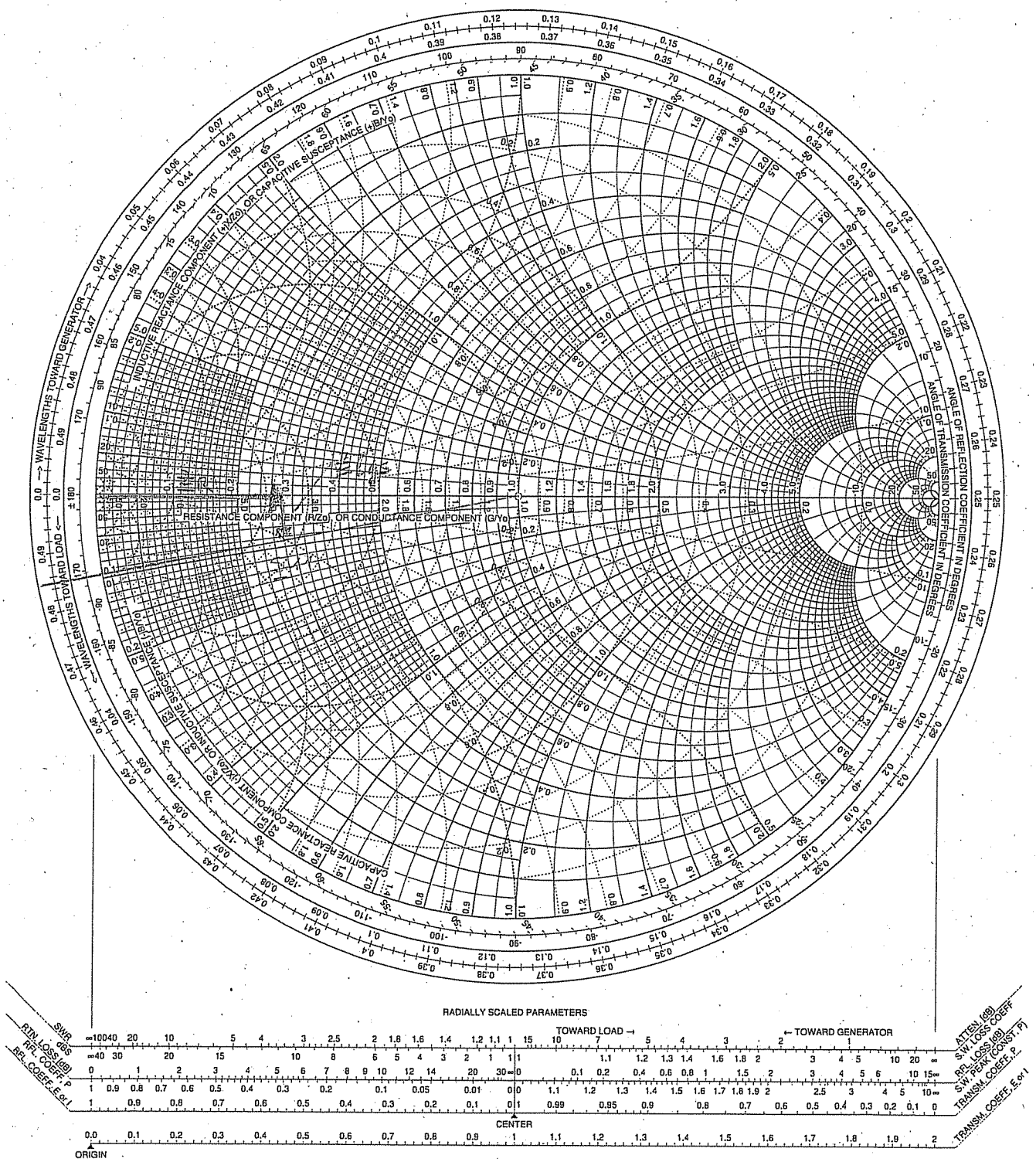
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2005

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



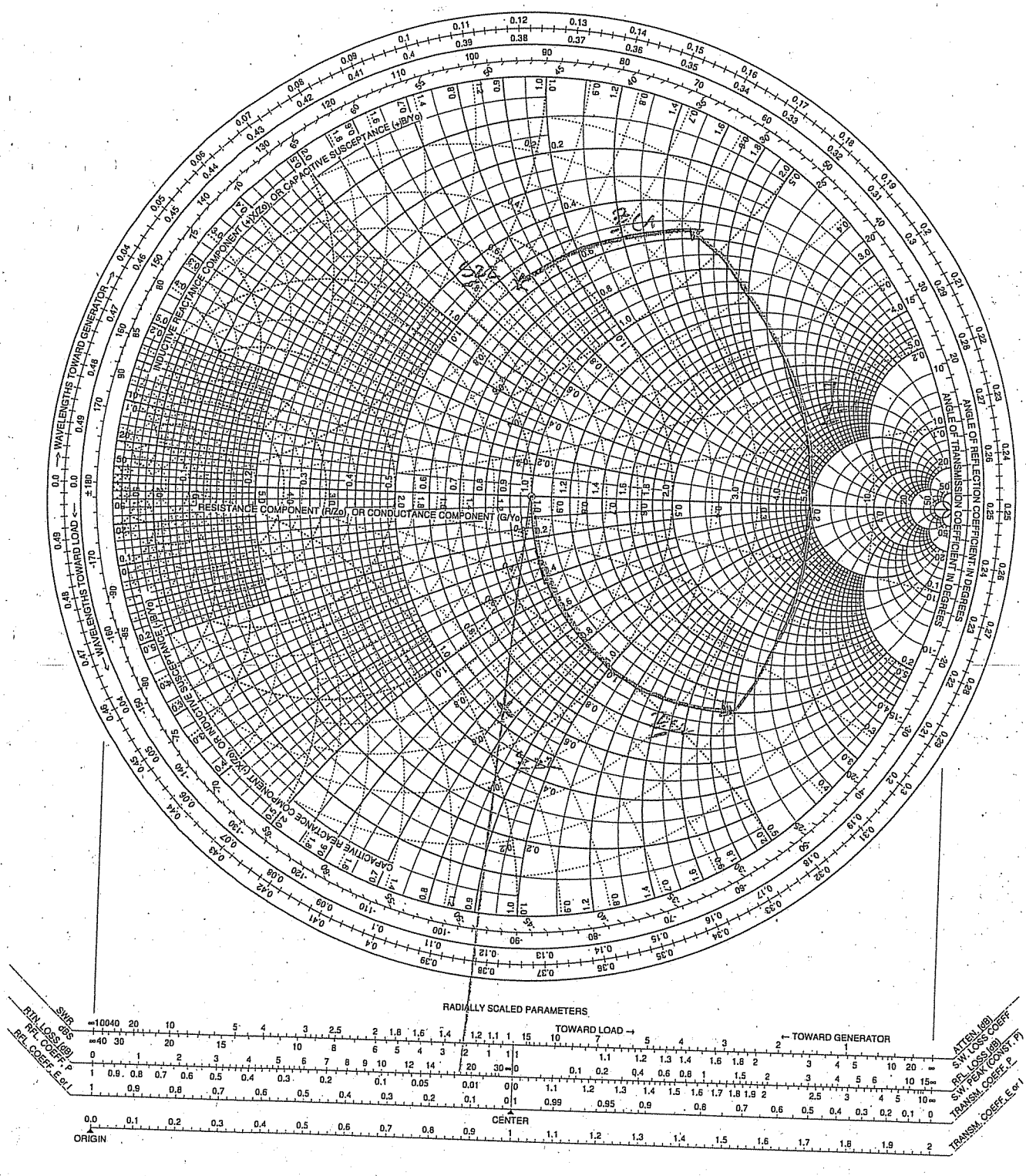
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2005

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt e)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



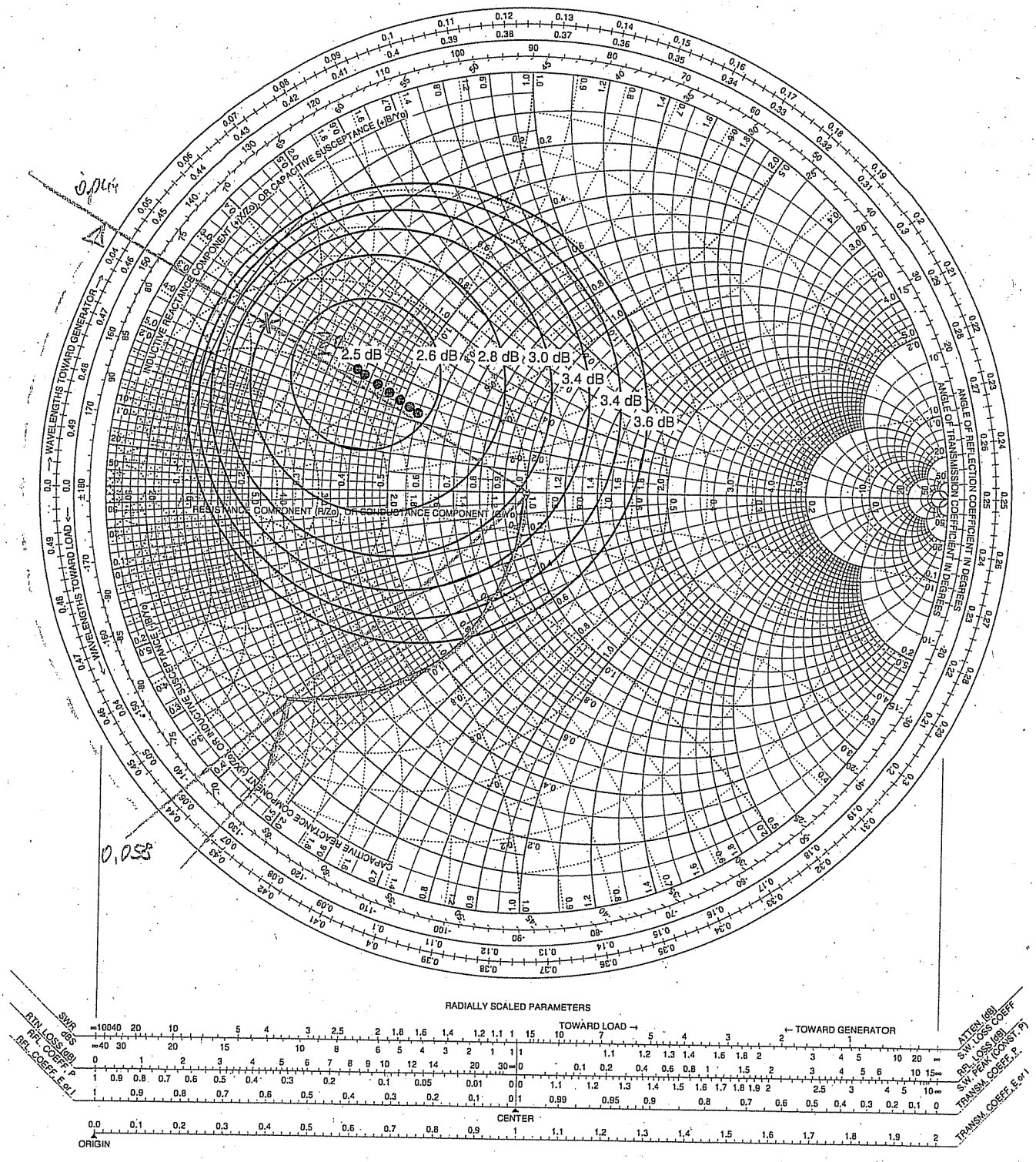
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2005

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt f)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



Frühjahr 2005

Aufgabe 1:

(a) $\vec{B}(\vec{r})$; $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ für $x < a(t)$, $y < a(t)$

Induktion eines unendlich langen Leiters: (Ebene $z = 0$)

$$\vec{B}_{1,2}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi\, d(\vec{r})} \cdot \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad d(\vec{r}) \hat{=} \text{Abstand zum Leiter}$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \frac{1}{a(t) - x}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \frac{1}{a(t) - y}$$

somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}) + \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \vec{e}_z \cdot \left(\frac{1}{a(t) - x} + \frac{1}{a(t) - y} \right)$$

(b) Bestimme $\Phi(t)$; Fluss eines unendlichen Leiters $\times 2$ (wegen Symmetrie)

$$\Phi(t) = \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z \, dx \cdot dy$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_{-b}^{b} \int_{-b}^{b} \frac{1}{a(t) - x} \, dx \, dy$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \cdot 2b \cdot \int_{-b}^{b} \frac{1}{a(t) - x} \, dx$$

$$= \frac{2\mu_0 b \cdot I}{\pi} \cdot \left[-\ln(a(t) - x) \right]_{-b}^{b}$$

$$= \frac{2\mu_0 b \cdot I}{\pi} \cdot \left(-\ln(a(t)-b) + \ln(a(t)+b) \right)$$

$$= \frac{2\mu_0 b \cdot I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{a(t)+b}{a(t)-b} \right)$$

(c) $u(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$ mit $\frac{da(t)}{dt} = v$

$$\Rightarrow \quad u(t) = -\frac{2\mu_0 \cdot b \cdot I}{\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(\ln(a(t)+b) - \ln(a(t)-b) \right)$$

$$= -2\mu_0 b \cdot \frac{I}{\pi} \left(v \cdot \frac{1}{a(t)+b} - v \cdot \frac{1}{a(t)-b} \right)$$

$$= 2\mu_0 I v \, \frac{b}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{a(t)-b} - \frac{1}{a(t)+b} \right)$$

(d) $u(t) \equiv 0$ wenn $\frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow \phi = \text{const}$

aus (b) $\phi = 2\mu_0 \frac{b}{\pi} \cdot I(t) \cdot \ln\left(\frac{b + a(t)}{-b + a(t)} \right) = \text{const} \triangleq K$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{K \cdot \pi}{2\mu_0 b} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{b+a(t)}{-b+a(t)} \right)}$$

$$I(t) = I_0 \cdot \ln\left(\frac{a(t)+b}{a(t)-b} \right)^{-1}$$

mit I_0 beliebiger Strom

Aufgabe 2:

a) $\vec{E}(\rho,\varphi) = E(\rho)\cdot \exp(-jk_0\varphi)\cdot \vec{e}_\rho = E_\rho \cdot \vec{e}_\rho$

Helmholtzgleichung: $\boxed{(\Delta + k_0^2)\cdot \vec{E}(\rho,\varphi) = \vec{0}}$ (*)

Da $\vec{E}$ nur Fkt. von ρ und φ und $\vec{E} \parallel \vec{e}_\rho$ ist:

$$\Delta \vec{E}(\rho,\varphi) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cdot E_\rho)\right) + \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial \varphi^2}\right\}\cdot \vec{e}_\rho + \vec{0}$$

↑ Δ in Zylinderkoordinaten nach Formelsammlung

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cdot E_\rho)\right) - k_0^2\cdot E_\rho\right\}\cdot \vec{e}_\rho$$

(*): $\vec{0} = (\Delta + k_0^2)\vec{E}(\rho,\varphi) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial \rho}\underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cdot E_\rho)\right)}$ (**)

$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E}(\rho,\varphi) = 0} \Rightarrow \longrightarrow = 0$ (***)

Formelsammlung

(sonst wäre $E_\rho \sim \rho$ auch Lsg. für (**))

(**) & (***) $\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cdot E_\rho) \Rightarrow E_\rho \sim \frac{1}{\rho}$ also $\boxed{E(\rho)\sim \frac{1}{\rho}}$

P_1, P_2 Punkte auf der Oberfläche vom Innenleiter, bzw. Innenseite des Außenleiters

$$U_0 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\rho,\varphi)\, d\vec{r} = \int_a^b E(\rho)\, d\rho = \int_a^b \frac{A}{\rho}\, d\rho = A\cdot \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow A = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow E(\rho) = \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cdot\frac{1}{\rho}$$

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \qquad \left(= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H}\right)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}}(\varrho, z) = -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}}(\varrho, z)$$

$$\vec{\nabla} \times \underline{\vec{E}}(\varrho, z) = \varnothing + \vec{e}_\varphi \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(E(\varrho) \cdot \exp(-jk_0 z) \right) - \varnothing \right\} + \varnothing$$

$$= \vec{e}_\varphi \cdot \left\{ -jk_0 E(\varrho) \exp(-jk_0 z) \right\} = -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}}(\varrho, z)$$

$$\underline{\vec{H}}(\varrho, z) = \frac{k_0}{\omega\mu_0} E(\varrho) \exp(-jk_0 z) \cdot \vec{e}_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \exp(-j \cdot \vec{e}_\varphi$$

(c) $$\underline{U}_+(z) = \int_{P_1'}^{P_2'} \underline{\vec{E}}(\varrho, z)\, d\vec{r} = \int_{P_1'}^{P_2'} \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \exp(-jk_0 z) \cdot \frac{1}{\varrho}\, d\varrho$$

$$= \frac{U_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \exp(-jk_0 z) \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\varrho}\, d\varrho}_{= \ln \frac{b}{a}}$$

$$\underline{U}_+(z) = U_0 \cdot \exp(-jk_0 z)$$

$$\underline{i}_+(z) = \oint_{C_0} \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underline{\vec{H}}(\varrho = a, z) \cdot a \cdot d\varphi$$

↳ C_0 z.B. Kurve entlang der Oberfläche des Innenleiters ($\Rightarrow \varrho = a$, $\underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \varnothing + (\vec{H} \cdot \vec{e}_\varphi)\, a \cdot d\varphi$)

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}} U_0 \cdot \exp(-jk_0 z)$$

$$Z_L = \frac{\underline{U}_+(z)}{\underline{i}_+(z)} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

(d) $z = 0$: $\vec{E}, \vec{H}$ stetig

$z = h$: $\vec{E} \equiv 0$, $\vec{e}_z \times (0 - \vec{H}_2) = \vec{J}_F$

$z = 0$: $\underline{u}(z), i(z)$ stetig

$z = h$: $\underline{u}(h) \equiv 0$

(e) $z \leq 0$: $\underline{u}(z) = u_0 \exp(-jk_0 z) + u_{0-} \exp(jk_0 z)$

$$\underline{i}(z) = \frac{u_0}{Z_L} \exp(-jk_0 z) - \frac{u_{0-}}{Z_L} \exp(jk_0 z)$$

$0 < z < h$: $\underline{u}_2(z) = u_{2+} \exp(-jkz) + u_{2-} \exp(jkz)$

$$\underline{i}_2(z) = \frac{u_{2+}}{Z_{L2}} \exp(-jkz) - \frac{u_{2-}}{Z_{L2}} \exp(jkz)$$

Grenzbed. von (d): $\underline{u}_2(h) \equiv 0$ (*)

$\underline{u}(0) = \underline{u}_2(0)$ (**)

$\underline{i}(0) = \underline{i}_2(0)$ (***)

(*) $\Rightarrow$ $u_{2-} = -u_{2+} \exp(-2jkh)$

$\Rightarrow$ $\underline{u}_2(z) = u_{2+} \exp(-jkh) \cdot \left(\exp(-jk[z-h]) - \exp(jk[z-h]) \right)$

(**) $u_0 + u_{0-} = u_{2+} \underbrace{(1 - \exp(-2jkh))}_{=:\alpha}$

(***) $\Rightarrow \frac{u_0}{Z_L} - \frac{u_{0-}}{Z_L} = \frac{u_{2+}}{Z_{L2}} (1 + \exp(-2jkh)) \Rightarrow u_0 - u_{0-} =$

$$u_{2+} \underbrace{\frac{Z_L}{Z_{L2}} (1 + \exp(-2jkh))}_{=:\beta}$$

$$(**) \;\&\; (***) \Rightarrow \frac{U_0 + U_{0-}}{\alpha} = \frac{U_0 - U_{0-}}{\beta} \Rightarrow U_{0-} = U_0 \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

$$\sim \Rightarrow 2U_0 = U_{2+}(\alpha + \beta) \Rightarrow U_{2+} = U_0 \cdot \frac{2}{\alpha + \beta}$$

$$U_{2-} = -U_0 \cdot \frac{2\exp(-2jkh)}{\alpha + \beta}$$

Reflexions-koeff. $\Gamma = \frac{U_{0-}}{U_0} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{Z_{L2}\, j\sin(kh) - Z_L \cos(kh)}{Z_{L2}\, j\sin(kh) + Z_L \cos(kh)}$

$$\left(\alpha = \exp(-jkh) \cdot \{2j \sin(kh)\};\ \beta = \exp(-jkh)\{2\cos(kh)\} \cdot \frac{Z_L}{Z_{L2}} \right)$$

$$\underline{U}(z) = U_0 \cdot \exp(-jk_0 z) + \Gamma \cdot U_0 \cdot \exp(jk_0 z)$$

$$\underline{i}(z) = \frac{U_0}{Z_L} \exp(-jk_0 z) - \frac{\Gamma U_0}{Z_L} \exp(jk_0 z)$$

$$\underline{U}_2(z) = \frac{2U_0}{[1 - \exp(-2jkh)] + \left[\frac{Z_L}{Z_{L2}}(1 + \exp(-2jkh)\right]} \cdot \{\exp(-jkz) - \exp(jkz - 2jkh)\}$$

$$\underline{i}_2(z) = \frac{2U_0}{Z_{L2}[1 - \exp(-2jkh)] + Z_L[1 + \exp(-2jkh)]} \cdot \{\exp(-jkz) + \exp(jkz - 2jkh)\}$$

US

Lösung A3

a) $\Delta \underline{F}(\rho,z) + k^2 \underline{F}(\rho,z) = 0$; $\Delta \underline{G}(\rho,z) + k^2 \underline{G}(\rho,z) = 0$; $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ (1)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \underline{f}(\rho) e^{-j\beta z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\underline{f}(\rho) e^{-j\beta z}\right) + k^2 \underline{f}(\rho) e^{-j\beta z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{d\underline{f}(\rho)}{\partial\rho}\right) + p^2 \underline{f}(\rho) = 0 \quad ; \quad p^2 = k^2 - \beta^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial \underline{g}(\rho)}{\partial\rho}\right) + p^2 \underline{g}(\rho) = 0 \quad ; \quad \text{analog} \quad (4)$$

(3), (4): Bessel'sche DGL nullter Ordnung ($\rho \neq 0$ nach Voraus.)

Lösungen:
$$\underline{f}(\rho) = A J_0(p\rho) + B N_0(p\rho) \quad (5)$$
$$\underline{g}(\rho) = C J_0(p\rho) + D N_0(p\rho) \quad (6)$$

b) Die Felder und damit $\underline{f}$, $\underline{g}$ dürfen für $\rho \to 0$ nicht singulär werden

$$\Rightarrow \boxed{B = 0, \quad D = 0} \quad (7)$$

Grenzbedingung auf G_1 (elektr. Wand; $\varphi = 0, \varphi = \pi$):

$\underline{E}_{tang} = 0 \Rightarrow$ α) $\underline{E}_z = 0$ ⇓ $\underline{g}(\rho) = 0$ ($C = 0$) ⇓ $\frac{dg(\rho)}{d\rho} = 0 \Rightarrow \underline{E}_\rho = 0$ (8)

β) $\underline{E}_\rho = 0$ ↑ erfüllt!

überall, also auch auf G_1

Somit: $\underline{f}(\rho) = A J_0(p,\rho)$; $\underline{g}(\rho) = 0$ (9)

c) Grenzbedingung auf G_2 (magn. Wand; $\rho = a$):

$\underline{H}_{tang} = 0 \Rightarrow$ α) $\underline{H}_z = 0$ β) $\underline{H}_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d\underline{f}}{d\rho} = 0$

$\Downarrow$ erfüllt wegen (8)

(10) $\underline{f}(\rho = a) = 0$

$\Downarrow$

(11) $J_0(p\,a) = 0$

Die Gleichung (11) legt die möglichen Werte von p fest; da die Nullstellen der Besselfunktion reell, abzählbar sind, gilt das auch für die p

$$p = p_1, p_2, p_3, \dots, p_e, \dots \qquad p_e \text{ reell} > 0 \qquad (12)$$

Aus $k^2 - \beta^2 = p^2$ folgt $k^2 - \beta_e^2 = p_e^2$

also $\beta_e = \sqrt{k^2 - p_e^2}$

$$= \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - p_e^2} \quad ; \quad e = 1, 2, 3, \dots \qquad (13)$$

d) Es gibt nur Wellenausbreitung in +z-Richtung für $Re\{\beta_e\} > 0$ (14)

aus (13): $Re\{\beta_e\} > 0$, falls $\omega^2 \varepsilon \mu_0 > p_e^2$

$\Rightarrow$ Grenzfrequenz für Wellentyp "e": $\omega_e = \frac{p_e}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$ (15)

$$v_{Gr,e} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_e} \; ; \; (13) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \sqrt{\beta_e^2 + p_e^2} = \omega \qquad (16)$$

$$v_{Gr,e} \overset{(16)}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} \frac{\beta_e}{\sqrt{\beta_e^2 + p_e^2}} \overset{(16)}{=} \frac{\beta_e}{\varepsilon \mu_0 \omega} = \frac{1}{\varepsilon \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu_0 - \left(\frac{p_e}{\omega}\right)^2}$$

$$v_{Gr,e} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2} \qquad (17)$$

e) $$\underline{\vec{E}}_e = + \frac{df}{d\rho} e^{-j\beta_e z} \vec{e}_\varphi$$

$$= \vec{e}_\varphi A_e \rho_e \nabla_0'(\rho_e \rho) e^{-j\beta_e z} \quad ; \quad A_e = A_e^* \text{ o.B.d.A.} \qquad (18)$$

$$\underline{\vec{H}}_e = \vec{e}_z \frac{\rho_e^2 A_e}{j\omega\mu_0} \nabla_0(\rho_e \rho) e^{-j\beta_e z} - \frac{\beta_e \rho_e A_e}{\omega\mu_0} \nabla_0'(\rho_e \rho) e^{-j\beta_e z} \vec{e}_\rho \qquad (19)$$

$$\overline{\vec{S}_e(t)} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}_e \times \underline{\vec{H}}_e^* \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \underbrace{\frac{A_e^2 \rho_e^3}{\omega\mu_0} j \nabla_0(\rho_e \rho) \nabla_0'(\rho_e \rho) \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z}_{\text{rein Imaginär}} - \frac{A_e^2 \rho_e^2 \beta_e}{\omega\mu_0} \left[\nabla_0'(\rho_e \rho)\right]^2 \underbrace{\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_\rho}_{-\vec{e}_z} \right\}$$

$$\overline{\vec{S}(t)} = \frac{A_e^2 \rho_e^2 \beta_e}{2\omega\mu_0} \left[\nabla_0'(\rho_e \rho)\right]^2 \vec{e}_z \qquad (20)$$

$z = 0 \Rightarrow e^{-j\beta z} = 1$

$t = \frac{T}{8} \Rightarrow \omega t = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow e^{j\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) \qquad (21)$

$$\vec{E}_e(t)\Big|_{\substack{z=0 \\ t=\frac{T}{8}}} =: \vec{E}_e\left(0, \frac{T}{8}\right) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{\vec{E}}_e e^{j\omega t} \right\}_{\substack{z=0 \\ t=\frac{T}{8}}}$$

$$= \vec{e}_\varphi A_e \rho_e \nabla_0'(\rho_e \rho) \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (22)$$

$$\vec{H}_e(t)\Big|_{\substack{z=0\\ t=\frac{T}{8}}} =: \vec{H}_e\left(0,\frac{T}{8}\right) = \mathrm{Re}\left\{\underline{H}_e\, e^{j\omega t}\right\}_{\substack{z=0\\ t=\frac{T}{8}}}$$

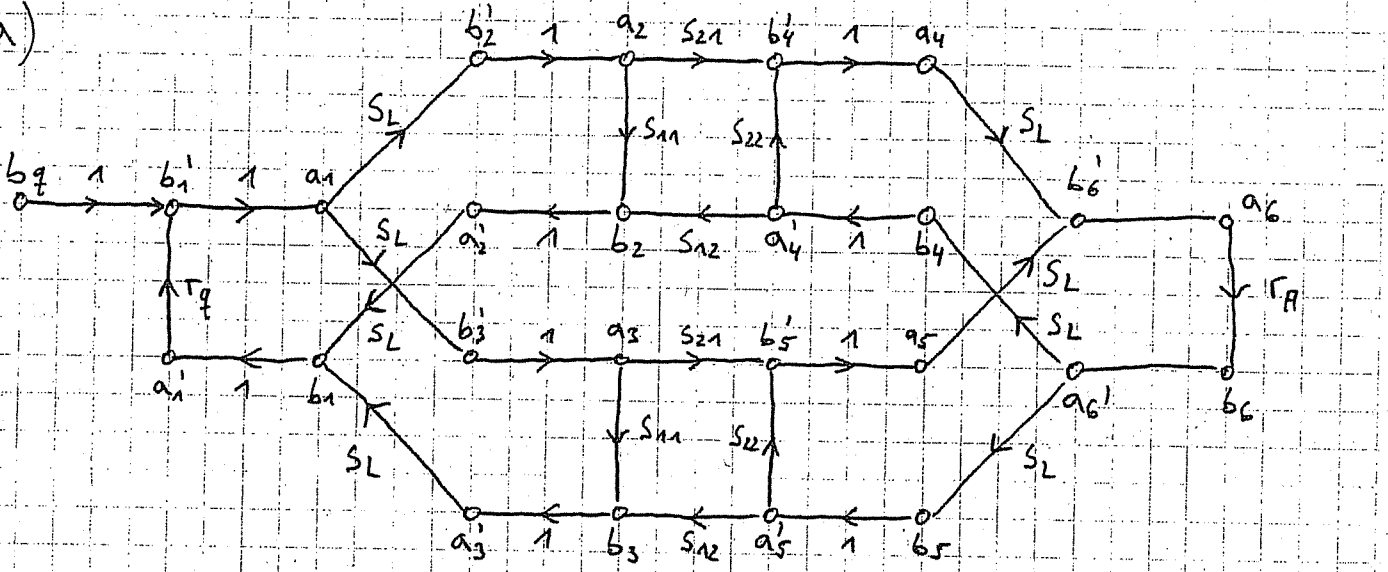
$$= \frac{\beta_e^2 A_e}{\omega\mu_0\sqrt{2}} J_0(\rho_e \rho)\,\vec{e}_z - \frac{\beta_e \rho_e A_e}{\omega\mu_0\sqrt{2}} J_0(\rho_e \rho)$$

$$\vec{S}_e\Big|_{\substack{z=0\\ t=\frac{T}{8}}} = \vec{E}_e\left(0,\frac{T}{8}\right) \times \vec{H}_e\left(0,\frac{T}{8}\right)$$

$$= \frac{\rho_e^3 A_e^2}{2\omega\mu_0} J_0'(\rho_e\rho) J_0(\rho_e\rho) + \frac{A_e^2 \rho_e^2 \beta_e}{2\omega\mu_0}\left[J_0'(\rho_e\rho)\right]^2 \vec{e}_z \quad (23$$

FOS Lösung A4

a)



mit $\underline{S}_L = \frac{-j}{\sqrt{2}}$ und $\underline{a}_i$; $\underline{b}_i$ = hin- und rücklaufende Wellen in BE; bzgl. des quellseitigen Bauelements sowie $\underline{a}_i$; $\underline{b}_i$ = hin- und rücklaufende Wellen in BE; bzgl. des lastseitigen Bauelements.

b)

$$\underline{a}_6 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{Z_0}}\underline{U}_6 + \frac{1}{2}\sqrt{Z_0}\,\underline{I}_6$$

$$\underline{b}_6 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{Z_0}}\underline{U}_6 - \frac{1}{2}\sqrt{Z_0}\,\underline{I}_6$$

$$\underline{\Gamma}_A = \frac{\underline{b}_6}{\underline{a}_6} = \frac{\underline{U}_6 - Z_0\,\underline{I}_6}{\underline{U}_6 + Z_0\,\underline{I}_6} = \frac{\underline{Z}_A - Z_0}{\underline{Z}_A + Z_0}$$

mit $\underline{U}_6 = Z_A\,\underline{I}_6$

aus Signalflußdiagramm ablesen:

$$\underline{b}_4 = \underline{b}_5 = \underline{S}_L^2\,(\underline{a}_4 + \underline{a}_5)\,\underline{\Gamma}_A$$

aus Symmetriegründen ist $\underline{a}_4 = \underline{a}_5$ und damit

$$\underline{b}_4 = \underline{b}_5 = -\frac{1}{2}\,2\,\underline{a}_4\,\underline{\Gamma}_A = -\underline{a}_4\,\underline{\Gamma}_A = -\underline{a}_5\,\underline{\Gamma}_A$$

aus SFD weiter ablesen:

$$\underline{a}_4 = \underline{S}_{21}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{22}\,\underline{b}_4$$

$$= \underline{S}_{21}\,\underline{a}_2 - \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A\,\underline{a}_4 = \frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A}\,\underline{a}_2$$

und weiter:

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{11}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{12}\,\underline{b}_4$$

$$= \underline{S}_{11}\,\underline{a}_2 - \underline{S}_{12}\,\underline{r}_A\,\underline{a}_4$$

$$= \left(\underline{S}_{11} - \frac{\underline{S}_{12}\,\underline{r}_A\,\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A}\right)\underline{a}_2$$

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = \underline{S}_L\,\underline{a}_1 = -\frac{j}{\sqrt{2}}\,\underline{a}_1$$

aus Symmetriegründen ist $\underline{b}_2 = \underline{b}_3$ und damit

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_L\,(\underline{b}_2 + \underline{b}_3)$$

$$= -j\sqrt{2}\,\underline{b}_2 = -j\sqrt{2}\left(\underline{S}_{11} - \frac{\underline{S}_{12}\,\underline{r}_A\,\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A}\right)\underline{a}_2$$

$$= -\left(\underline{S}_{11} - \frac{\underline{S}_{12}\,\underline{r}_A\,\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A}\right)\underline{a}_1$$

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{S}_{12}\,\underline{r}_A\,\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22}\,\underline{r}_A} - \underline{S}_{11}$$

c) Leistungsanpassung im BE 1 mit $\underline{S}_{12} = 0$:

$$\underline{r}_q = \underline{r}_1^* = -\underline{S}_{11}^*$$

Leistung BE 1 (verfügbare Leistung der Quelle, da Leistungsanpassung):

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(|\underline{a}_1|^2 - |\underline{b}_1|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}|\underline{a}_1|^2\,(1 - |\underline{r}_1|^2) = \frac{1}{2}|\underline{a}_1|^2\,(1 - |\underline{r}_q|^2)$$

$$\underline{a}_1 = \underline{b}_q + \underline{r}_q \underline{b}_1$$

$$= \underline{b}_q + |\underline{r}_q|^2 \underline{a}_1 = \frac{\underline{b}_q}{1 - |\underline{r}_q|^2}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{|\underline{b}_q|^2}{1 - |\underline{r}_q|^2}$$

analog Leistung in BE6: $P_6 = \frac{1}{2} |\underline{a}_6|^2 (1 - |\underline{r}_A|$

Verstärkung:

$$\underline{a}_6 = 2 \underline{S}_L \underline{a}_4 = -j\sqrt{2}\, \underline{a}_4$$

$$= -j\sqrt{2} \frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \underline{a}_2 = -\frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \underline{a}_1$$

$$G = \frac{P_6}{P_1} = \frac{\frac{1}{2} |\underline{a}_6|^2 (1 - |\underline{r}_A|^2)}{\frac{1}{2} |\underline{a}_1|^2 (1 - |\underline{r}_q|^2)}$$

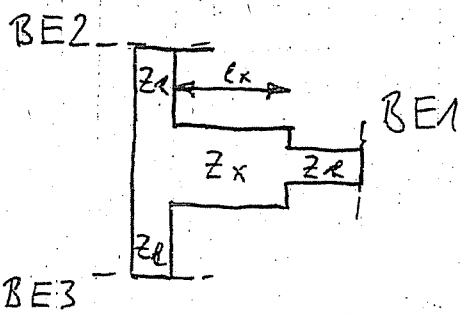
$$= \frac{\frac{1}{2} \left| -\frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \underline{a}_1 \right|^2 (1 - |\underline{r}_A|^2)}{\frac{1}{2} |\underline{a}_1|^2 (1 - |\underline{r}_q|^2)}$$

$$= \left| \frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \right|^2 \frac{1 - |\underline{r}_A|^2}{1 - |\underline{r}_q|^2}$$

$$P_6 = \left| \frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \right|^2 \frac{1 - |\underline{r}_A|^2}{1 - |\underline{r}_q|^2} \frac{1}{2} \frac{|\underline{b}_q|^2}{1 - |\underline{r}_q|^2}$$

$$= \frac{1}{2} |\underline{b}_q|^2 \left| \frac{\underline{S}_{21}}{1 + \underline{S}_{22} \underline{r}_A} \right|^2 \frac{1 - |\underline{r}_A|^2}{(1 - |\underline{r}_q|^2)^2}$$

d)



aus Sicht von Tor 1 sind die Tore 2 und 3 eine Parallelschaltung.

$\frac{\lambda}{4}$ Transformation: $Z_x = \sqrt{\frac{Z_L}{2}}\, Z_L = \frac{Z_L}{\sqrt{2}}$

$$\ell_x = \frac{\lambda}{4}$$

e) Streumatrix eines allgemeinen 3-Tors:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & \underline{S}_{33} \end{bmatrix}$$

Reflexionsfreiheit: $\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{21} & 0 & \underline{S}_{23} \\ \underline{S}_{31} & \underline{S}_{32} & 0 \end{bmatrix}$

Entkopplung der Tore 2 und 3:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ \underline{S}_{21} & 0 & 0 \\ \underline{S}_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verlustlosigkeit: $\underline{S}^{*T}\,\underline{S} \stackrel{!}{=} E$

$$\underline{S}^{*T}\,\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{S}_{12}^* & \underline{S}_{13}^* \\ \underline{S}_{21}^* & 0 & 0 \\ \underline{S}_{31}^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \underline{S}_{12} & \underline{S}_{13} \\ \underline{S}_{21} & 0 & 0 \\ \underline{S}_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} + \underline{S}_{31}^* \underline{S}_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} & \underline{S}_{31}^* \underline{S}_{12} \\ 0 & \underline{S}_{31}^* \underline{S}_{12} & \underline{S}_{31}^* \underline{S}_{13} \end{bmatrix}$$

$$\neq E$$

da nicht gleichzeitig $\underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} + \underline{S}_{31}^* \underline{S}_{13} = 1$, $\underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} = 1$ und $\underline{S}_{21}^* \underline{S}_{13} = 1$ gelten kann.

Σ05, A6 Δώση ΕΜΓ ΕΕ

α) $\underline{S}_{24} = \underline{S}'_{24} e^{j\beta(l_2+l_4)}$

$\underline{S}_{22} = \underline{S}'_{22} e^{j\beta 2l_2}$

β) $\underline{S}_{11}=0$, άρα $\underline{S}'_{11}=0 \Rightarrow C_{pd}=0$ / μοναδικά

γ) $\underline{S}_{44} = 0.5\epsilon^{-j} + 180°$

$\underline{S}'_{44} = \underline{S}_{44}$

δ) $\underline{b}_L = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{\underline{z}_L}{\underline{T}_L} = \frac{\underline{z}_A}{\underline{T}_A} \Leftrightarrow \underline{z}_A = \frac{\underline{z}_L^2}{\underline{z}_{T_L}} = \frac{100\,\Omega^2}{50\,\Omega} = 200$

ε) $\underline{z}_{L_A} = -j0,875$, $\underline{z}_{C_A} = -j0,8$

ζ) $F = 2,8$ dB Βελτιώνεται ή όχι; Υπολογίστε πώς $\underline{z}_p = 0.5\epsilon - 0.16$

$= 0.2$

Το εν Praxis: Υπολογίστε κύκλο εξομοίωσης κατά γραφική

τεχνική Smith.

Lösung zu Aufgabe 5 EMF EE FDS

a) Frag zum ersten Unterpunkt:

U und I sind mit einander assimmetrisch

$U = \int E \, dl$

b) Frag zum zweiten Unterpunkt:

Ohmsches - TEM - Gebiet, d.h. gewisse um Leitungstyp in jeder Beziehung ausbreitungsfähig

c) Frag zum dritten Unterpunkt:

Symmetrie: $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$

Reziprozität: $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$

d) Lösung zum zweiten Unterpunkt:

$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}}$

$$\underline{\tilde{Y}} = \frac{j \underline{\tilde{U}}_2 \underline{Y}_L \sin(\beta \ell) + \underline{\tilde{I}}_2 \cos(\beta \ell_2)}{\underline{\tilde{U}}_2 \cos(\beta \ell_2) + j \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}_L} \sin(\beta \ell_2) \underline{\tilde{I}}_2}$$

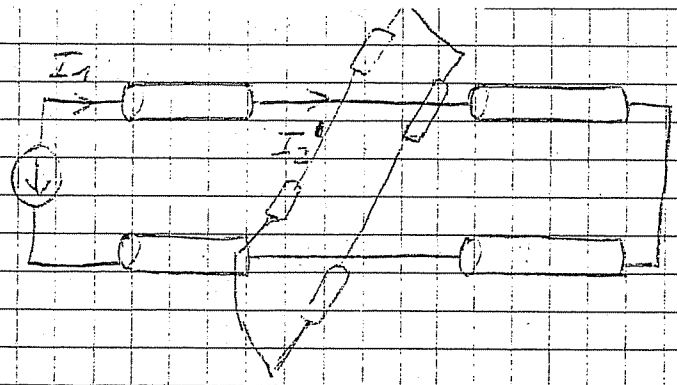
$$= -j \underline{Y}_L \cot(\beta \ell_2)$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{Y}} = -j 2 \underline{Y}_L \cot(\beta \ell_2)$$

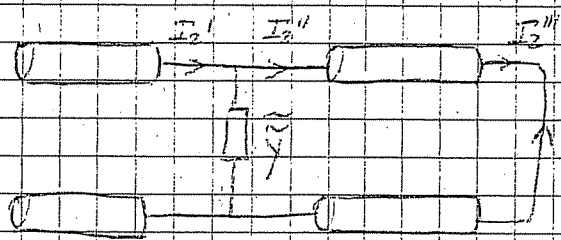
$$\underline{Y}' = -j \underline{Y}_L \cot(\beta \ell_1)$$

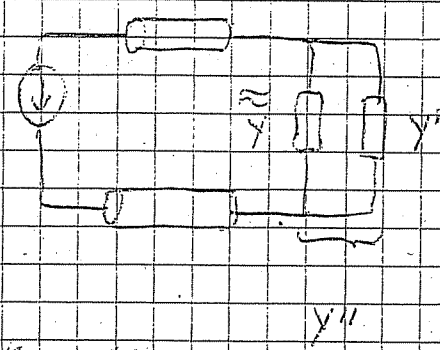
$$\underline{Y}'' = \underline{\tilde{Y}} + \underline{Y}' = -j \underline{Y}_L \left[2 \cot(\beta \ell_2) + \cot(\beta \ell_1) \right]$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{j \underline{Y}_L \sin(\beta \ell_1) + \underline{Y}'' \cos(\beta \ell_1)}{\cos(\beta \ell_1) + j \frac{\underline{Y}''}{\underline{Y}_L} \sin(\beta \ell_1)}$$



$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}\Big|_{U_2=0}$$





Berechnen die zweiten zum Kurzschluß gehörigen Leitwerte:

a) Zweig zum Index Leitwert:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 \qquad \Rightarrow \underline{Y}' = 0$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \qquad \underline{Y}'' = -j\,2\,Y_L \cot(\beta\ell_2)$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \underline{Y}_{11} = \frac{Y_L^2}{\underline{Y}''} = j\,0{,}5\,Y_L \tan(\beta\ell_2)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta\ell) & -j\,Z_L \sin(\beta\ell) \\ \frac{-j}{Z_L}\sin(\beta\ell) & \cos(\beta\ell) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_2' = -j\frac{U_1}{Z_L}\sin(\beta\ell_2) + \underline{I}_1\cos(\beta\ell_2) = j\frac{U_1}{Z_L}$$

$$\underline{I}_2'' = \underline{I}_2' \frac{\underline{Y}''}{\underline{Y}' + \underline{\tilde{Y}}} \qquad \text{(2)}$$

Dann Knoten zum Kurzschluß

Knoten

$$\underline{I}_2'' = -j\frac{\underline{U}_1}{Z_L}\sin(\beta\ell_1) + \underline{I}_2''\cos(\beta\ell_1) = j\frac{\underline{U}_1'}{Z_L}$$

$$\underline{U}_1' = \cos(\beta\ell_1)\,\underline{U}_1 - j\frac{\sin(\beta\ell_1)}{Y_L}\underline{I}_1 = \cos(\beta\ell_1)\,\underline{U}_1 - j\frac{\sin(\beta\ell_1)}{Y_L}\underline{U}_1\underline{Y}_{11} =$$

$$= j\frac{1}{Z_L}\underline{U}_1\underline{Y}_{11} = -0{,}5\tan(\beta\ell_2)\,\underline{U}_1$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_2'' = j0{,}5Y_L\tan\beta\ell_2\,\underline{U}_1$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} = j0{,}5Y_L\tan\beta\ell_2$$

Für die Leitung zum Messort Kurzschluss:

$\underline{Y}_{21} = 0$ bzw. Kurzschluss in der Mitte

$\Leftrightarrow \tan(\beta\ell_2) = 0 \Leftrightarrow \beta\ell_2 = m\pi,\ m = 0, 1, 2, \ldots \Leftrightarrow$

$$\ell_2 = m\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc}{2\ell_2} = \frac{mc_0}{2\ell_2\sqrt{\varepsilon_{rf}}}$$

Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

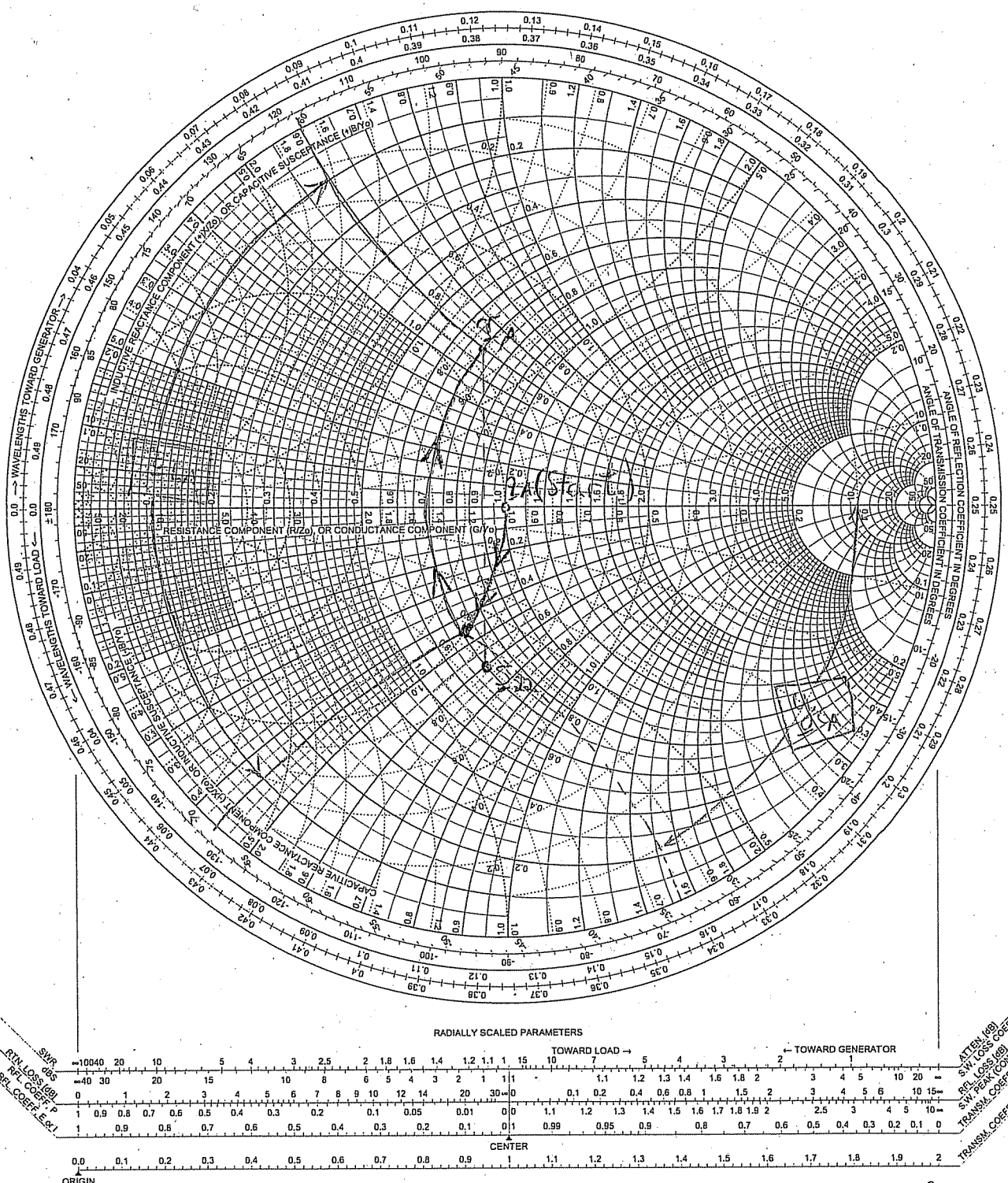
Herbst 2004

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 1 zu Aufgabe 6, Unterpunkt b)

xy-Smith-Chart

Name: _____ Matr.Nr.: _____



Leistungsanpassung: $\underline{S}_{22} = \underline{\Gamma}_A^* = 0{,}37 \cdot e^{-97°}$

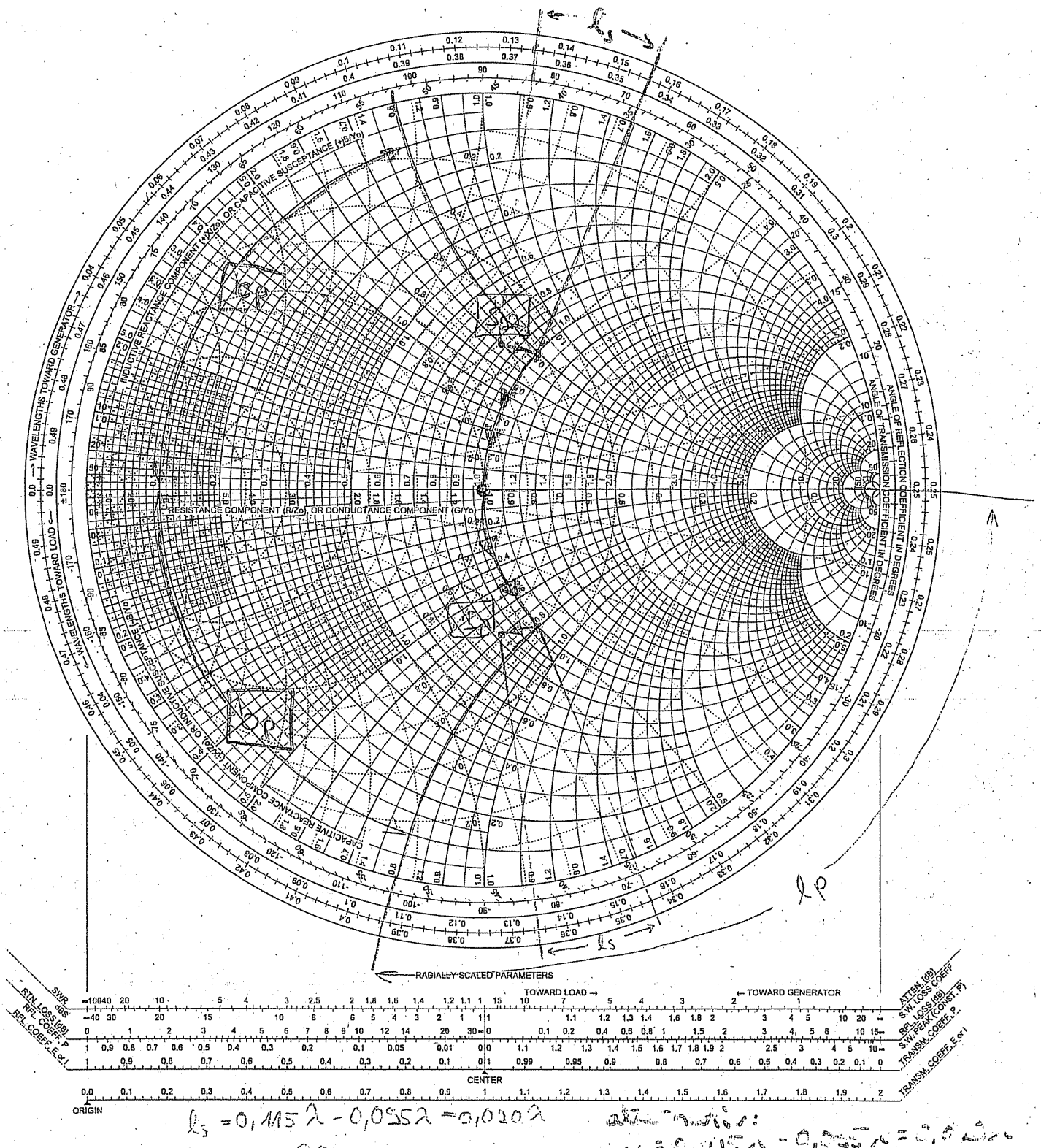
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.–Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2004

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6, Unterpunkt c)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



$l_s = 0{,}115\lambda - 0{,}055\lambda = 0{,}060\lambda$

$b_p = -0{,}79$

$l_p = 0{,}143\lambda$

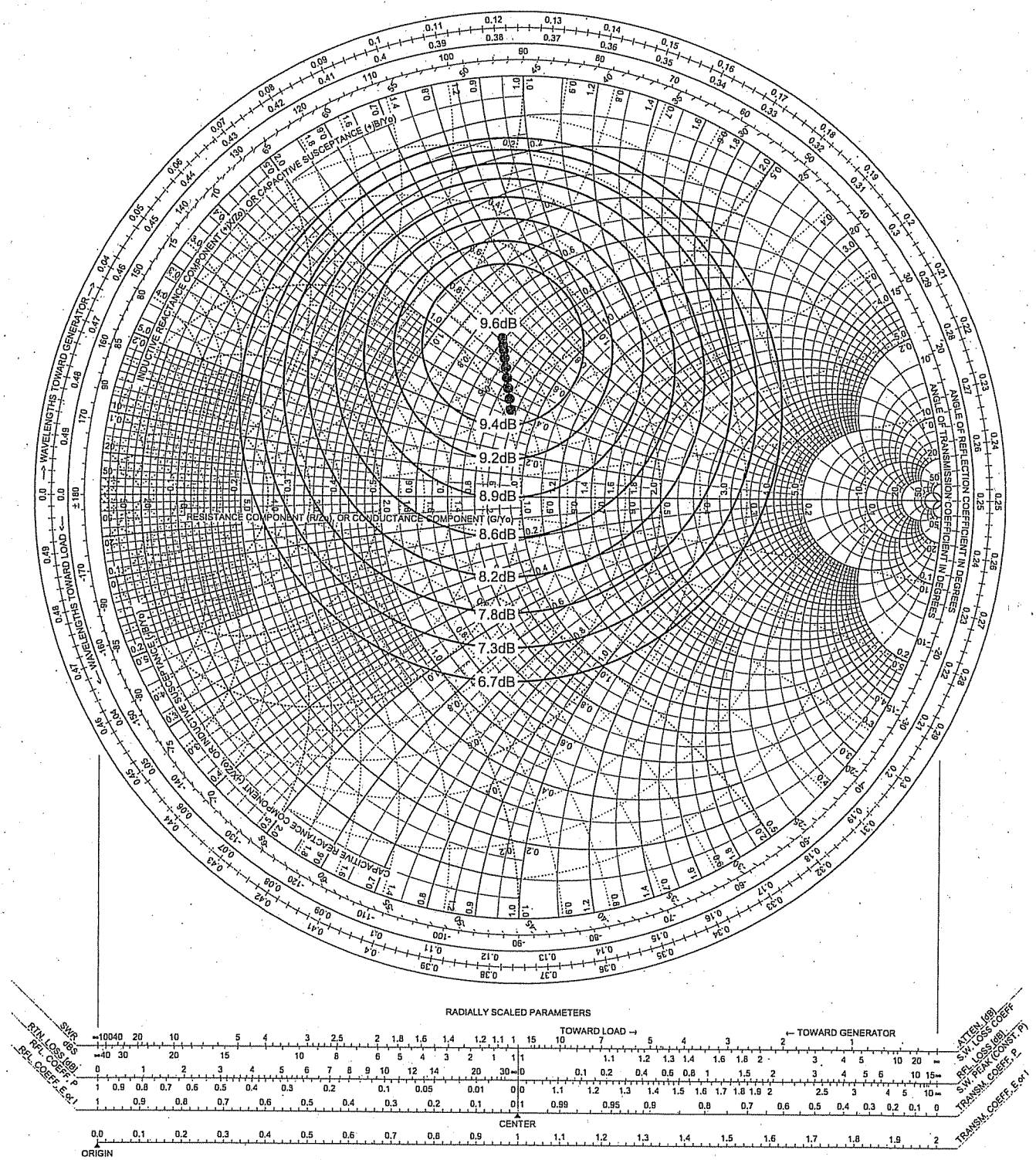
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2004

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6, Unterpunkt d)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



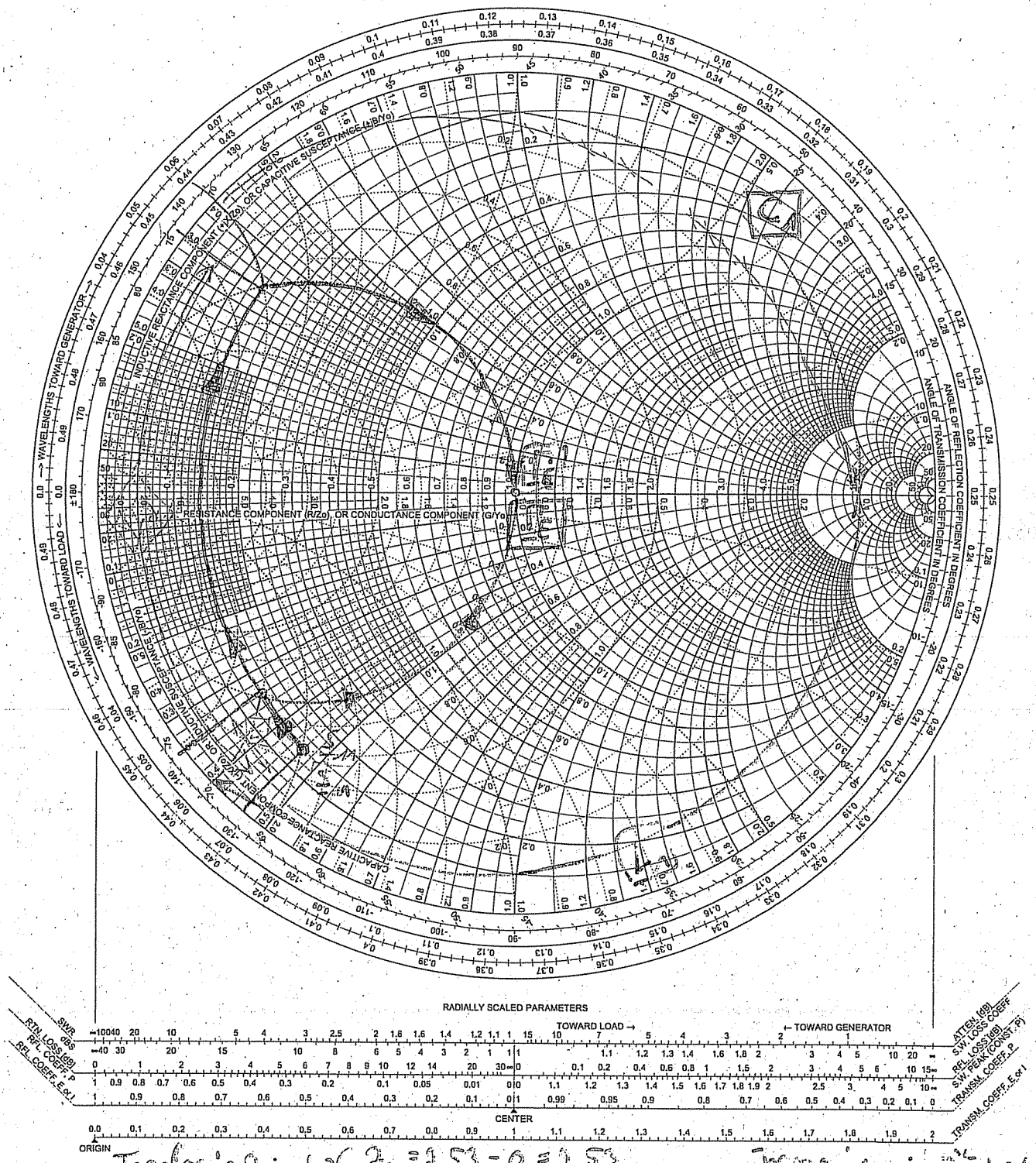
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2004

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 4 zu Aufgabe 6, Unterpunkt f)

Name: _____ Matr.Nr.: _____



Topologie 1: $\frac{w_{L_2}}{z_0} = 1{,}53 - 0 = 1{,}53$

$\frac{w_{L_2}}{z_0} = 0{,}34 - (-0{,}46) = 0{,}8$

Topologie 2: $\frac{w_{L_1}}{z_0} = (-2{,}53$

$= -1{,}53$

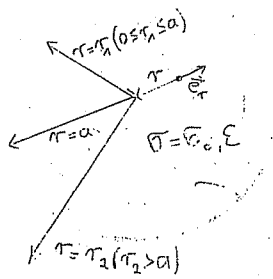
$\frac{w_{L_2}}{z_0} = -0{,}46 - 0{,}34$

H 2004

Aufgabe 1):

$\underline{t=0}$: $\rho(r, t=0) = \rho_0 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2$, $\rho_0 = \text{const}$, $r < a$

$\frac{e}{T}(t=0) = -\frac{a\rho_0}{5}$



$\sigma = 0,\varepsilon$

– Oberfläche V_1

– Oberfläche V_2

a) $\operatorname{div} \vec{j}(r,t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(r,t) = 0$

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \vec{D}$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{=\rho} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \rho$

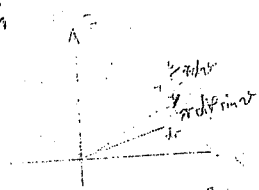
$\Rightarrow$ DGL: $\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \rho(r,t) + \dot{\rho}(r,t) = 0$

Lösung: $\rho(r,t) = \rho(r=0) \cdot e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

$= \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$, $r < a$

b) eingeschlossene Ladung: $Q_1(r_1, t) = \int_{V_1} \rho(r,t)\, dV$, $r_1 < a$

$\Rightarrow Q_1(r_1, t) = \int_{V_1} \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-t/\tau} \cdot dV$



$dV = r^2 \cdot \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

$= 4\pi r^2 \cdot dr$

$= \frac{\rho_0}{a^2} e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} 4\pi r^4 \, dr$

$= \frac{4\pi\rho_0}{a^2} e^{-t/\tau} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^{r_1} = \frac{4}{5}\pi\rho_0 e^{-t/\tau} \frac{r_1^5}{a^2}$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$

$$\oint_{\partial V_1} \vec{D}_1 \, d\vec{F} = \int_{V_1} \operatorname{div}\vec{D}_1 \, dV_1 = \int_{V_1} \rho \, dV_1 = Q_1 = \frac{4}{5}\pi\rho_0 \frac{r_1^5}{a^2} e^{-t/\tau}$$

↑ Gauß

$$\int_{V_1} \operatorname{div}\vec{D}\, dV = \int_{\partial V_1} \vec{D}\, d\vec{F} = D(r_1,t)\cdot 4\pi r_1^2$$

↑ Kugelsymmetrie

$$\vec{D} = D(r,t)\cdot\vec{e}_r$$

$$d\vec{F} = dF\cdot\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow D(r_1,t) = \frac{1}{4\pi r_1^2}\cdot\frac{4}{5}\pi\rho_0\frac{r_1^5}{a^2}e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{\rho_0 r_1^3}{5a^2}e^{-t/\tau} \qquad (*)$$

d) Ladung $Q_1(r_1 = a-0, t)$:

$$Q_1(r_1 = a-0, t) = \frac{4}{5}\pi\rho_0 a^3 e^{-t/\tau}$$

Da der Außenraum nichtleitend ist, muss die "verschwindende" Ladung $\Delta Q_1 = Q_1(r=a-0, t=0) - Q_1(r_1=a-0, t)$ als Flächenladung (zusätzlich zu der zur Zeit $t=0$ vorhandenen!) bei $r=a$ auftreten:

$$\Delta Q_1 = \frac{4\pi}{5}\rho_0 a^3\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

$$\rho_{F_1}(t) = \frac{\Delta Q_1}{4\pi a^2} = \frac{\rho_0 a}{5}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad [\rho_{F_1}(0)=0]$$

Skizze:

$$\rho_F(t) = -\frac{a\rho_0}{5} + \rho_{F_1}(t) = -\frac{\rho_0 a}{5}e^{-t/\tau}$$

e) Gesamtladung in V_2:

$$Q_2(r_2,t) = Q_1(r_1 = a-0,t) + \rho_F(t)\, 4\pi a^2$$

$$\boxed{Q_2(r_2,t) = \frac{4\pi}{5}\rho_0 a^3 e^{-t/\tau} - \frac{4\pi}{5}\rho_0 a^3 e^{-t/\tau} = 0}$$

Alternativ: Wegen $\sigma = 0$ außen gilt $Q_2(r_2,t) = Q_2(r,0)$

$$\Rightarrow Q_2(r_2,0) = -\frac{a\rho_0}{5}\cdot 4\pi a^2 + Q_1(a,0) = -\frac{a\rho_0}{5} 4\pi a^2 + \frac{4\pi}{5}\rho_0 a^3 = 0$$

analog zu c): $\oint_{\partial V_2} \vec{D}_2\, d\vec{F} = Q_2 = 0$

$$D_{2r}(r_2,t)\cdot 4\pi r_2^2 = 0 \Rightarrow \boxed{D_{2r} = 0} \quad \boxed{\vec{D}_2 = \vec{0}}$$

f) $P_{1J} - \sigma_0 E_r^2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon^2} D_{r_1}^2 \overset{(*)}{=} \frac{\sigma_0 r_1^6}{25\varepsilon^2 a^4 a^4}\rho_0^2 e^{-2t/\tau}$

$$P_{1J}(t) = \int_{V_1} P_{1J}\, dV = \frac{\sigma_0 \rho_0^2 4\pi}{25\varepsilon^2 a^4}\cdot e^{-2t/\tau}\int_0^a r_1^8\, dr_1$$

$$\boxed{P_{1J}(t) = \frac{4\pi\sigma_0}{225\,\varepsilon^2} a^5 \rho_0^2 e^{-2t/\tau}}$$

$$W_{1J} = \int_0^\infty P_{1J}(t)\, dt = \frac{4\pi\sigma_0}{225\,\varepsilon^2} a^5 \rho_0^2 \underbrace{\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\, dt}_{= \tau/2}$$

$$\boxed{W_{1J} = \tau\cdot\frac{2\pi\sigma_0}{225\cdot\varepsilon^2} a^5\rho_0^2 \overset{\tau = \varepsilon/\sigma_0}{=} \frac{2\pi}{225\,\varepsilon} a^5\rho_0^2} \quad (**)$$

g) $W_{el}(t=0) = \int_{V_\infty} \omega_{el}(t=0)\, dV$, $\omega_{el}(t=0) = \frac{1}{2}\varepsilon E_r^2(t=0) = \frac{1}{2\varepsilon} D_r^2(t=0)$

$D_r(t=0) = 0$ für $r > a$

$D_{1r}(t=0) \overset{(*)}{=} \frac{r_1^3}{5a^2}\rho_0$

$$W_{el}(t=0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_1} u_{1r}(t=0)\, dw = \frac{\pi}{25\,\varepsilon\, a^4} \int_0^{\cdot} r_1\, dr_1$$

$$W_{el}(t=0) = \frac{2\pi}{25\,\varepsilon}\, a^5\, p_0^2 = W_{13}$$

(**)

H 2004

Aufgabe 2):

a) $\underline{\vec{H}}_e = \frac{1}{Z_1}\vec{n}_e \times \underline{\vec{E}}_e$; $\underline{\vec{H}}_r = \frac{1}{Z_1}\vec{n}_r \times \underline{\vec{E}}_r$

$$\underline{\vec{H}}_e = \frac{E_{0e}}{Z_1} e^{-j\vec{k}_e\vec{r}} \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{E_{0e}}{Z_1} e^{-j\vec{k}_e\vec{r}} \left(\vec{e}_x \cos\varphi_1 + \vec{e}_z \sin\varphi_1\right)$$

$$\underline{\vec{H}}_r = \frac{E_{0r}}{Z_1} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_{0r}}{Z_1} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} \left(\vec{e}_x \cos\varphi_1 - \vec{e}_z \sin\varphi_1\right)$$

b) $\vec{n} \times \underline{\vec{E}}_{12} = 0$ $\quad \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_{12} = \underline{\vec{J}}_F$

$\underline{\vec{H}}_{12} = \underline{\vec{H}}_2 - \underline{\vec{H}}_1$, leg. $\sigma \to \infty$: $\underline{\vec{H}}_2 = 0$ $\Bigg\}$ $\vec{n} \times \left(-\underline{\vec{H}}_1\right) = \underline{\vec{J}}_F$

c) z-Ebene als Grundfläche: $z = 0$, $\vec{n}_F = \vec{e}_z$: $\vec{n}_F \cdot \vec{r} = 0$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

Die Stetigkeitsbed. ist nur erfüllt, falls die Phasenfaktoren gleich sind:

$$e^{-j\vec{k}_e\vec{r}_0} = e^{-j\vec{k}_r\vec{r}_0} \to e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}(-x\sin\varphi_1)} = e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}(-x\sin\varphi_1}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_z \times \vec{e}_y \cdot \left[E_{0h} + E_{0r}\right] e^{j\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}\, x\sin\varphi_1} = 0$$

$$\Rightarrow -\vec{e}_x \cdot \left[E_{0h} + E_{0r}\right] = 0 \qquad \Rightarrow E_{0h} = -E_{0r}$$

d) $\varphi_1 = 0$, d.h. nur Ausbreitung in pos. z-Richtung für die einlaufende Welle und in neg. z-Richtung für die refl. Welle

$\underline{\varphi_1 = 0}$ $\to \sin\varphi_1 = 0$ und $\cos\varphi_1 = 1$ $\Rightarrow \vec{n}_h = \vec{e}_z$ und $\vec{n}_r = -\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{k}_h = \vec{n}_h\,\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} = \vec{e}_z\,\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} \text{ und } \vec{k}_r = \vec{n}_r\,\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0} = -\vec{e}_z\,\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_h = \vec{k}_r = \left(\vec{e}_z - \vec{e}_z\right)\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k}_h = -\vec{k}_r$$

e) $\underline{E}_g = E_{0h}\,\vec{e}_y\left(e^{jk_h z} - e^{-jk_h z}\right) = -\vec{e}_y \cdot 2j E_{0h} \sin k_h z$

$\underline{\vec{H}}_g = -\vec{e}_x \frac{E_{0h}}{Z_1}\left(e^{-jk_h z} + e^{jk_h z}\right) = -\vec{e}_x\, 2\frac{E_{0h}}{Z_1}\cos k_e z$

$\vec{E}_g(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_g \cdot e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}_y \cdot (\cos\omega t + j\sin\omega t)\right) = \vec{e}_y\, 2E_{0h}\sin k_h z \sin\omega t$

$\vec{H}_g(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{H}}_g e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{H}}_g(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right) = -\vec{e}_x \cdot 2\frac{E_{0h}}{Z_1}\cos k_h z \cdot \cos\omega t$

f) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \longrightarrow \langle \vec{S} \rangle_t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right) = 0$ wegen

$\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right) = \mathrm{Re}\left(\vec{e}_y \times \vec{e}_x \cdot 2j E_{0h}\sin k_h z \cdot 2\frac{E_{0h}}{Z_1}\cos k_h z\right) = 0$

$\langle w \rangle_t = \langle w_{el} \rangle_t + \langle w_m \rangle_t$; beachte: die Energiedichte ist immer reell und positiv

$w_{el} = \frac{\varepsilon}{2}\left[E_y(t)\right]^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left(2j E_{0h}\sin k_h z \sin\omega t\right)^2 = 2\varepsilon E_{0h}^2 \sin^2 k_h z \sin^2\omega t$

$w_m = \frac{\mu}{2}\left[H_x(t)\right]^2 = \frac{\mu}{2}\left(2\frac{E_{0h}}{Z_1}\cos k_h z \cos\omega t\right)^2 = 4\mu\frac{E_{0h}^2}{Z_1^2}\cos^2 k_h z \cos^2\omega t$

$\langle w_{el} \rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T dt'\, w_{el}(r,t') = \frac{1}{2}\left\{2\varepsilon_1 E_{0h}^2 \sin^2 k_h z\right\} = \varepsilon_1 E_{0h}^2 \sin^2 k_h z$

$\langle w_m \rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T dt'\, w_m(r,t') = \frac{1}{2}\left\{2\varepsilon_1 E_{0h}^2 \cos^2 k_e z\right\} = \varepsilon_1 E_{0h}^2 \cos^2 k_h z$

$\Rightarrow \langle w \rangle_t = \varepsilon_1 E_{0h}^2\left\{\sin^2 k_h z + \cos^2 k_h z\right\} = \varepsilon_1 E_{0h}^2$

g) $\underline{\vec{J}}_F = \vec{n} \times \underline{\vec{H}}_{12} = \vec{n} \times \left(-\underline{\vec{H}}_1\right)$ weil $\underline{\vec{H}}_2 = 0$ wg. $\sigma \to \infty$

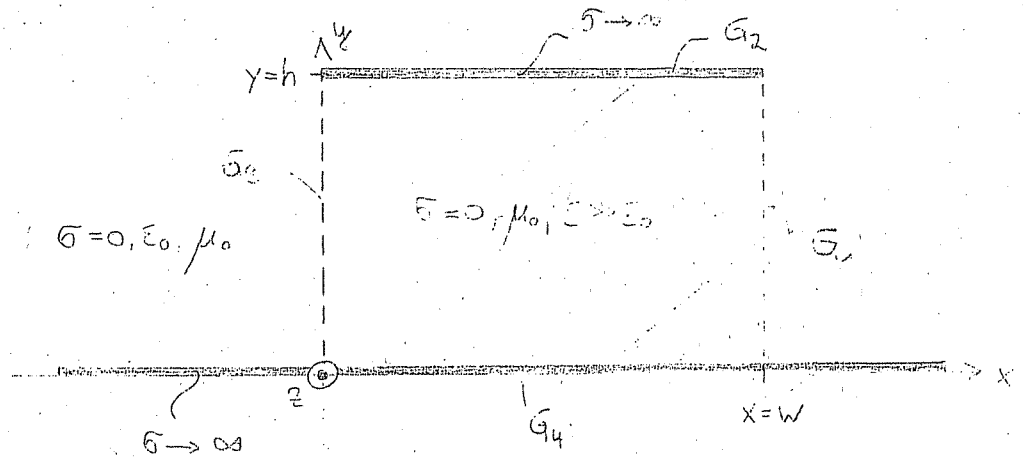
$\underline{\vec{J}}_F = \vec{e}_t \times \vec{e}_x\left[-\left(-\frac{E_{0h}}{Z_1}\left\{e^{-jk_h z} + e^{jk_h z}\right\}\right)\right]\Big|_{z=0} = 2\vec{e}_y\frac{E_{0h}}{Z_1}$

$\vec{J}_F = \mathrm{Re}\left(2\vec{e}_y\frac{E_{0h}}{Z_1}e^{j\omega t}\right) = 2\vec{e}_y\frac{E_{0h}}{Z_1}\cdot\cos\omega t$

(mit $h = \epsilon$)

H 2004

Aufgabe 3):



G_1; G_3 → magnetische Wände (d.h. $H_{tan} = 0$)

TE-Wellentypen mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\vec{E}(t) = Re\{\underline{\vec{E}} e^{j\omega t}\} \quad ; \quad \vec{H}(t) = Re\{\underline{\vec{H}} e^{j\omega t}\}$$

Vektorwellenpotentiale: $\underline{\vec{G}} = \vec{0}$

$$\underline{\vec{F}} = \underline{f}(x, y, z)\,\vec{e}_z$$

a) **DGL für die skalare Potenzialfkt. $\underline{f}(x, y, z)$:**

Ansatz: ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$)

Helmholtz-Gl.:

$$(\nabla_{tr}^2 + k^2)\,\underline{f}(x, y, z) = 0 \quad ; \quad \gamma^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial z^2} + k^2 \underline{f} = 0$$

Helmholtz-Gl.: $\Delta \underline{f} + k^2 \underline{f} = 0$, $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$

b) **Elementarlösungen mit Hilfe der Seperationsansatz:**

Produktansatz: $\underline{f}(x, y, z) = \Psi(x) \cdot \Psi(y) \cdot e^{-j\beta z}$

$$\Psi''(x) + k_x^2 \Psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \Psi(x) = B\sin(k_x x) + A\cos(k_x x) \qquad k_x \neq 0$$

$$\Psi''(y) + k_y^2 \Psi(y) = 0 \quad \Rightarrow \Psi(y) = D\sin(k_y y) + C\cos(k_y y) \qquad k_y \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{f}(x,y,z) = \Psi(x) \cdot \Psi(y) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$= (B\sin(k_x x) + A\cos(k_x x))(D\sin(k_y y) + C\cos(k_y y)) e^{-j\beta z}, \quad k_x, k_y \neq 0$$

Separationsbed.:

Bestimmung von β: $\quad -k_x^2 - k_y^2 + k^2 - \beta^2 = 0$

$$\Rightarrow \beta^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

Hinweis für die folgenden Unterpkte:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(k^2 \underline{f}\,\vec{e}_z + \nabla\left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial z}\right)\right)$$

$$\underline{\vec{E}} = -\nabla \underline{f} \times \vec{e}_z$$

c) Grenzbedingungen bei G_2 und G_4:

$$\underline{\vec{E}} = -\nabla \underline{f} \times \vec{e}_z = -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{f} \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\vec{e}_y$$

$$= \frac{\partial \underline{f}}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial \underline{f}}{\partial x}\vec{e}_y$$

Randbedingung: $\vec{n} \times \underline{\vec{E}} = 0$ (an $\vec{e}_z$) $\Rightarrow \underline{E}_x = \underline{E}_z = 0$

$(y=0 \wedge y=h)$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \underline{f}}{\partial z}\Big|_{\substack{y=0 \\ y=h}} = 0 \quad \Rightarrow \underline{f}_y = D k_y \cos(k_y y) - C k_y \sin(k_y y)$$

$$\underline{f}_y(y=0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow D = 0$$

$$\underline{f}_y(y=h) = -C k_y \sin(k_y h) = 0$$

$$\Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{h}$$

$$\Rightarrow \underline{f}(x,y,z) = \underline{C} \cdot \frac{n\pi}{h} \cdot B \cdot \dots \cdot e^{-j\beta z}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(k^2 \underline{L}\vec{e}_z + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\underline{L}\vec{e}_x + \frac{\partial^2 \underline{L}}{\partial y\,\partial z}\vec{e}_y + \frac{\partial^2 \underline{L}}{\partial z^2}\vec{e}_z\right)$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \underline{L}}{\partial x\,\partial z} \\ -\frac{\partial^2 \underline{L}}{\partial y\,\partial z} \\ -\beta^2 + k^2 \end{bmatrix} \underline{L}$$

$\frac{\text{Tangentialkomponente}}{(x=0 \wedge x=W)^{\perp}}$ $\quad \text{rot}\,\vec{H} = \vec{S} \Rightarrow H_{tan} = \dots \Rightarrow H_z = \dots$

$$H_y = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial^2 \underline{L}}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{j\omega\mu_0}\cdot D \cdot \frac{n\pi}{h}\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\cdot \sin(k_x x + \varphi_0)\cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0}\left(-\beta^2 \cdot \dots \cdot B \cdot \dots \cdot A \cdot \dots\right)$$

$$H_y|_{x=0} = H_z|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow A = 0$$

$$H_y|_{x=W} = H_z|_{x=W} = 0 \quad \Rightarrow k_x W = k\cdot\pi \quad , k \neq 0$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{k\cdot\pi}{W}$$

$$\Rightarrow \underline{L}(x,y,z) = C\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\cdot B\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{W}\cdot x\right)\cdot e^{-j\beta z}$$

$$-\beta^2\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{W}x\right)\cdot e^{-j\beta z} \quad , A = C\cdot B$$

e)

$\frac{\text{TE-Welle}}{}$ $\quad \beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$

$$\Rightarrow \beta_{k,l} = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0 - \left(\frac{k\pi}{W}\right)^2 - \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2}$$

$; k = 0,1,2,\dots$

$; l = 0,1,2,\dots$

f) Grenzfrequenzen:

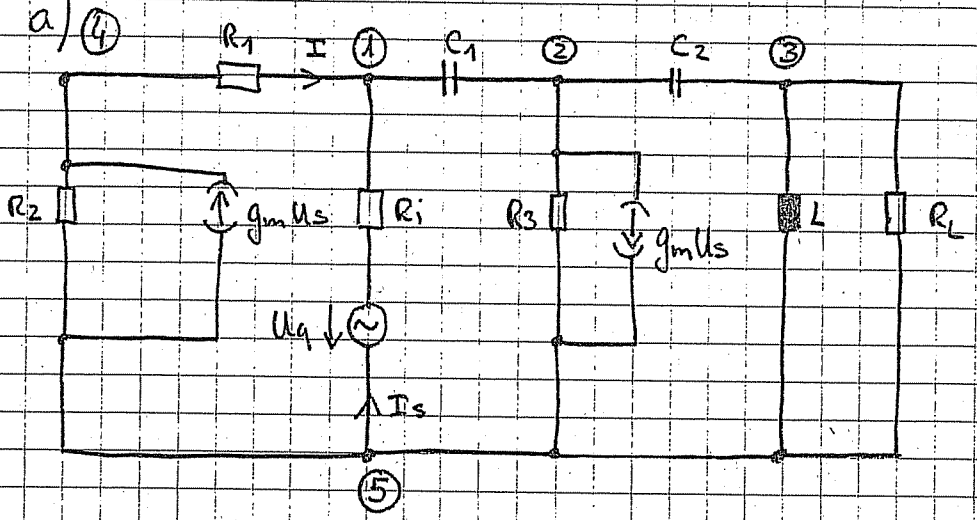
für $\beta = 0$:

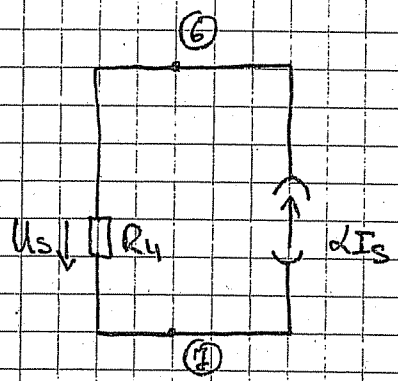
$$\Rightarrow \omega^2\varepsilon\mu_0 = \left(\frac{k\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{h}\right)^2$$

$$\Rightarrow \omega = \pi\cdot C\cdot\sqrt{\frac{(k\cdot h)^2 + (l\cdot W)^2}{h^2 + W^2}} \quad , \text{mit } \varepsilon\mu_0 = \frac{1}{C^2}$$

Aufgabe 4: Klausur EMF (EE) H04

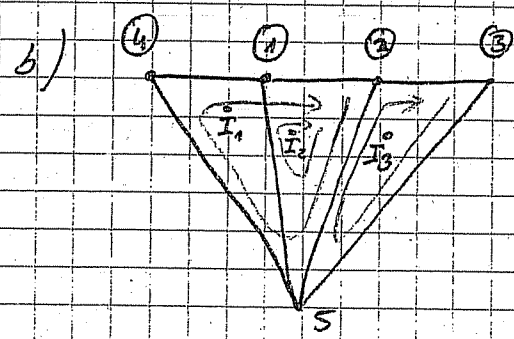
a)

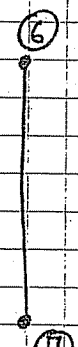




- Verschieben d. Stromquelle $g_m U_s$ in Zweige (⑤ → ④) und (⑤ → ②)
- Zusammenfassung von $j\omega L$ und R_L zu $Z_L = \frac{j\omega L \cdot R_L}{j\omega L + R_L}$
- (zur besseren Übersicht → umzeichnen des Pfades ① → ④ → ⑤ nach außen!)

b)





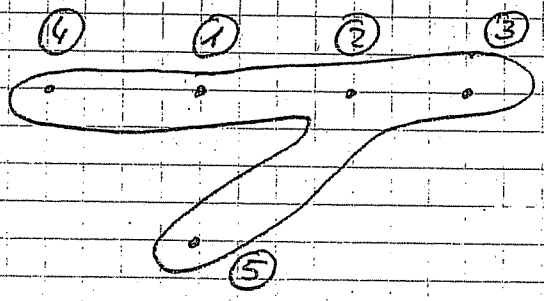
Zweige $z = 8$

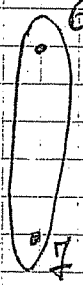
Komponenten $s = 2$

Knoten $k = 7$

Rang des Netzwerks:

$p = k - s = 5$





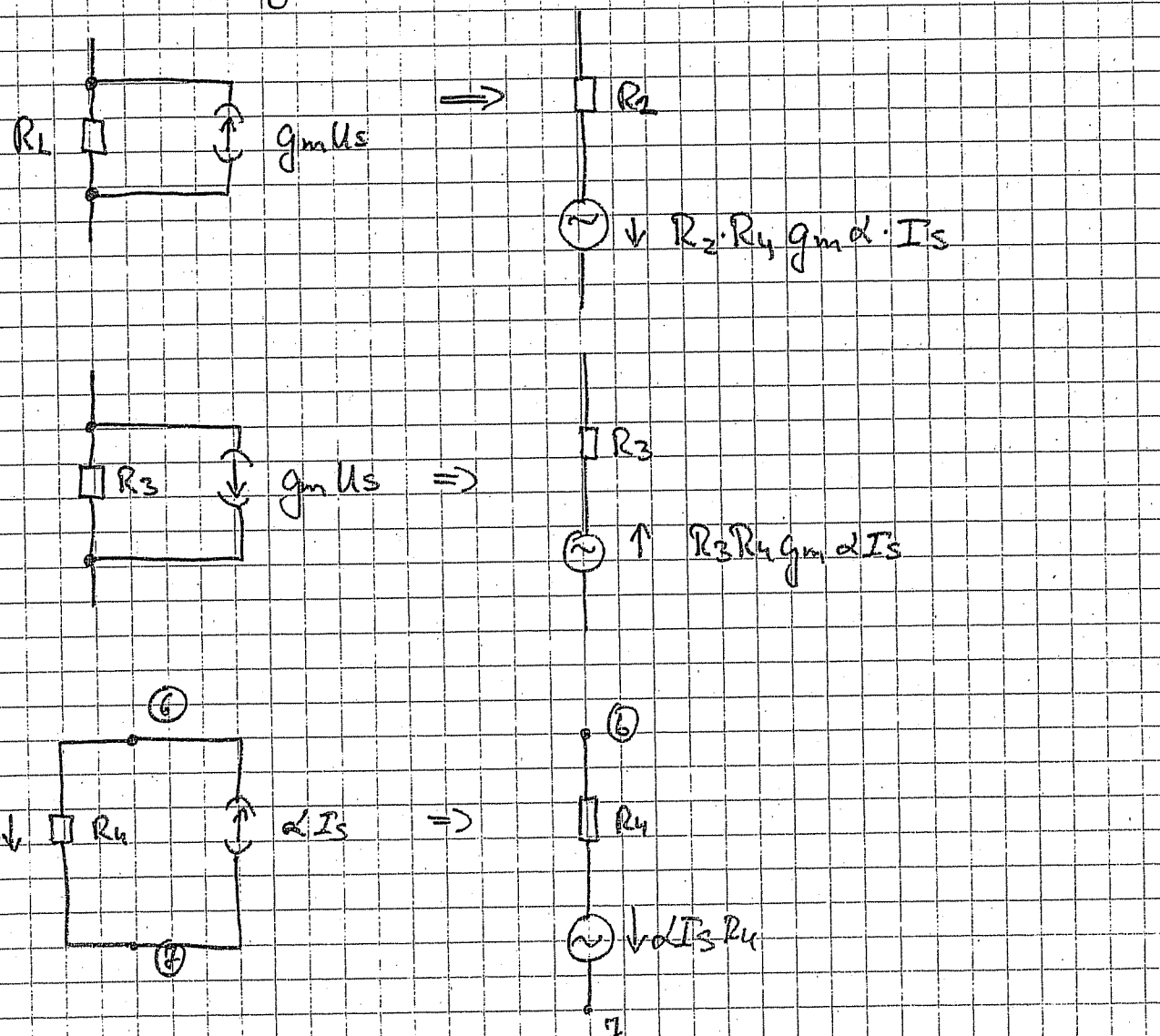
Rang d. Maschenimpedanzmatrix ≙ oben

Bettische Zahl:

$m = z - p = 3$

c) – Umwandlung d. Stromquellen in Sp.quellen

– Umwandlung d. Spannungssteuerung in Strom-steuerung



$$\begin{pmatrix} R_3R_4\alpha g_m I_S + R_2R_4\alpha g_m I_S \\ U_q + R_3R_4\alpha g_m I_S \\ -R_3R_4\alpha g_m I_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1+R_2+R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & -R_3 \\ R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & R_i+R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & -R_3 \\ -R_3 & -R_3 & R_3+\frac{1}{j\omega C_2}+R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

mit $I_S = \underline{I}_2$ folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1+R_2+R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & R_3+\frac{1}{j\omega C_1}-(R_2+R_3)(R_4\alpha\cdot g_m) & -R_3 \\ R_3+\frac{1}{j\omega C_1} & R_i+R_3+\frac{1}{j\omega C_1}-R_3R_4\alpha g_m & -R_3 \\ -R_3 & -R_3+R_3R_4\alpha g_m & R_3+\frac{1}{j\omega C_2}+R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{U}$ = $\underline{Z}$ · $\underline{I}$

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

a) $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} U \\ U_q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R & -R \\ R+\frac{1}{j\omega C_1} & R(2-\alpha)+\frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ -R & -R(1-\alpha) & R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L \end{vmatrix} \cdot \underline{I}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ U_q \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ R+\frac{1}{j\omega C_1} & R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ -R & 0 & R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{vmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{Z}} = \left(3R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L\right) + \left(-R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)(-R)\cdot(-R)$$
$$-(-R)\left(R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)(-R) - \left(R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(-R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)$$

$$= \left(R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L\right)\left(3R+\frac{1}{j\omega C_1}+R-\frac{1}{j\omega C_1}\right) - 2R^3$$

$$= R^2+\frac{R}{j\omega C_2}+RZ_L+\frac{R}{j\omega C_1}-\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}+\frac{Z_L}{j\omega C_1}\Big|4R - 2R^3$$

mit Cramerscher Regel: $\boxed{I=\underline{I}_1}$

$$\Rightarrow I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ U_q & R+\frac{1}{j\omega C_1} & -R \\ 0 & 0 & R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L \end{vmatrix}}{\det \underline{\underline{Z}}}$$

$$I = -\frac{\left(R+\frac{1}{j\omega C_2}+Z_L\right) U_q \left(-R+\frac{1}{j\omega C_1}\right)}{\det \underline{\underline{Z}}}$$

$$I = \frac{U_q}{4R}\cdot\frac{\left(R^2+\frac{R}{j\omega C_2}+R\cdot Z_L-\frac{R}{j\omega C_1}+\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}-\frac{Z_L}{j\omega C_1}\right)}{\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R}{j\omega C_2}+R\cdot Z_L+\frac{R}{j\omega C_1}-\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}+\frac{Z_L}{j\omega C_1}\right)}$$

Aufgabe 5: Herbst 2004

(a) Symmetrie: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22}$, $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

Reziprozität: $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$

Verlustlosigkeit: $\underline{P} = E - \underline{S}^{*T}\underline{S} = \emptyset$

$$E = \underline{S}^{*T}\underline{S}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}^* & \underline{S}_{12}^* \\ \underline{S}_{21}^* & \underline{S}_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |\underline{S}_{11}| + \underline{S}_{12}^* \underline{S}_{21} & \underline{S}_{11}^* \underline{S}_{12} + \underline{S}_{12}^* \underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{11} + \underline{S}_{22}^* \underline{S}_{21} & \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{12} + |\underline{S}_{22}| \end{bmatrix}$$

Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Symmetrie und der Reziprozität bleiben zwei Gleichungen:

$$|\underline{S}_{11}|^2 + |\underline{S}_{21}|^2 = 1$$

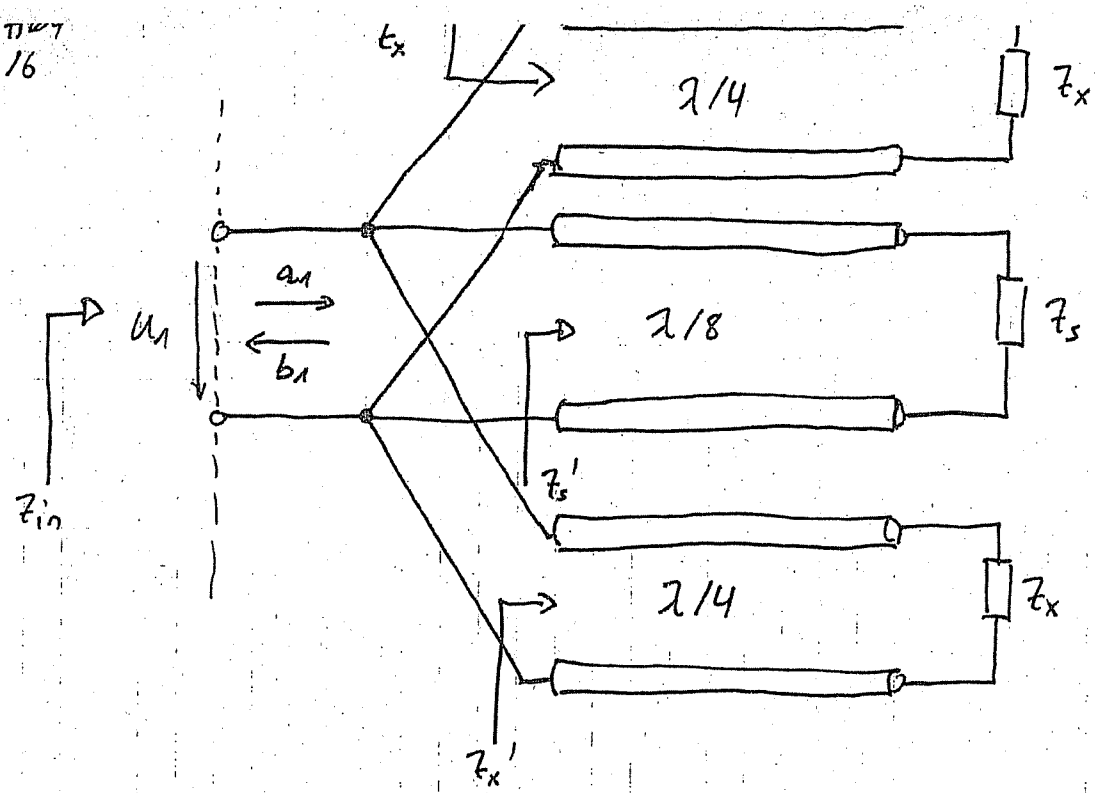
$$\underline{S}_{11}^* \underline{S}_{21} + \underline{S}_{21}^* \underline{S}_{11} = \emptyset$$

(b) $$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a} \end{bmatrix}$$ (gerade Anregung)

$$\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ -\underline{a} \end{bmatrix}$$ (ungerade Anregung)

$\underline{Z}_s \to \infty$ bei gerader Anregung (magnetische Wand in Symm. Ebene)

$Z_s = \emptyset$ bei ungerader Anregung (elektrische Wand in Sym. Ebene)



(c) Impedanztransformation über $\frac{\lambda}{4}$-Leitung: $\underline{Z}_e = \frac{j Z_L}{\frac{1}{Z_L}} = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_a}$

Impedanztransformation über $\frac{\lambda}{8}$-Leitung:

$$\underline{Z}_e = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{Z}_a + j Z_L \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{j}{Z_L}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{Z}_a + \frac{1}{\sqrt{2}}} = j Z_L \frac{\underline{Z}_a + j Z_L}{-\underline{Z}_a + j Z_L}$$

$$\underline{Z}_x' = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x}$$

$$\underline{Z}_s' = j Z_L \frac{\underline{Z}_s + j Z_L}{-\underline{Z}_s + j Z_L}$$

$$\underline{Z}_{IN} = \frac{\frac{1}{2} Z_x' \underline{Z}_s'}{\frac{1}{2} Z_x' + Z_s'} = \frac{\frac{Z_L^3}{\underline{Z}_x} j \frac{\underline{Z}_s + j Z_L}{-\underline{Z}_s + j Z_L}}{\frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x} + j 2 Z_L \frac{\underline{Z}_s + j Z_L}{-\underline{Z}_s + j Z_L}}$$

Anregung (1) (gerade): $\underline{Z}_s \to (\infty)$

$$Z_{IN}^{(1)} = -\frac{\frac{Z_L^3}{\underline{Z}_x} j}{\frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x} - j 2 Z_L} = -\frac{\frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x}\cdot j}{\frac{Z_L}{\underline{Z}_x} - j 2} = -\frac{j Z_L^2}{Z_L - j 2 \underline{Z}_x}$$

Anregung (2) (ungerade): $\underline{Z}_S = \emptyset$

$$\underline{Z}_{IN}^{(2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Z_L^3}{\underline{Z}_x}\,j}{\frac{1}{2}\frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x} + j2Z_L} = \frac{\frac{Z_L^2}{\underline{Z}_x}\,j}{\frac{Z_L}{\underline{Z}_x} + j2} = \frac{jZ_L^2}{Z_L + j2\underline{Z}_x}$$

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \frac{\underline{Z}_{IN}^{(1)} - Z_L}{\underline{Z}_{IN}^{(1)} + Z_L} = \frac{-\frac{jZ_L}{Z_L - j2\underline{Z}_x} - 1}{-\frac{jZ_L}{Z_L - j2\underline{Z}_x} + 1}$$

$$= \frac{-jZ_L - Z_L + j2\underline{Z}_x}{-jZ_L + Z_L + j2\underline{Z}_x}$$

$$\underline{\Gamma}^{(2)} = \frac{\underline{Z}_{IN}^{(2)} - Z_L}{\underline{Z}_{IN}^{(2)} + Z_L} = \frac{\frac{jZ_L}{Z_L + j2\underline{Z}_x} - 1}{\frac{jZ_L}{Z_L + j2\underline{Z}_x} + 1} = \frac{jZ_L - Z_L - j2\underline{Z}_x}{jZ_L + Z_L + j2\underline{Z}_x}$$

(d) Sicht:

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \frac{-j-1}{-j+1} \qquad \underline{\Gamma}^{(2)} = \frac{j-1}{j+1}$$

Anregung (1)

$$\begin{bmatrix} \underline{b} \\ \underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{a} \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = (\underline{S}_{11} + \underline{S}_{21})\,\underline{a}$$

$$\underline{\Gamma}^{(1)} = \underline{S}_{11} + \underline{S}_{21}$$

Addition beider Gl.

$$\underline{S}_{11} = \frac{1}{2}\left(\underline{\Gamma}^{(1)} + \underline{\Gamma}^{(2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-j+1}{-j+1} + \frac{j-1}{j+1}\right)$$

Anregung (2)

$$\begin{bmatrix} \underline{b} \\ -\underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ -\underline{a} \end{bmatrix}$$

$$b = (\underline{S}_{11} - \underline{S}_{21})\,\underline{a}$$

$$\underline{\Gamma}^{(2)} = \underline{S}_{11} - \underline{S}_{21}$$

Subtraktion beider Gl.

$$\underline{S}_{21} = \frac{1}{2}\left(\underline{\Gamma}^{(1)} - \underline{\Gamma}^{(2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-j-1}{-j+1} - \frac{j-1}{j+1}\right)$$

S. 4/16

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(-\jmath-1)(\jmath+1)+(\jmath-1)(-\jmath+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\jmath-\jmath-1+1+\jmath+\jmath-1}{2}$$

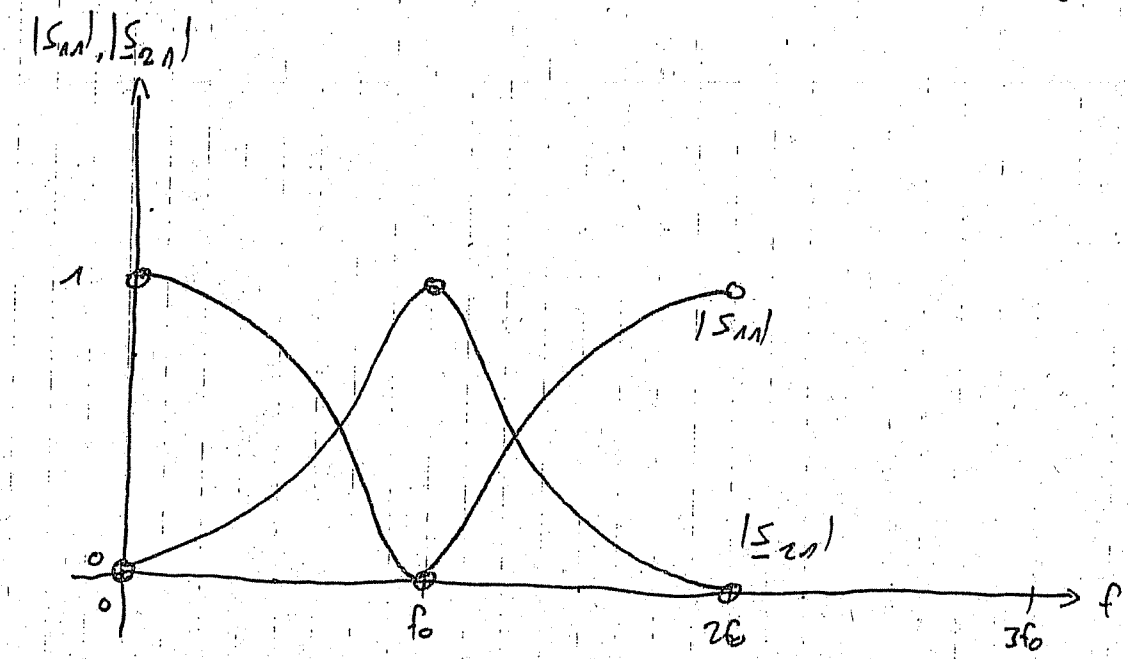
$$= \emptyset$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(-\jmath-1)(\jmath+1)-(\jmath-1)(-\jmath+1)}{2}\right)$$

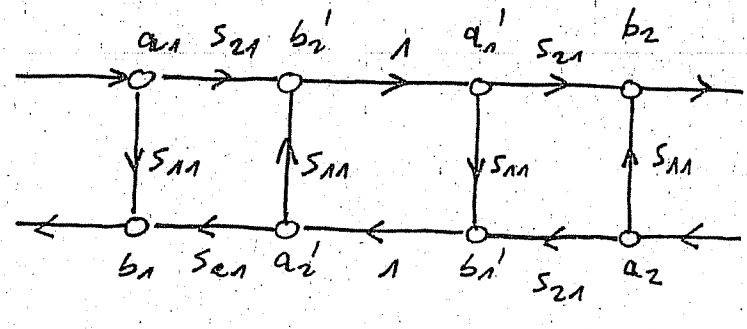
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\jmath-\jmath-1-1-\jmath-\jmath+1}{2}$$

$$= -\jmath$$

(e) Die exakt angegebenen Punkte sind mit Kreisen gekennzeichnet:



(f) Lösung mit Signalflussdiagramm und Berücksichtigung der Symmetrie und Reziprozität:



$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}\,\underline{b}_1'$$

$$\underline{b}_1' = \underline{S}_{21}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}\,\underline{b}_2'$$

$$\underline{b}_2' = \underline{S}_{21}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{11}\,\underline{b}_1'$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{11}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{21}\,\underline{b}_2'$$

$$\underline{b}_1' = \underline{S}_{21}\,\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}\left(\underline{S}_{21}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{11}\,\underline{b}_1'\right)$$

$$= \underline{S}_{21}\,\frac{\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}\,\underline{a}_1}{1 - \underline{S}_{11}^2}$$

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}^2\,\frac{\underline{a}_2 + \underline{S}_{11}\,\underline{a}_1}{1 - \underline{S}_{11}^2}$$

$$= \underline{S}_{11}\left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2}\right)\underline{a}_1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2}\,\underline{a}_2$$

Da das Filter reziprok und symmetrisch ist, ist auch die Kettenschaltung reziprok und symm., und es gilt:

$$\underline{S}_{GES} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11}\left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2}\right) & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2} & \underline{S}_{11}\left(1 + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1 - \underline{S}_{11}^2}\right) \end{bmatrix}$$

Alternative Lösung mit Wellen Ketten parametern und Berücksichtigung der Symmetrie und Reziprozität:

Streuparameter:

$$\underline{b}_1 = \underline{S}_{11}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{21}\,\underline{a}_2$$

$$\underline{b}_2 = \underline{S}_{21}\,\underline{a}_1 + \underline{S}_{11}\,\underline{a}_2$$

Wellen Ketten parameter:

$$\underline{a}_1 = \underline{T}_{11}\,\underline{b}_2 + \underline{T}_{12}\,\underline{a}_2$$

$$\underline{b}_1 = \underline{T}_{21}\,\underline{b}_2 + \underline{T}_{22}\,\underline{a}_2$$

Umsortieren der beiden Kettenparameter-Gleichungen:

$$\underline{b}_2 = \frac{\underline{a}_{11} - \underline{T}_{12}\underline{a}_2}{\underline{T}_{11}}$$

Da das Filter reziprok und symmetrisch ist, ist auch die Kettenschaltung reziprok und symmetrisch, und es gilt:

$$\underline{S}_{gcs} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{T}_{12\,gcs}}{\underline{T}_{11\,gcs}} & \frac{1}{\underline{T}_{11\,gcs}} \\ \frac{1}{\underline{T}_{11\,gcs}} & -\frac{\underline{T}_{12\,gcs}}{\underline{T}_{11\,gcs}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_{gcs} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} \\ \frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} & \underline{S}_{21} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} \\ \frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}} & \underline{S}_{21} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{S}_{21}^2} - \frac{\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}^2} & -\frac{\underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{11}^3}{\underline{S}_{21}^2} \\ \underline{T}_{21\,gcs} & \underline{T}_{22\,gcs} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-\underline{S}_{11}^2}{\underline{S}_{21}^2} & \frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11} \\ \underline{T}_{21\,gcs} & \underline{T}_{22\,gcs} \end{bmatrix}$$

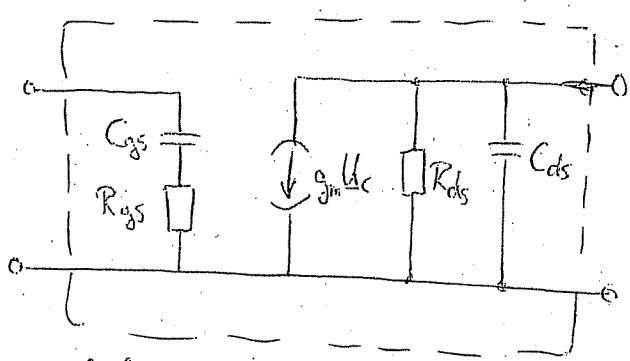
$$\underline{S}_{gcs} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2}\left(\frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11}\right) & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2} & -\frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2}\left(\frac{\underline{S}_{11}^3 - \underline{S}_{11}}{\underline{S}_{21}^2} - \underline{S}_{11}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2}\underline{S}_{11} & \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2} \\ \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2} & \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{21}^2}{1-\underline{S}_{11}^2}\underline{S}_{11} \end{bmatrix}$$

H 2004

Aufgabe 6:

a) $\underline{S}'_{22} = \underline{S}_{22}$ hängt nicht vom Eingangsanpassungsnetzwerk ab, da $\underline{S}_{12} = 0$ ist. Aus demselben Grund ist auch $\underline{S}''_M = \underline{S}_M$, wovon in den folgenden Unterpunkten Gebrauch gemacht wird.

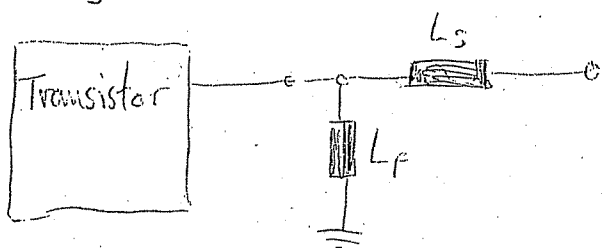


Die Reihenfolge von C_{gs} und R_{gs} ist vertauschbar!

b) s. Hilfsblatt

c) Da Serienleitungen nur den Winkel und nicht den Betrag des Reflexionsfaktors verändern und $\underline{r}_A = 1$ ist, muß sich die Serienleitung auf der Seite des Transistors befinden.
Verwendung des Y-Smith Charts (ZY-Smith Chart wäre auch möglich):
(s. Hilfsblatt)

$\Rightarrow$ Da $b_p < 0$ ist (d.h. induktiv), muß für eine möglichst kurze ~~Strecke~~ Länge l_p die Stichleitung kurzgeschlossen sein.



d) 1. Ohne Anpassungsnetzwerk: $\underline{r}_A = 0$, dieser Wert liegt auf dem Kreis $G_{TU} = 8{,}9\,dB$.

2. Nur $\underline{z}_A$ und L_A in Reihe: $\underline{z}_A + \underline{z}_{L_A} = 1{,}0 + j\,1{,}05$, dieser Wert liegt auf dem Kreis $G_{TU} = 9{,}2\,dB$, die Verstärkung steigt also um $0{,}3\,dB$.

e) Anpassung mit $\frac{\lambda}{4}$ - Transformation: $l_x = 0{,}25\,\lambda$, $z_Q = \frac{z_x^2}{\underline{z}_E}$, also ist

$$z_x = \sqrt{\underline{z}_Q \underline{z}_E} = \sqrt{72 \cdot 50}\,\Omega = 60\,\Omega$$

f) s. Hilfsblatt

⇒ Anmerkung: Hier ist nicht Leistungsanpassung, sondern die Transformation $\underline{S}_M \rightarrow \underline{r}_E$ gefragt, deshalb sind die hier gezeigten Transformationswege die einzig möglichen.

A1:

a) Kontigl.: $\operatorname{div}\vec{j} + \dot{\varrho} = 0$

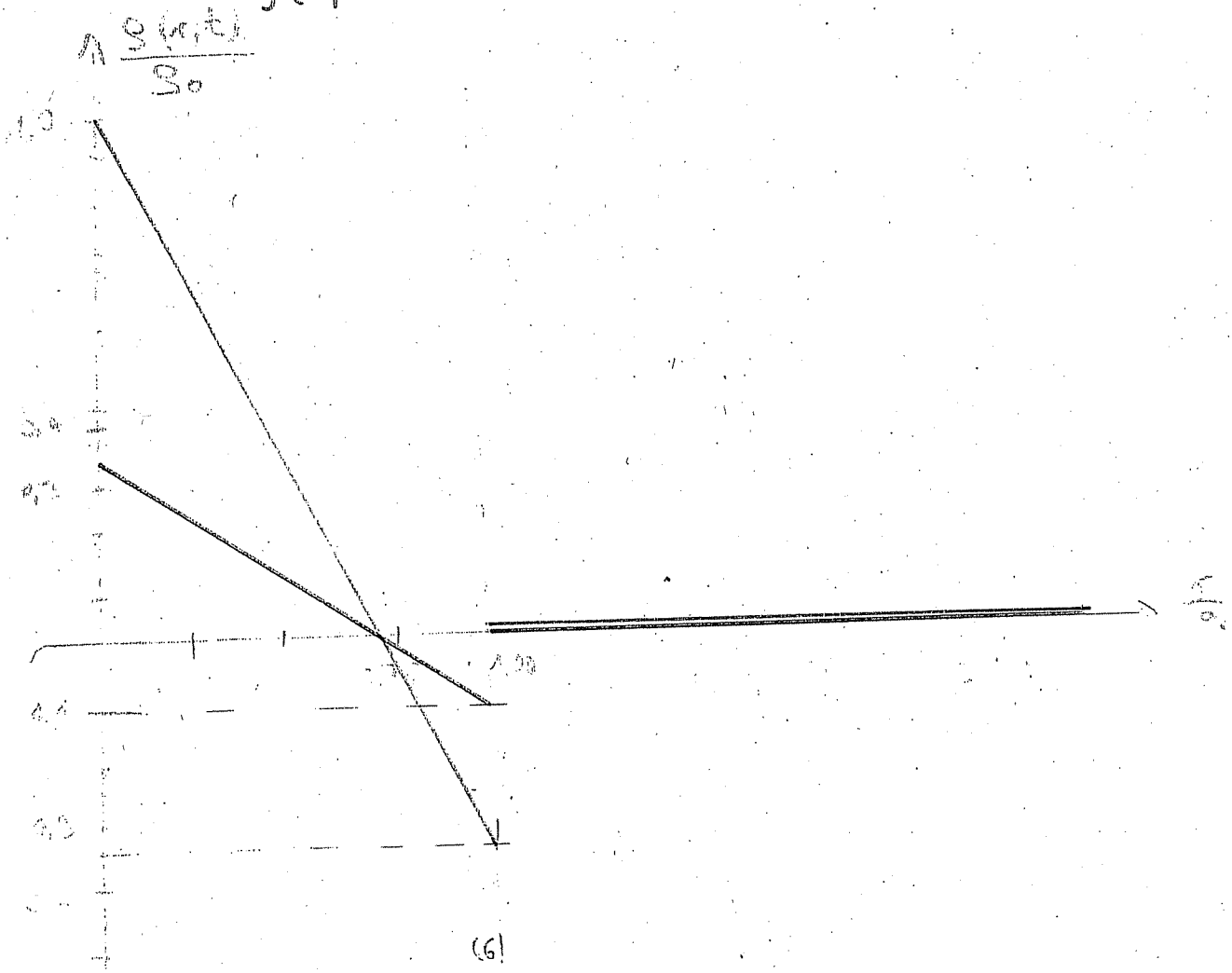
$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{D} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\varrho$

$\dot{\varrho} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\varrho = 0$

Lsg.: $\varrho(r,t) = \varrho(r,0)\,e^{-t/\tau}$; $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$

$\Rightarrow \varrho(r,t) = \varrho_0\left(1 - \frac{4r}{3a}\right)e^{-t/\tau}$; $0 \le r \le a$ (5)

$\varrho(r,t) = 0$; $r > a$ (6)



b) $Q_a(t) = \int_{V_a} \varrho(r,t)\,dV \overset{(6)}{=} \int_{V_0} \varrho(r,t)\,dV$; V_0 = Kugel mit Radius a (8)

mit $dV = 4\pi r^2\,dr$

$\Rightarrow$ (5) einsetzt:

$$Q_2(t) = \dots \cdot 4\pi \int_0^{\dots} (r^2 - 3a) \dots$$

$$= 4\pi \rho_0 e^{-t/\tau} \int_0^a \left(r^2 - \frac{4r^3}{3a}\right) dr$$

$$= 4\pi \rho_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{3a}\right]_0^a \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_2(t) \equiv 0} \qquad (10)$$

c) $$\int_V \rho \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F}$$ (∂V: Oberfläche von V)

(↑ Gauß)

hier wegen Kugelsymmetrie: $\vec{D} = D_r(r,t)\,\vec{e}_r$

mit V = Kugelvolumen gilt: $d\vec{F} = dF\,\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int_V \rho \, dV = \oint_{\text{Kugelfläche}} D_r(r,t)\, dF = D_r(r,t) \oint dF = 4\pi r^2 D_r(r,t)$$

$$\Rightarrow D_r(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_V \rho \, dV$$

1) $V = V_1$ d.h. $r = r_1$ $(0 \le r_1 \le a)$:

$$\int_{V_1} \rho \, dV \overset{(5),(8)}{=} 4\pi \rho_0 e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} \left(1 - \frac{4r}{3a}\right) r^2 dr$$

$$= 4\pi \rho_0 e^{-t/\tau} \int_0^{r_1} \left(r^2 - \frac{4r^3}{3a}\right) dr$$

$$\overset{(9)}{=} 4\pi \rho_0 e^{-t/\tau} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{3a}\right]_0^{r_1}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \rho_0 \cancel{e^{t/\tau}} \left(r_1^3 - \frac{r_1^4}{a}\right) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow D_r(r_1,t) = \frac{1}{4\pi r_1^2} \int_{V_1} \rho \, dV = \frac{\rho_0}{3}\left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right) e^{-t/\tau} \qquad (11)$$

2) $V = V_2$ d.h. $r = r_2$ $(r_2 > a)$:

$$\int_{V_2} \rho \, dV = Q_2(t) \overset{(10)}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow D_r(r_2,t) = \frac{1}{4\pi r_2^2} \int_{V_2} \rho \, dV \equiv 0 \qquad (12)$$

3) $|\vec{D}| = 0 \rightarrow D_r = 0$, aus (15):

$D_r(r_1, t) = 0$ für $\boxed{r_1 = 0}$ und $\boxed{r_1 = a}$ (17)

4) $|\vec{D}|$! maximal $\Rightarrow |D_r|$! maximal

$\Rightarrow D_r \overset{!}{=}_{(15)} \text{maximal}$

$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \frac{\partial D_r}{\partial r_1} \overset{(15)}{=} \frac{\xi_0}{3}\left(1 - \frac{2r_1}{a}\right) e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow \boxed{r_1 = \frac{a}{2}}$ (18)

a) $\rho_{Joule} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^2}\vec{D}^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} D_r^2$ (10? 11?)

$\rho_{Joule}(r_1, t) \overset{(15)}{=} \frac{\sigma \xi_0^2}{9\varepsilon^2}\left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right)^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$; $0 \le r_1 \le a$ (20)

(21)

$\rho_{Joule}(r_2, t) \overset{(16)}{=} 0$; $r_2 \ge a$

$P_{Joule}(t) = \int_{V_\infty} \rho_{Joule}\, dV \overset{(21)}{=} \int \rho_{Joule}(r_1, t)\, dV$ (22)

$P_{Joule}(t) \overset{(8)(20)}{=} \frac{\sigma \xi_0^2}{9\varepsilon^2} e^{-2t/\tau} \cdot 4\pi \underbrace{\int_0^a \left(r_1 - \frac{r_1^2}{a}\right)^2 r_1^2\, dr_1}_{:= A}$ (23)

$A = \int_0^a \left(r_1^2 - \frac{r_1^3}{a}\right)^2 dr_1 = \int_0^a \left(r_1^4 - 2\frac{r_1^5}{a} + \frac{r_1^6}{a^2}\right) dr_1$

$A = \left[\frac{r_1^5}{5} - \frac{r_1^6}{3a} + \frac{r_1^7}{7a^2}\right]_0^a = \frac{1}{105}\left(21a^5 - 35\frac{a^6}{a} + 15\frac{a^7}{a^2}\right) = \frac{a^5}{105}$ (24)

$P_{Joule}(t) = \frac{4\pi\sigma\xi_0^2 a^5}{945\varepsilon^2} e^{-\frac{2t}{\tau}}$ (25)

$W_{Joule} = \int_0^\infty P_{Joule}(t)\, dt = \frac{4\pi\sigma\xi_0^2 a^5}{945\varepsilon^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-2t/\tau}\, dt}_{:= B}$ (26)

$B = -\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{\tau}{2} = \frac{\varepsilon}{2\sigma}$ (27)

$\Rightarrow \boxed{W_{Joule} = \frac{2\pi\xi_0^2 a^5}{945\varepsilon}}$ (28)

- A2 -
-1-

a) $\Delta_t \underline{g} + (k^2 + \gamma^2)\underline{g} = 0$ mit: $\underline{g} \sim e^{\mp \gamma z}$

btw. hier: $\underline{g} \sim e^{\mp j\beta_n z}$

d.h. $\underline{\gamma} = j\beta_n$

TEM: $k^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow k^2 = -\gamma^2 = -(j\beta_n)^2 = \beta_n^2$

$k_n^2 = \omega^2 \varepsilon_n \mu_n \Rightarrow \beta_n^2 = \omega^2 \varepsilon_n \mu_n \Rightarrow \beta_n = \omega \sqrt{\varepsilon_n \mu_n}$

b) $\underline{g}_{n+} = \underline{\psi} A_n e^{-j\beta_n z}$, $\underline{g}_{n+} = 0$; $\underline{g}_{n-} = \underline{\psi} B_n e^{j\beta_n z}$; $\underline{g}_{n-} = 0$

$z_{F_n} = \sqrt{\frac{\mu_n}{\varepsilon_n}}$

mit dem Hinweis zur Berechnung des elektr. Feldes nach

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \underline{g}_{n\pm} = 0 \rightarrow \left(\omega^2 \varepsilon_n \mu_n + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \underline{g}_{n\pm} = 0$

$\underline{\vec{E}}_{n+} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \underline{g}_{n+} \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \frac{-j\beta_n}{j\omega\varepsilon_n} A_n e^{-j\beta_n z}$

$= -\vec{e}_y \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_n \mu_n}}{\varepsilon_n} A_n e^{-j\beta_n z} = -\vec{e}_y \sqrt{\frac{\mu_n}{\varepsilon_n}} A_n e^{-j\beta_n z}$

$= -\vec{e}_y z_{F_n} A_n e^{-j\beta_n z}$

$\underline{\vec{E}}_{n-} = \vec{e}_y z_{F_n} B_n e^{j\beta_n z}$

$\underline{\vec{H}}_t = \pm \frac{1}{z_F} (\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}_t)$ mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$

$\underline{\vec{H}}_{n+} = + \frac{1}{z_F} \left(-\vec{e}_x \left(-A_n z_{F_n} \cdot e^{-j\beta_n z}\right)\right) = + A_n e^{-j\beta_n z} \vec{e}_x$

$\underline{\vec{H}}_{n-} = \frac{1}{z_{F_n}} \left(-\vec{e}_x \left(\beta_n z_{F_n} e^{j\beta_n z}\right)\right) = -\underline{B}_n e^{+j\beta_n z} \vec{e}_x$

c) $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ mit $\vec{n} \times \vec{H} = 0$ btw. E_{tan} stetig, H_{tan} stetig

$\underline{\underline{z = 0}}$ mit $z = d$.

a) $\underline{E}_2 = \underline{E}_{2+} + \underline{E}_{2-} = -\vec{e}_y \left(A_2 e^{-i\beta_2 z} + B_2 e^{i\beta_2 z} \right)$

$\underline{H}_2 = \underline{H}_{2+} + \underline{H}_{2-} = -\vec{e}_x \left(A_2 e^{-i\beta_2 z} - B_2 e^{i\beta_2 z} \right)$

b) $\vec{n} = \vec{e}_z$

$\underline{z=0}$:

$\vec{e}_z \times \underline{E}_1(z=0) = \vec{e}_z \times \underline{E}_2(z=0)$

$\vec{e}_z \times \underline{H}_1(z=0) = \vec{e}_z \times \underline{H}_2(z=0)$

$\underline{z=d}$:

$\vec{e}_z \times \underline{E}_2(z=d) = \vec{e}_z \times \underline{E}_3(z=d)$

$\vec{e}_z \times \underline{H}_2(z=d) = \vec{e}_z \times \underline{H}_3(z=d)$

+ restliche Bedingungen aus der Aufgabenstellung:

im Gebiet 1: keine rücklaufende Welle, d.h. $\underline{E}_{1-} = 0$; $\underline{H}_{1-} = 0$

" 3: " " " " , d.h. $\underline{E}_{3-} = 0$, $\underline{H}_{3-} = 0$

Ferner sei $z_{F_i} = z_i$ für $i \in \{1,2,3\}$

es gilt: $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$; $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$

$\underline{z=0}$:

$$\left.\begin{aligned} A_1 z_1 &= A_2 z_2 - B_2 z_2 \\ -A_1 &= -A_2 - B_2 \end{aligned}\right| \cdot z_2 \Big]+$$

$\underline{z=d}$:

$$\left.\begin{aligned} A_2 z_2 e^{-i\beta_2 d} - B_2 z_2 e^{i\beta_2 d} &= A_3 z_3 e^{-i\beta_3 d} \\ -A_2 e^{-i\beta_2 d} - B_2 e^{i\beta_2 d} &= -A_3 e^{-i\beta_3 d} \end{aligned}\right| \cdot z_3 \Big]+$$

$$A_2 (z_2 - z_1) = B_2 (z_2 + z_1)$$

$$A_2 (z_2 - z_3) e^{-i\beta_2 d} = B_2 (z_2 + z_3) e^{i\beta_2 d} \quad \Big] :$$

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \cdot e^{i\beta_2 d} = \frac{z_2 + z_1}{z_2 + z_3} e^{-i\beta_2 d}$$

d.h. $e^{-j2\beta_2 d} = \frac{(z_2 - z_1)\cdot(z_2 + z_3)}{(z_2 - z_3)(z_2 + z_1)}$

mit $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}$ und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \Rightarrow z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$

$$\Rightarrow e^{-j2\beta_2 d} = \frac{z_1 z_2 - z_2 z_3}{z_2 z_3 - z_1 z_2} = -1$$

Damit die obige Gleichung, deren rechte Seite reell ist, erfüllt sind, muß auch die linke Seite reell sein.

d.h. $e^{-j2\beta_2 d} = -1$

$$\Rightarrow 2\beta_2 d = (2n+1)\pi \Leftrightarrow d = \frac{2n+1}{2}\pi \frac{1}{\beta_2} = \frac{2n+1}{4}\lambda_2$$

mit: $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \beta_2$

EMT 1 FÖ4 — Aufgabe 3

a) Helmholtz-Gleichung: $\Delta \underline{f} + k^2 \underline{f} = 0 \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \cdot \varepsilon$

b) Separation in kartesischen Koordinaten

Produktansatz: $\underline{f} = f_x(x) f_y(y) \cdot e^{-j\beta z}$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$f_x''(x) \cdot f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} + f_x(x) f_y''(y) \cdot e^{-j\beta z} - \beta^2 f_x(x) f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} + k^2 f_x(x) \cdot f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} = 0$$

Multiplikation mit $\frac{1}{e^{-j\beta z} \cdot f_x(x) f_y(y)}$

$$\underbrace{\frac{1}{f_x(x)} \cdot \frac{\partial^2 f_x(x)}{\partial x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{f_y(y)} \cdot \frac{\partial^2 f_y(y)}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + (k^2 - \beta^2) = 0$$

Es ergeben sich 2 gewöhnliche Differentialgleichungen mit folgenden Elementarlösungen:

$$f_x''(x) + k_x^2 f_x(x) = 0 \Rightarrow f_x(x) = A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \quad (k_x \neq$$

$$f_y''(y) + k_y^2 f_y(y) = 0 \Rightarrow f_y(y) = C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y) \quad (k_y \neq$$

$$\Rightarrow \underline{f}(x,y,z) = \left(A \cdot \cos(k_x x) + B \cdot \sin(k_x x)\right) \cdot \left(C \cdot \cos(k_y y) + D \cdot \sin(k_y y)\right) e^{-j\beta z}$$

Separationsbedingung: $-k_x^2 - k_y^2 + k^2 - \beta^2 = 0$

$$\beta^2 = -k_x^2 - k_y^2 + k^2$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu_0 - k_x^2 - k_y^2}$$

c)

$$\vec{E} = -\nabla \underline{f} \times \vec{e_z} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \\ \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{vmatrix} \cdot \underline{f} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial x} \cdot \vec{e_y} - \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} \cdot \vec{e_x}$$

Randbedingung bei $G_4 (y=0)$:

$\underline{E}_{tan} = 0$ bzw. $\frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = 0$ für alle x

oder

$\underline{E_x}|_{y=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{f}}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = k_y \left(-C \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot \cos(k_y \cdot y) \right)$$

für $y=0$ $\quad -C \cdot \underbrace{\sin(k_y 0)}_{0} + D \underbrace{\cos(k_y \cdot 0)}_{1} \Rightarrow D = 0$

$$f_y = C \cdot \cos(k_y \cdot y)$$

d)

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \left(k^2 \cdot \underline{f} \cdot \vec{e_z} + \nabla \left(\frac{\partial \underline{f}}{\partial z} \right) \right) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial y \partial z} \\ (k^2 - \beta^2) \cdot \underline{f} \end{pmatrix}$$

Randbedingung für $G_2 (y=4)$:

$\underline{\vec{H}}_{tan}|_{y=4} = 0 \Rightarrow H_z = 0$, $H_x = 0 \Rightarrow \underline{f}|_{y=4} = 0$

Denn für H_z folgt: $\frac{1}{j\omega\mu_0} \left(k^2 \underline{f} + (-\beta^2) \cdot \underline{f} \right) \sim \underline{f} \Rightarrow f|_{y=4} = 0$,

Für H_x folgt: $\frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{1}{j\omega\mu_0} (-j\beta) \frac{\partial f_y}{\partial y}$ $f_y(y) \cdot e^{-j\beta z} = 0$

$\Rightarrow$ $f_y(y) = 0 = \cos(k_y \cdot y)$

für k_y folgt: $k_y y = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$ $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$$f_y = C \cos\left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2b} \cdot y\right)$$

e) Randbedingungen für $G_{T3}(x=0)$ und $G_{T1}(x=w)$:

$\vec{n} \times \vec{H}|_{x=0,\, x=w} = 0 \Rightarrow H_z = 0$, $H_x = 0$

aus Unterpunkt d) folgt für $H_z = 0 \Rightarrow \underline{E} = 0$

Für $G_{T3}(x=0)$ und $G_{T1}(x=w)$ folgt:

$\underline{E}|_{x=0} = 0$, $\underline{E}|_{x=w} = 0$

$\Rightarrow f_x(0) = 0$ und $\Rightarrow f_x(w) = 0$

$f_x(x) = A \cdot \cos(k_x x) + B \cdot \sin(k_x x)$

für $x = 0$ folgt $A = 0$ und für $x = w$ $\sin(k_x w) = 0$

$k_x w = l \cdot \pi$, $k_x = \frac{l\pi}{w}$ $l = 1, 2, 3$

$$f_x(x) = B \cdot \sin\left(\frac{l \cdot \pi}{w} \cdot x\right)$$

$\underline{E} = A' \sin\left(\frac{l\cdot\pi}{w} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta_{nl} z}$, $A' = B \cdot C$

f)

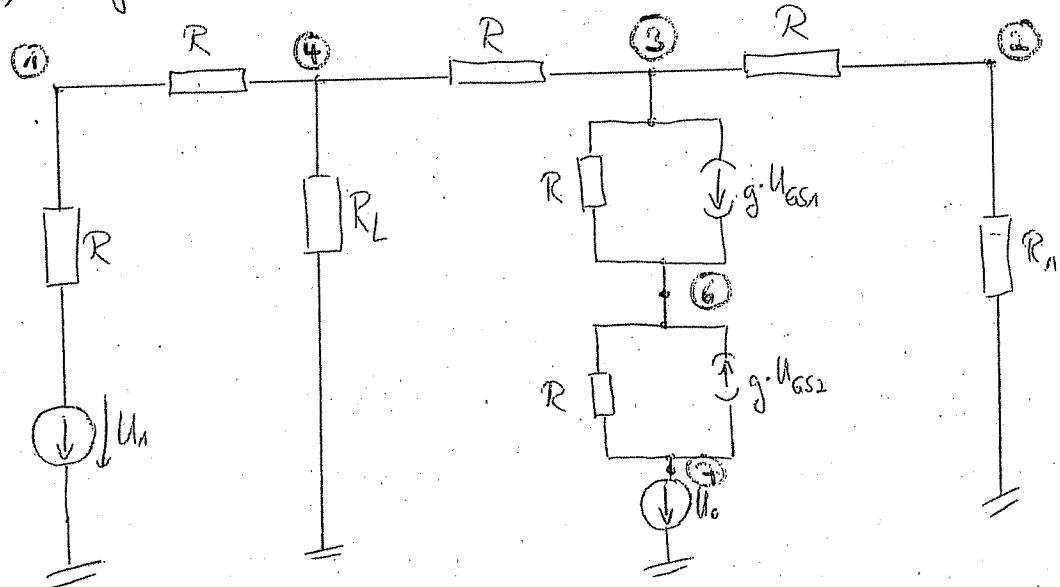
$$\beta_{nl} = \sqrt{\omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu_0 - \left(\frac{l\cdot\pi}{w}\right)^2 - \left(\frac{(2n+1)\cdot\pi}{2b}\right)^2}$$

$l = 1, 2, 3$

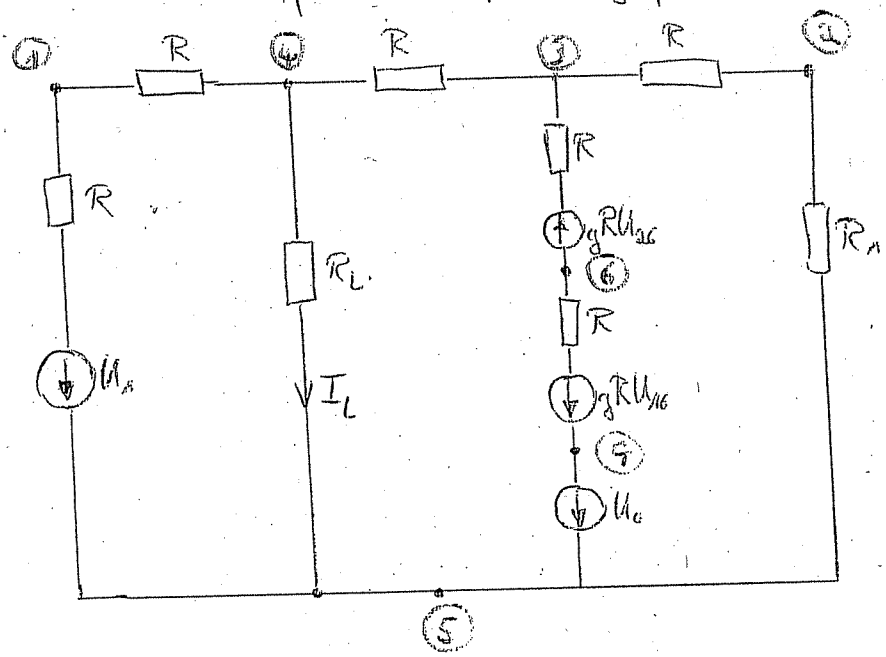
$n = 0, 1, 2, 3$

Aufgabe 4):

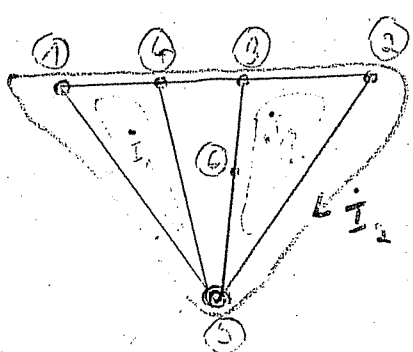
a) Einfügen der Transistor-ESB's:



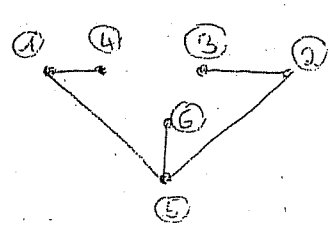
Mit $U_{GS1} = U_{26}$ und $U_{GS2} = U_{16}$ und der Verschiebung der Quelle U_6 entfällt der Knoten 7. Vorbereitung zur Anwendung des „Maschenimpedanz"verfahrens: Umwandlung der Stromquellen in Spannungsquellen.



b)



Baum:



Rang $\rightarrow$ $\rho = 5$

1. Bettische Zahl: $m = 3$

c) Maschenimpedanzmatrix mit abhängigen Urspannungen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_0 + gR(U_{16} - U_{26}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ 0 & R+R_1 & 3R+R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{\circ}{I}_1 \\ \underset{\circ}{I}_2 \\ \underset{\circ}{I}_3 \end{pmatrix}$$

mit $U_{16} - U_{26} = U_{12}$ folgt:

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{14} + U_{43} + U_{32} \\ &= R \cdot \underset{\circ}{I}_1 + R\underset{\circ}{I}_2 + R\underset{\circ}{I}_2 + R\underset{\circ}{I}_2 + R\underset{\circ}{I}_3 \\ &= R(\underset{\circ}{I}_1 + 3\underset{\circ}{I}_2 + \underset{\circ}{I}_3) \end{aligned}$$

Und mit unabhängigen Urspannungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_0 \end{pmatrix}}_{\underset{\circ}{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ -gR^2 & R+R_1-3gR^2 & 3R+R_1-gR^2 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \underset{\circ}{I}_1 \\ \underset{\circ}{I}_2 \\ \underset{\circ}{I}_3 \end{pmatrix}}_{\underset{\circ}{I}}$$

d) Jetzt mit $gR = 38$:

$$\underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}} = \begin{pmatrix} 2R+R_L & 2R & 0 \\ 2R & 4R+R_1 & R+R_1 \\ -38R & -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{pmatrix}$$

$$I_L = \underset{\circ}{I} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}}} \begin{vmatrix} U_1 & 2R & 0 \\ U_1 & 4R+R_1 & R+R_1 \\ U_0 & -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Nur $\det \underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}}$ hängt von R_L ab.

$\Rightarrow$ I_L ist unabhängig von R_L, für den Fall, das

$$\det \begin{pmatrix} 4R+R_1 & R+R_1 \\ -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow R_1 = \frac{1}{3}R$$

e) $\Rightarrow \det \underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}} = -2R \begin{pmatrix} 2R & R+R_1 \\ -38 & -35R+R_1 \end{pmatrix}$ (entwickelt nach 1. Zeile)

und mit $R_1 = \frac{1}{3}R$ folgt:

$$\det \underset{\sim}{\underset{\circ}{Z}} = -2R \begin{pmatrix} 2R & \frac{4}{3}R \\ -38R & -\frac{104}{3}R \end{pmatrix} = -2R\left(-\frac{208}{3}R^2 + \frac{152}{3}R^2\right) = \frac{2}{3}R^3 56$$

$$\begin{vmatrix} U_1 & 2R & 0 \\ U_1 & 4R+R_1 & R+R_1 \\ U_0 & -113R+R_1 & -35R+R_1 \end{vmatrix} = -2R \begin{vmatrix} U_1 & \frac{4}{3}R \\ U_0 & -\frac{104}{3}R \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(104U_1 + 4U_0)R^2$$

$$\Rightarrow I_L = \underset{\circ}{I}_1 = \frac{1}{56R}(104U_1 + 4U_0)$$

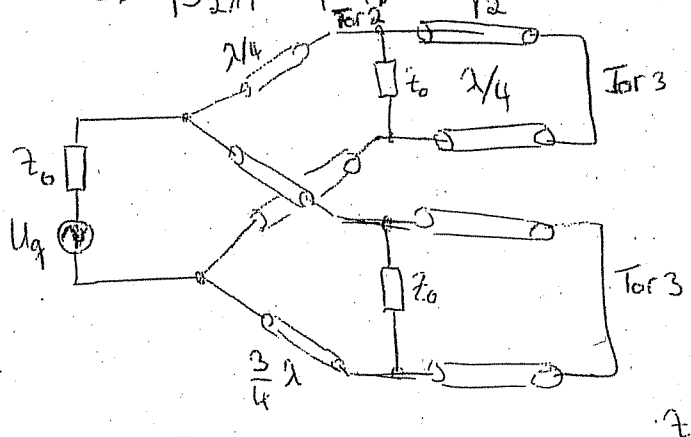
Aufgabe 5):

a) keine Leistungsabgabe am Tor 3 $\Rightarrow$ Tor 3 ist von Tor 1 isoliert.

* $S_{31} = 0$, Symmetrie $S_{24} = 0$ $\Rightarrow S_{13} = 0$, $S_{42} = 0$
* verlustlose 3dB Leistungsteiler $\rightarrow$ keine Reflexion am Eingang, d.h. $S_{11} = 0$, die Leistung wird halbiert:

$$\Rightarrow |S_{21}| = |S_{41}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

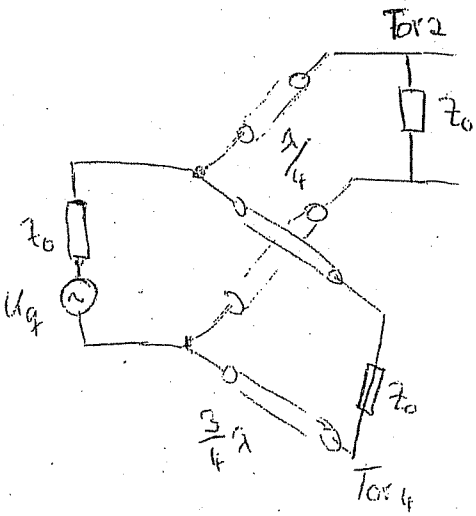


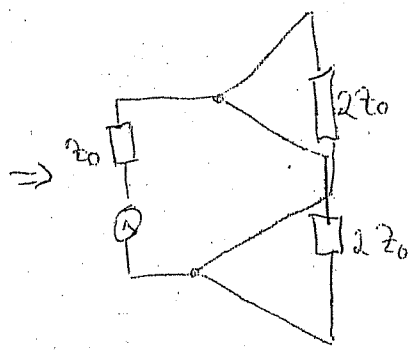
c) * Transf. über $\lambda/4$-Leitung $\Rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{Z_a}$, Kurzschluss $Z_a = 0$

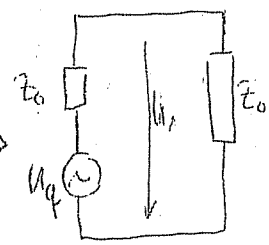
$\Rightarrow Z_e = \infty$, Leerlauf

* Transf. über $\frac{3}{4}\lambda$-Leitung $\Rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{Z_a}$ mit $Z_a = Z_0$

$\Rightarrow Z_e = 2Z_0$





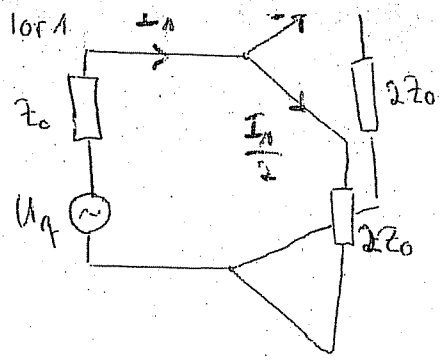


* Eingangsimpedanz an Tor 1: $2Z_0 \parallel 2Z_0 = Z_0$

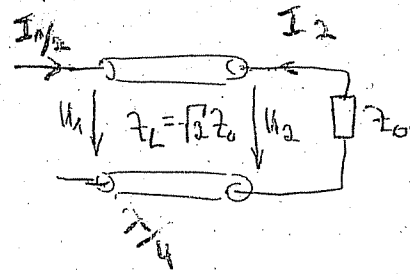
* $S_M = \left.\frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1}\right|_{\underline{a}_2 = \underline{a}_3 = \underline{a}_4 = 0} = \frac{\underline{U}_1 - Z_0 \cdot \underline{I}_1}{\underline{U}_1 + Z_0 \cdot \underline{I}_1}$; mit $\underline{U}_1 = Z_0 \cdot \underline{I}_1$

$$\Rightarrow \underline{S_M = 0}$$

d)



$\Rightarrow$



$$* \; S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2 = a_3 = a_4 = 0} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{I_2}{I_1}$$

mit $U_2 = -I_2 Z_0$

$$* \text{ für } l = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \cos \beta l = 0 \,, \; \sin \beta l = 1$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \frac{I_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & jZ_L \\ \frac{j}{Z_L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{I_1}{2} = j \frac{U_2}{\sqrt{2} Z_0}$$

$$= j \frac{-I_2}{\sqrt{2}}$$

$$* \; S_{21} = -\frac{I_2}{I_1} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

Analog zu S_2:

$$S_{41} = \frac{b_4}{a_1}\Big|_{a_2 = a_3 = a_4 = 0} = \frac{U_4 - Z_0 I_4}{U_1 + Z_0 I_1} = -\frac{I_4}{I_1}$$

$$* \; l = \frac{3}{4}\lambda \quad ; \cos \beta l = 0 \,, \; \sin \beta l = -1$$

$$* \; S_{41} = -\frac{I_4}{I_1} = \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 6):

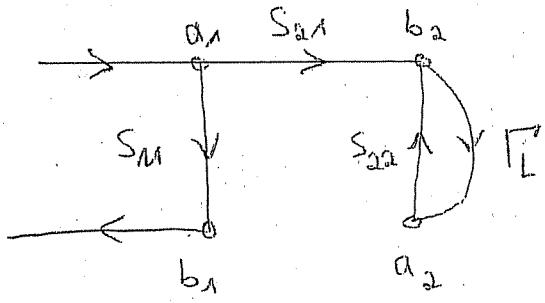
a) Weil es sich um einen unipolaren Transistor handelt ($S_{12}=0$). Andernfalls müssten Eingang und Ausgang gleichzeitig angepasst werden.

b) $l_s = 0{,}123\ \lambda$ → Da $l_p < \frac{\lambda}{4}$ gefordert ist, muss die Stichleitung
$l_p = 0{,}168\ \lambda$ leerlaufend sein.

Die Stichleitung könnte auch durch einen Kondensator mit der normierten Admittanz $y_c = j1{,}176$ ersetzt werden.

Skizze: s. Smith Chart

c) $P_{in} = \frac{1}{2}|a_1|^2 - \frac{1}{2}|b_1|^2 = \frac{1}{2}|a_1|^2 \cdot (1 - |S_M|^2)$, da $S_{12}=0$



$a_2 = \Gamma_L b_2$; $b_2 = S_{21} a_1 + S_{22}\Gamma_L b_2$

$b_2(1 - S_{22}\Gamma_L) = S_{21} a_1$

$b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22}\Gamma_L} a_1$

$P_{Last} = \frac{1}{2}|b_2|^2 - \frac{1}{2}|a_2|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - |\Gamma_L|^2\right) \cdot |b_2|^2$

$= \frac{1}{2}|S_{21}|^2 \cdot \frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_L S_{22}|} \cdot |a_1|^2$

$G_p = \frac{P_{Last}}{P_{in}} = \underbrace{\frac{1}{1 - |S_M|^2}}_{G_Q} \cdot \underbrace{|S_{21}|^2}_{G_0} \cdot \underbrace{\frac{1 - |\Gamma_L|^2}{|1 - \Gamma_L S_{22}|^2}}_{G_L}$

Bei Leistungsanpassung am Ausgang wird die Verstärkung $G_{p\,max}$, also ist:

$G_{L\,max} = \frac{1 - |S_{22}^*|^2}{|1 - S_{22}^* S_{22}|^2} = \frac{1 - |S_{22}|^2}{|1 - |S_{22}|^2|^2} = \frac{1 - |S_{22}|^2}{|1 - |S_{22}|^2|^2}$

$= \frac{1 - |S_{22}|^2}{(1 - |S_{22}|^2)^1} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$

d) s. SC

e) s. SC

f) Der Verstärker ist uneingeschränkt stabil. Hinr. Bed. für uneingeschränkte Stabilität des Transistors ist $|r_i| < 1 \wedge |r_a| < 1$.

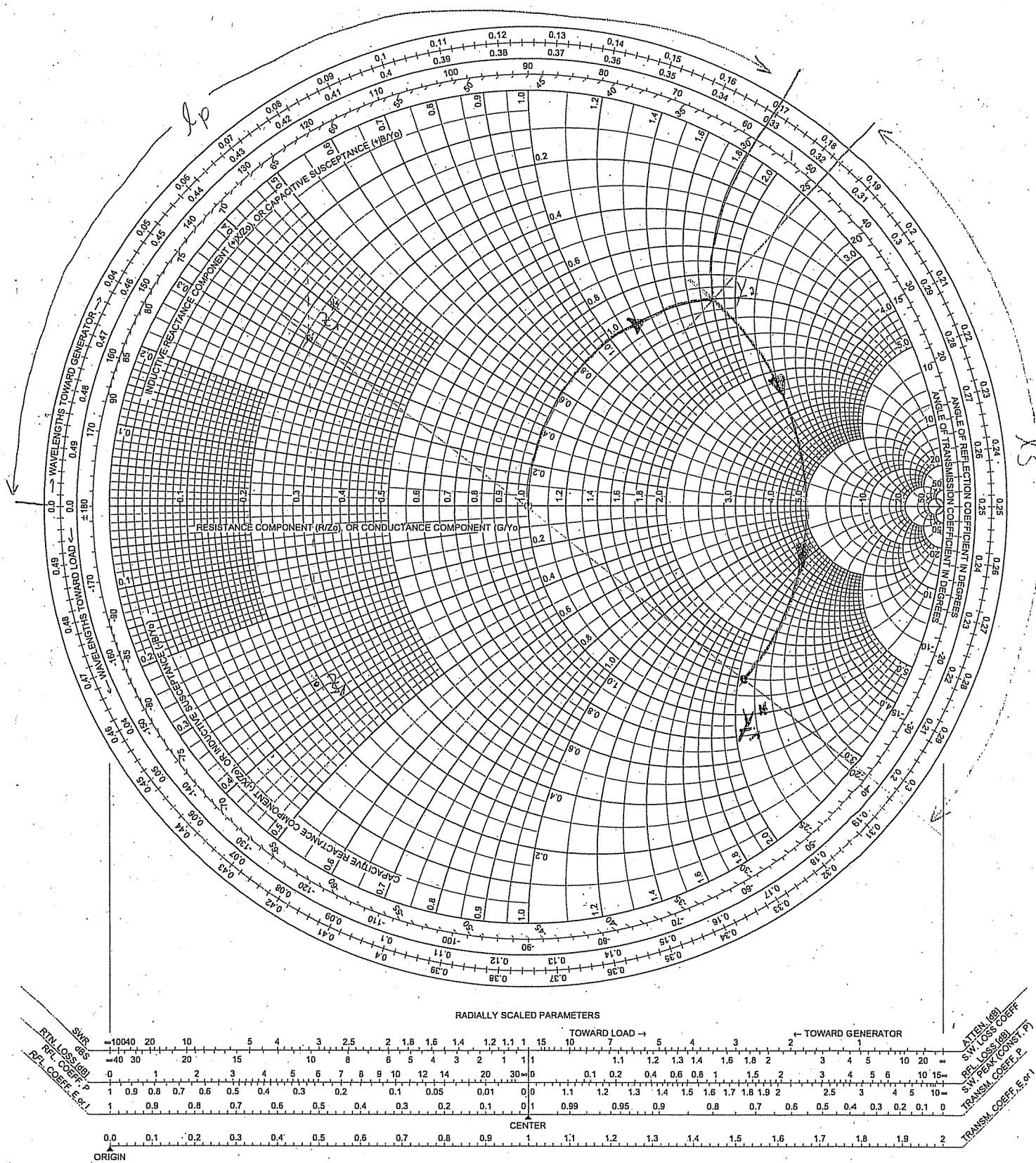
Hier: $|r_i| = |S_M| < 1$
$|r_a| = |S_{22}| < 1$

sind erfüllt laut Aufgabenstellung. Die Anpassungsnetzwerke sind rein passiv, daher können Eingangs- und Ausgangsreflektoren des kompl. Verstärkers nicht größer als $|r_i|$ bzw. $|r_a|$ sein!

FO4

Aula. 6: b)

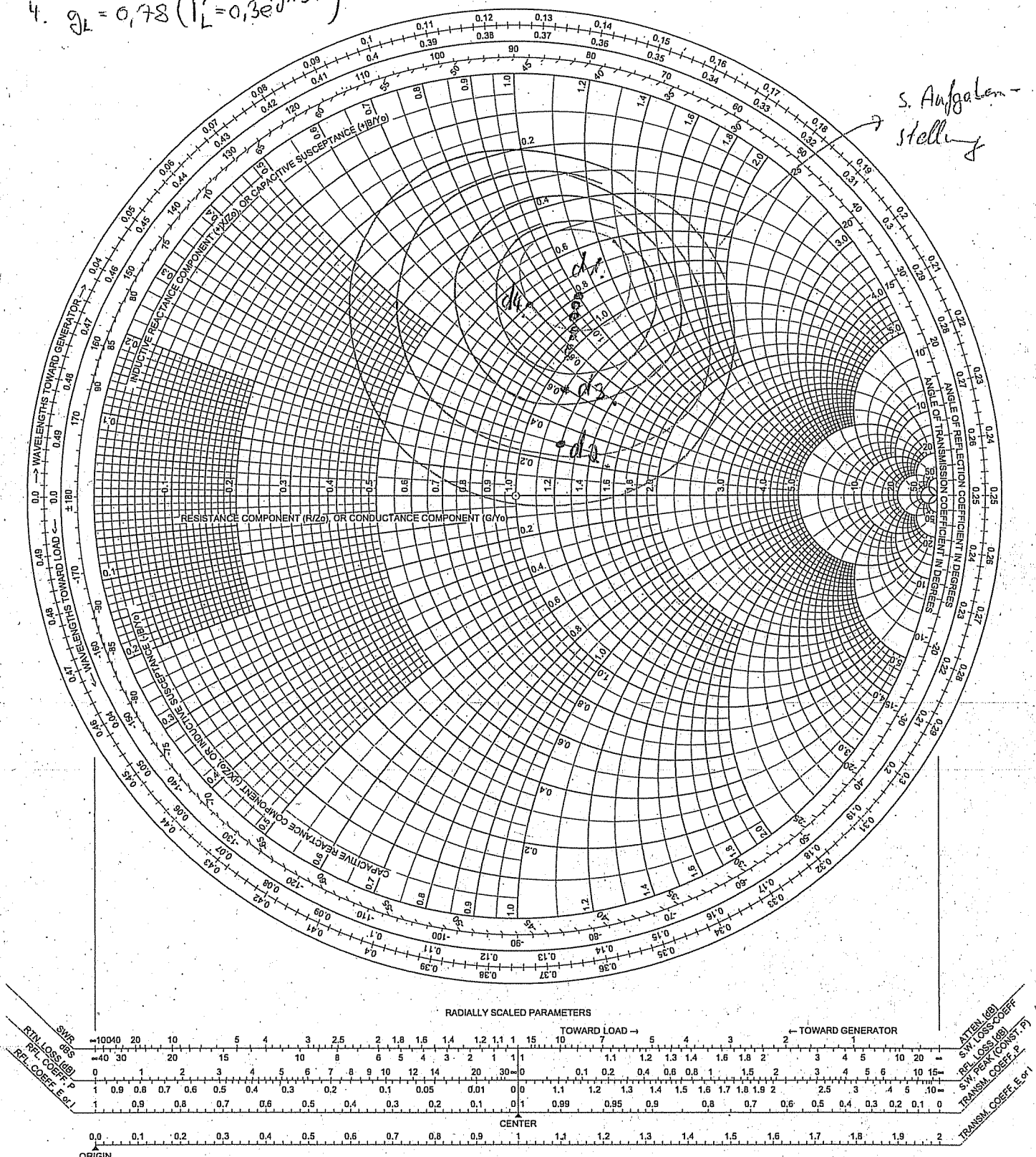
The Complete Smith Chart



Aufg. 6d):

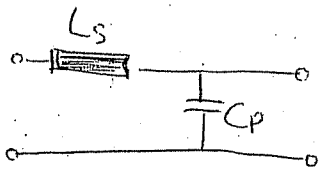
g_L wird im Smith Chart abgelesen

1. $g_L = 1$ da Leistungsanpassung
2. $g_L = 0{,}65 \left(z_L = 1 - j0{,}3\right)$
3. $g_L = 0{,}75$ (Kreis durch Ursprung)
4. $g_L = 0{,}78 \left(\Gamma_L = 0{,}3 e^{j134°}\right)$



Aufg. 6:

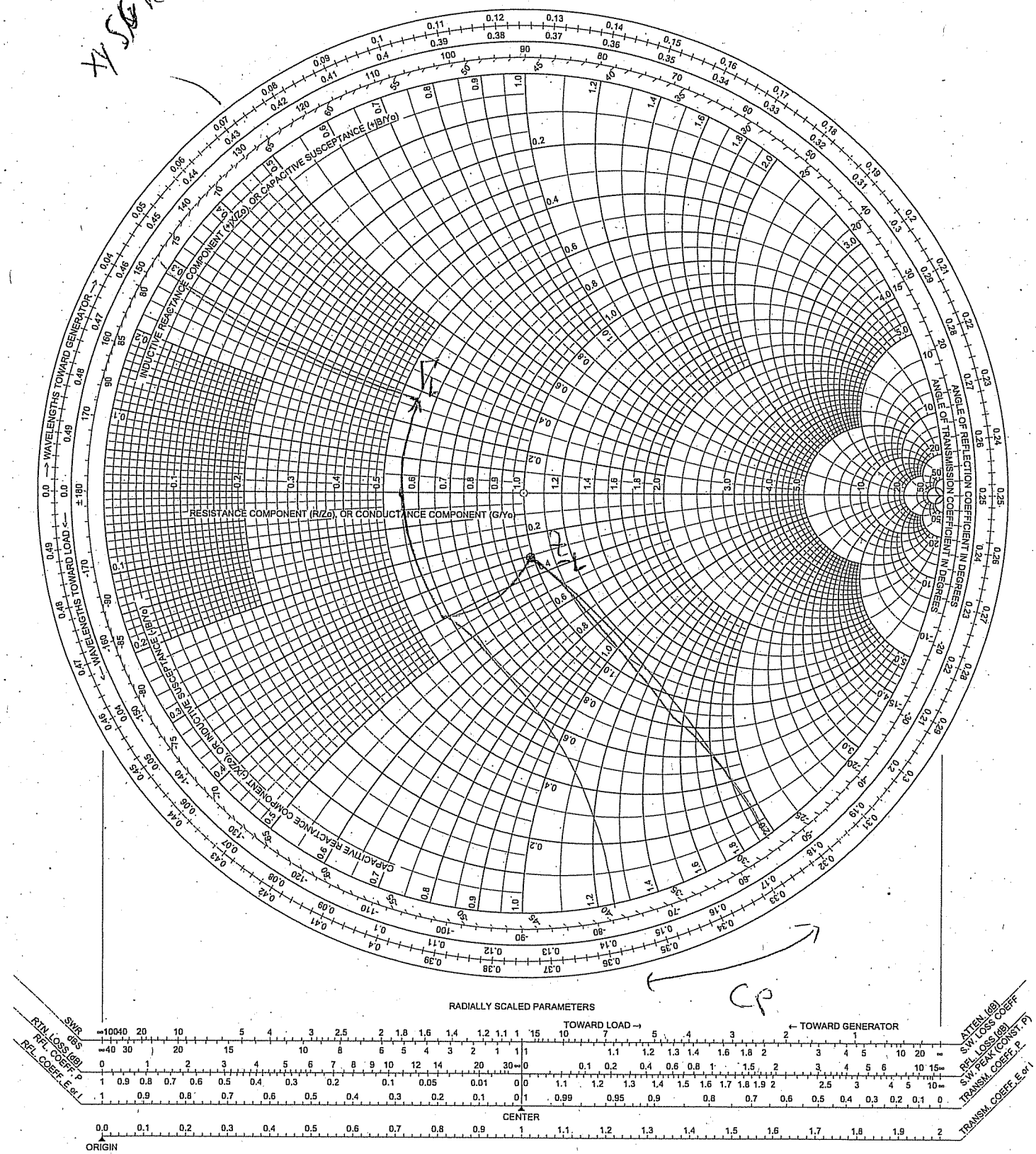
e) 1. Alternative



$\underline{z}_S = j\,0{,}83$

$y_P = j\,0{,}55$

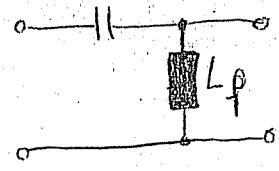
The Complete Smith Chart



C_P

Aufg. 6 e):

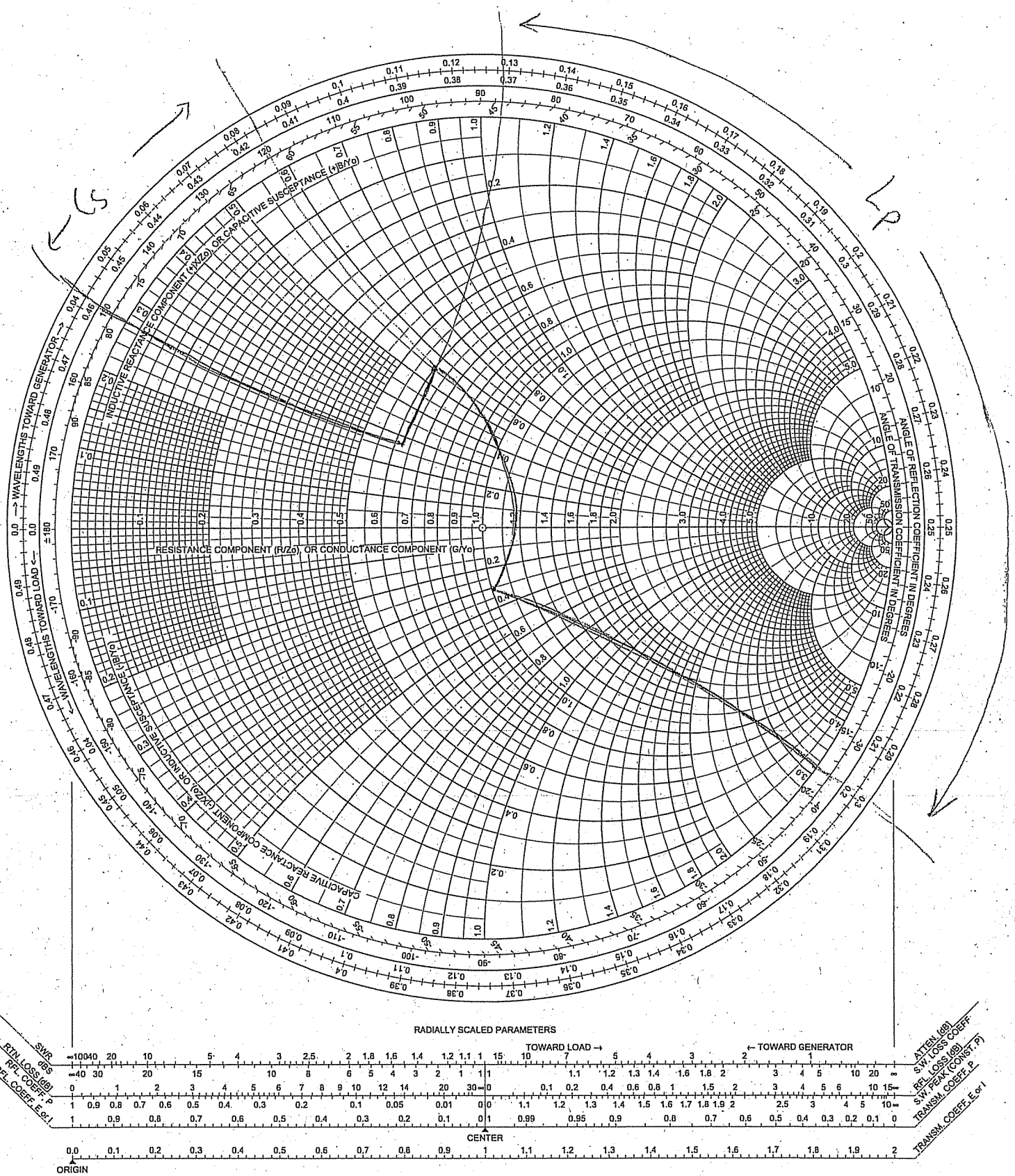
2. Alternative:



$z_s = -j0{,}26$

$y_p = -j1{,}1$

The Complete Smith Chart



$$\underline{\vec{E}}_e = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, e^{-j\vec{k}_e\vec{r}} \begin{pmatrix} -H_{e\parallel}\cos\varphi_1 \\ H_{e\perp} \\ -H_{e\parallel}\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} H_{e\perp}\cos\varphi_1 \\ H_{e\parallel} \\ H_{e\perp}\sin\varphi_1 \end{pmatrix} e^{-j\vec{k}_e\vec{r}}$$

$$\underline{\vec{E}}_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} \begin{pmatrix} H_{r\parallel}\cos\varphi_1 \\ H_{r\perp} \\ -H_{r\parallel}\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ -\cos\varphi_1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \begin{pmatrix} -H_{r\perp}\cos\varphi_1 \\ H_{r\parallel} \\ H_{r\perp}\sin\varphi_1 \end{pmatrix} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}}$$

$$\underline{\vec{E}}_d = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, e^{-j\vec{k}_d\vec{r}} \begin{pmatrix} -H_{d\parallel}\cos\varphi_2 \\ H_{d\perp} \\ -H_{d\parallel}\sin\varphi_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_2 \\ 0 \\ \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \begin{pmatrix} H_{d\perp}\cos\varphi_2 \\ H_{d\parallel} \\ H_{d\perp}\sin\varphi_2 \end{pmatrix} e^{-j\vec{k}_d\vec{r}}$$

b) $\vec{e}_z\left(\vec{J}_e + \vec{J}_r - \vec{J}_d\right) = 0 \qquad \vec{e}_z\left(\vec{\beta}_e + \vec{\beta}_r - \vec{\beta}_d\right) = 0$

$\vec{e}_z \times \left(\vec{H}_e + \vec{H}_r - \vec{H}_d\right) = 0 \qquad \vec{e}_z \times \left(\vec{E}_e + \vec{E}_r - \vec{E}_d\right) = 0$

c) Auf der Grenzfläche: Phasengleichheit, d. h. $e^{-j\vec{k}_e\vec{r}} = e^{-j\vec{k}_r\vec{r}} = e^{-j\vec{k}_d\vec{r}}$ $\forall x, y$ und $z = 0$

$$\vec{e}_z \times \sum_i \vec{H}_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + H_{d\parallel}\cos\varphi_2 \\ H_{e\perp} + H_{r\perp} - H_{d\perp} \\ -H_{e\parallel}\sin\varphi_1 - H_{r\parallel}\sin\varphi_1 + H_{d\parallel}\sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z \times \sum_i \vec{E}_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\cos\varphi_2 \\ \sqrt{\varepsilon_1} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\parallel} \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\sin\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\sin\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\sin\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I) $-\left(H_{e\perp} + H_{r\perp} - H_{d\perp}\right) = 0$

$-H_{e\parallel}\cos\varphi_1 + H_{r\parallel}\cos\varphi_1 + H_{d\parallel}\cos\varphi_2 = 0$

II) $-\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\parallel} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\parallel} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\parallel}\right) = 0$

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\cos\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} H_{d\perp}\cos\varphi_2 = 0$

I) $H_{r\perp} = H_{d\perp} - H_{e\perp}$

$H_{d\parallel} = \left(H_{e\parallel} - H_{r\parallel}\right)\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$

II) $H_{r\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} H_{d\parallel} - H_{e\parallel}$

$H_{d\perp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$

$$H_{r\perp} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{r\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} H_{e\perp}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - H_{e\perp}$$

$$H_{r\parallel} + H_{r\parallel}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} H_{e\parallel}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - H_{e\parallel}$$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1} \qquad \frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1}$$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2} \qquad \frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2}$$

mit dem Brechungsgesetz: $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$ bzw. $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1} = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi_2}$$

$$\frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} - 1}{\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} + 1} = \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2}$$

oder: ab Flt. von φ_1: $\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1}$

$$\frac{H_{r\perp}}{H_{e\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\varphi_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\varphi_1}} \quad / \quad \frac{H_{r\parallel}}{H_{e\parallel}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\varphi_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\varphi_1}}$$

d)

$H_{e\perp} \neq 0$, $H_{r\perp} = 0$ $\quad 0 = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2$

Brechungsgesetz: $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \iff \sin^2\varphi_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\varepsilon_2\cos^2\varphi_1 = \varepsilon_1\cos^2\varphi_2 = \varepsilon_1(1-\sin^2\varphi_2) = \varepsilon_1\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1\right)$

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\varphi_1 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos^2\varphi_1 = \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\cos^2\varphi_1 = \sin^2\varphi_1\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$

$\frac{\sin^2\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \iff \tan\varphi_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

$H_{e\parallel} \neq 0$, $H_{r\parallel} = 0$

$0 = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2 \iff \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_2$

$\cos^2\varphi_2 = 1 - \sin^2\varphi_2 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1$

$\varepsilon_1\cos^2\varphi_1 = \varepsilon_2\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1\right)$

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cos^2\varphi_1 = 1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\varphi_1 \iff \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\right) = 1$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

d.h. für $H_{e\parallel}$ tritt nur dann keine Reflexion ein, falls beide Medien den gleichen Brechungsindex besitzen.

ML -1-

$\underline{\vec{E}}_i(x,y,z) = \underbrace{\underline{f}_i(x,y)\, e^{-\gamma z}}_{\underline{f}_i(x,y,z)} \vec{e}_x$, $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$

Differentialgl. G1: $(\nabla^2 + k_1^2)\,\underline{\vec{E}}_1 = \vec{0}$ mit $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_1^2 + \gamma^2)\right) \underline{f}_1 = \underline{0}$$

G2: $(\nabla^2 + k_2^2)\,\underline{\vec{E}}_2 = \vec{0}$ mit $k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k_2^2 + \gamma^2)\right) \underline{f}_2 = \underline{0}$$

b] Produktansatz: $\underline{f}_1(x,y,z) = \underline{f}_{1x}(x)\,\underline{f}_{1y}(y)\,e^{-\gamma z}$

Einsetzen in Dgl: $\left(f_{1y}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{1x} + f_{1x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{1y} + (k_1^2+\gamma^2) f_{1x} f_{1y}\right) e^{-\gamma z} = 0$

Multiplikation mit $\frac{1}{f_{1x} f_{1y}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{f_{1x}}\frac{\partial^2 f_{1x}}{\partial x^2}}_{=:-k_{1x}^2} + \underbrace{\frac{1}{f_{1y}}\frac{\partial^2 f_{1y}}{\partial y^2}}_{=:-k_{1y}^2} + (k_1^2+\gamma^2) = 0$

allg. Lösung in G1:

$$\underline{f}_1(x,y,z) = \left(A_1 \cos(k_{1x}x) + B_1 \sin(k_{1x}x)\right)\left(C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

G2: Analog, jedoch als Funktion von $(a-x)$, damit die Randbedingung bei $x=a$ leichter zu erfüllen sind:

$$\underline{f}_2(x,y,z) = \left(A_2 \cos(k_{2x}(a-x)) + B_2 \sin(k_{2x}(a-x))\right)\left(C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y)\right) e^{-\gamma z}$$

Separationsbedingung in Fenster 2: $-k_{2x}^2 - k_y^2 + (k_2^2+\gamma^2) = 0$

Zusammenhang zwischen $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{f}$:

$$\underline{\vec{E}}_i = -\nabla \underline{f}_i \times \vec{e}_x = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial x} & \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y} & \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix} = -\left(\underbrace{\frac{\partial \underline{f}_i}{\partial z}}_{-\gamma \underline{f}} \vec{e}_y - \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y} \vec{e}_z\right)$$

$$= \gamma \underline{f}_i \vec{e}_y + \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y} \vec{e}_z$$

Randbedingung bei $y=0, a$: $\underline{\vec{E}}_{i,tan} = \underline{E}_{zi} \cdot \vec{e}_z \overset{!}{=} \vec{0}$ für alle x

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y}(y=0) = \frac{\partial \underline{f}_i}{\partial y}(y=b) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k_y\left(-C_i \underbrace{\sin(k_y \cdot 0)}_{=0} + D_i \underbrace{\cos(k_y \cdot 0)}_{=1}\right) = 0 \Rightarrow D_i = 0 \; ; \; i = 1,2$$

$\Rightarrow -k_y \cdot C_i \sin(k_y \cdot b) = 0$

$\Rightarrow \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) Randbedingung bei $x = 0$:

$\vec{0} = \vec{E}_{tan} = \vec{E}_y \cdot \vec{e}_y = \gamma \cdot f_1 \vec{e}_y \stackrel{!}{=} \vec{0}$ für alle y

$\Rightarrow A_1 \underbrace{\cos(k_{1x} \cdot 0)}_{=1} + B_1 \underbrace{\sin(k_{1x} \cdot 0)}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow A_1 = 0$

Randbedingung bei $x = a$:

$\vec{E}_{tan} = E_y \vec{e}_y = \gamma f_2 \vec{e}_y \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \forall y$

$\Rightarrow A_2 \cos(k_{2x}(a-a)) + B_2 \sin(k_{2x}(a-a)) = A_2 \cdot 1 + B_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

Außerdem: $E_z(x=0) = E_z(x=a) = 0$ liefert jeweils das gleiche Ergebnis:

$\Rightarrow$ Insgesamt:

$$f_1(x,y,z) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot \sin(k_{1x} x) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$f_2(x,y,z) = C_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot \sin(k_{2x}(a-x)) \cdot e^{-\gamma z}$$

d) Randbedingung an der dielektrischen Grenzfläche $x = d$:

$\forall y: \vec{E}_{t1}(x=d) = \vec{E}_{t2}(x=d) \Rightarrow E_{y1}(x=d) = E_{y2}(x=d)$ (I)

$E_{z1}(x=d) = E_{z2}(x=d)$ (II)

$\vec{H}_{t1}(x=d) = \vec{H}_{t2}(x=d) \Rightarrow H_{y1}(x=d) = H_{y2}(x=d)$ (III)

$H_{z1}(x=d) = H_{z2}(x=d)$ (IV)

Zusammenhang zwischen $\vec{H}_i$ und f_i:

$$\vec{H}_i = \frac{-1}{j\omega\mu}\left(k_i^2 f_i \vec{e}_x + \nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)\right) = \frac{-1}{j\omega\mu}\begin{pmatrix}\left(k_i^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f_i \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \\ -\gamma \frac{\partial f_i}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$x = d$; $\forall y$:

(I): $E_{yi} = \gamma f_i \sim f_i \Rightarrow \boxed{c_1 \sin(k_{1x} d) = c_2 \sin(k_{2x}(a-d))}$ (1)

(II): $E_{zi} = \frac{\partial f_i}{\partial y} \sim f_i \Rightarrow$ keine zusätzliche Information

(III): $H_{yi} = \frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \sim \frac{\partial f_i}{\partial x} \Rightarrow \boxed{c_1 k_{1x} \cos(k_{1x} d) = -c_2 k_{2x} \cos(k_{2x}(a-d))}$ (2)

(IV): $H_{zi} = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} \frac{\partial f_i}{\partial x} \sim \frac{\partial f_i}{\partial x} \Rightarrow$ keine zusätzliche Information

(2) durch (1) teilen: $\Rightarrow \boxed{k_{1x} \cot(k_{1x} d) = -k_{2x} \cot(k_{2x}(a-d))}$ (*)

Separationsbed.: $k_{1x}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 + \gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $k_{2x}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + \gamma^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

$\Rightarrow$ (*) ist eine Bestimmungsgl., die bei gegebener Kreisfrequenz ω als einzige Unbekannte γ enthält

A3

a) $\underline{\vec{E}} = \underline{E}(s, \varphi, z) \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$

Helmholtz: $\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0$ mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$

b) Separation im zylinder Koordinatensystem:

Produktansatz: $\underline{E}(s, \varphi, z) = \underline{E}_1(s)\, \underline{E}_2(\varphi)\, \underline{E}_3(z)$

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(s \frac{\partial \underline{E}}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} + k^2 \underline{E} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \underline{E}}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} + k^2 \underline{E} = 0$$

Einsetzen des Produktansatzes

$$\underline{E}_1'' \underline{E}_2 \underline{E}_3 + \frac{1}{s} \underline{E}_1' \underline{E}_2 \underline{E}_3 + \frac{1}{s^2} \underline{E}_1 \underline{E}_2'' \underline{E}_3 + \underline{E}_1 \underline{E}_2 \underline{E}_3'' + k^2 \underline{E}_1 \underline{E}_2 \underline{E}_3$$

$\cdot \frac{1}{\underline{E}_1 \underline{E}_2 \underline{E}_3}$

$$\Rightarrow \frac{\underline{E}_1''}{\underline{E}_1} + \frac{1}{s} \frac{\underline{E}_1'}{\underline{E}_1} + \frac{1}{s^2} \underbrace{\frac{\underline{E}_2''}{\underline{E}_2}}_{= -m^2} + \underbrace{\frac{\underline{E}_3''}{\underline{E}_3}}_{= -k_z^2} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(c)} \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_3}{\partial z^2} + k_z^2 \underline{E}_3 = 0$$

Elementarlösungen: $\underline{E}_3(z) = A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z)$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_2}{\partial \varphi^2} + m^2 \underline{E}_2 = 0$$

Elementarlösungen: $\underline{E}_2(\varphi) = C \cdot \cos(m\varphi) + D \sin(m\varphi)$

(ccc) $\frac{\partial^2 f_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial f_1}{\partial s} + \underbrace{\left(k^2 - k_z^2}_{k_s^2} - \frac{m^2}{s^2}\right) f_1 = 0$ (Besselsche Dgl. $m=-2$)

Elementarlösung: $f_3(s) = E J_m(k_s s) + F N_m(k_s s)$

Insgesamt:

$$f(s,\varphi,z) = \left(E J_m(k_s s) + F N_m(k_s s)\right) \cdot \left(C\cos(m\varphi) + D\sin(m\varphi)\right) \left(A\cos(k_z z) + B\sin(k_z z)\right)$$

mit $k_s^2 = k^2 - k_z^2$

c) Zusammenhang zwischen Potentialfkt. und el. Feld:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(k^2 f\, \vec{e}_z + D\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial z}\vec{e}_s + \frac{1}{s}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\,\partial z}\vec{e}_\varphi + \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f\,\vec{e}_z\right)$$

RB bei $z=0$:

$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_s = E_\varphi = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow k_z\left(-A\cdot \underbrace{\sin(k_z 0)}_{0}\right) + B\underbrace{\cos(k_z\cdot 0)}_{=1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B=0}}$

RB bei $z=h$:

$\vec{E}_{norm} = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow f = 0$

$\Rightarrow \cos(k_z h) = 0 \Rightarrow k_z h = \frac{u\pi}{2}$ $u = 1,3,5$

$k_z = \frac{u\pi}{2h}$ $u = 1,3,5\ldots$

Ψ muß nicht-singulär bleiben

$N_m(k_s s)$ weist aber eine Singularität bei $s \to 0$ auf $\Rightarrow$ $\underline{\underline{F=0}}$

RB bei $s=R$:

$\underline{\vec{E}}_{norm} = \vec{0} \Rightarrow E_s = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial J_m(k_s R)}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J_m(k_s R)}{\partial (k_s R)} = 0$

$\Rightarrow k_s = \frac{x'_{mn}}{R}$, wobei x'_{mn} die n-te Nullstelle von $J_m' = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}$ ist.

Insgesamt:

$$\Psi(s, \varphi, z) = J_m\left(x'_{mn} \frac{s}{R}\right)\left(C\cos(m\varphi) + D\sin(m\varphi)\right) \cdot \cos\left(n \frac{\pi}{2R} \cdot z\right)$$

$n = 1, 3, 5$

d) Separationsbedingung: x'_{me} = e-te Nullstelle von J_m'

$$k^2 = k_s^2 + k_z^2 = \left(\frac{x'_{me}}{R}\right)^2 + \left(n \cdot \frac{\pi}{2R}\right)^2 : k_{mn}$$

Blick in den Verlauf der Besselfkt.:

$\Rightarrow J_1'$ weist die kleinste 1. Nullstelle auf:

$\chi'_{11} = 1,84$

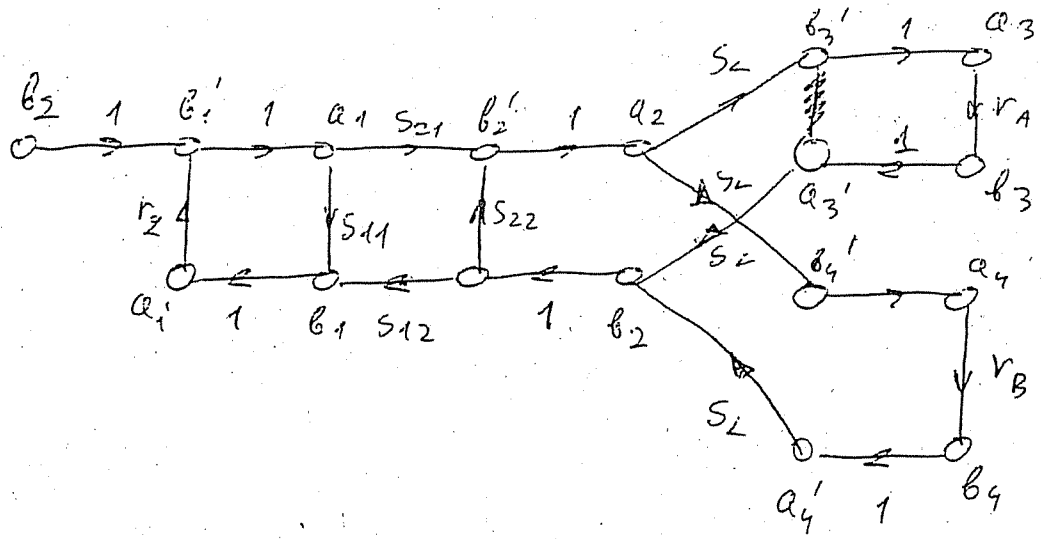
Kleinste mögliche Axialordnung: $u = 1$

Resonanzwellenzahl der TM^z_{111} – Eigenschwingung ($m = 1$, $u = 1$, 1. Radialordnung):

$$k_{111} = \sqrt{\left(\frac{\chi'_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2} \qquad \chi'_{11} = 1,84$$

A4 H03

a) Man strebt $|\underline{S}_{12}| \ll 1$ (keine Rückwirkung) und $|\underline{S}_{21}| \gg 1$ (Verstärkung) an.



mit $\underline{S}_L = \frac{\dot{=}}{\sqrt{2}}$ und $\underline{a}_i, \underline{b}_i$ = hin- und rücklaufende Wellen im BE$_i$ bzgl. des quellseitigen Bauelements sowie $\underline{a}_i, \underline{b}_i$ = hin- und rücklaufende Wellen im BE$_i$ bzgl. des lastseitigen Bauelements

c)

$$\underline{a}_3 = \frac{1}{2}\frac{\underline{U}_3}{\sqrt{Z_0}} + \frac{1}{2}\sqrt{Z_0}\,\underline{I}_3$$

$$\underline{b}_3 = \frac{1}{2}\frac{\underline{U}_3}{\sqrt{Z_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{Z_0}\,\underline{I}_3$$

$$\underline{r}_A = \frac{\underline{b}_3}{\underline{a}_3} = \frac{\underline{U}_3 - Z_0\underline{I}_3}{\underline{U}_3 + Z_0\underline{I}_3} = \frac{\underline{Z}_4 - Z_0}{\underline{Z}_4 + Z_0}$$

mit $\underline{U}_3 = \underline{Z}_4\underline{I}_3$ Analog $\underline{r}_B = \frac{\underline{Z}_B - Z_0}{\underline{Z}_B + Z_0}$

Aus Signalflussdiagramm ablesen: $\underline{b}_2 = (\underline{S}_L^2\underline{r}_A + \underline{S}_L^2\underline{r}_B)\underline{a}$

$$\underline{r}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 (\underline{r}_A + \underline{r}_B) = -\frac{1}{2}(\underline{r}_A + \underline{r}_B)$$

Aus Signalflussdiagramm ablesen mit Schleifenregel:

$$\underline{r}_1 = \underline{S}_{11} + \frac{\underline{S}_{12}\underline{S}_{21}\underline{r}_2}{1 - \underline{S}_{22}\underline{r}_2} = \underline{S}_{11} - \frac{\underline{S}_{12}\underline{S}_{21}(\underline{r}_A + \underline{r}_B)}{2 + \underline{S}_{22}(\underline{r}_A + \underline{r}_B)}$$

d) Die geforderten Bedingungen sind Leistungsanpassung in BE1 und BE2, Also ist

$$\underline{S}_{11} = \underline{r}_2^*$$

und $$\underline{S}_{22} = \underline{r}_2^* = -\frac{1}{2}(\underline{r}_A^* + \underline{r}_B^*)$$

Entweder aus Signalflussdiagramm ablesen:

$$\underline{a}_2 = \underline{S}_{21}\underline{a}_1 + \underline{S}_{22}\underline{b}_2$$

$$\underline{a}_2(1 - \underline{S}_{22}\underline{r}_2) = \underline{S}_{21}\underline{a}_1$$

$$\underline{a}_2 = \underline{a}_1 \frac{\underline{S}_{21}}{1 - |\underline{r}_2|^2}$$

ODER Formel kennen

$$G_{TU,max} = \frac{|\underline{S}_{21}|^2}{(1 - |\underline{S}_{11}|^2)(1 - |\underline{S}_{22}|^2)} \overset{!}{=} 2$$

$$|\underline{S}_{21}|^2 = 2(1 - |\underline{S}_{11}|^2)(1 - |\underline{S}_{22}|^2)$$

$$|\underline{S}_{21}| = \sqrt{2(1 - |\underline{S}_{11}|^2)(1 - |\underline{S}_{22}|^2)}$$

Leistung in BE1:

$$P_1 = \frac{1}{2}(|\underline{a}_1|^2 - |\underline{b}_1|^2) = \frac{1}{2}|\underline{a}_1|^2 \cdot (1 - |\underline{r}_1|^2)$$

Analog Leistung in BE2

$$P_2 = \frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2 (1 - |\underline{r}_2|^2)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{|\underline{a}_2|^2 (1-|\underline{r}_2|^2)}{|\underline{a}_1|^2 (1-|\underline{r}_1|^2)} \stackrel{!}{=} 2$$

$$2 = \frac{|\underline{a}_1|^2 \frac{|\underline{S}_{21}|^2}{(1-|\underline{r}_2|^2)^2} (1-|\underline{r}_2|^2)}{|\underline{a}_1|^2 (1-|\underline{r}_1|^2)}$$

$$2 = \frac{|\underline{S}_{21}|^2}{(1-|\underline{r}_1|^2)(1-|\underline{r}_2|^2)}$$

$$|\underline{S}_{21}| = \sqrt{2 (1-|\underline{r}_1|^2)(1-|\underline{r}_2|^2)}$$

$$|\underline{S}_{21}| = \sqrt{2 (1-|\underline{r}_2|^2)\left(1-\frac{1}{4}|\underline{r}_A+\underline{r}_B|^2\right)}$$

Leistung in BE1: $P_1 = P_{2,verf} = \frac{1}{2}|\underline{b}_2|^2 \frac{1}{1-|\underline{r}_2|^2}$

wegen Leistungsanpassung.

Leistung in BE2: $P_2 = \frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2 (1-|\underline{r}_2|^2) = 2P_1$

$$|\underline{b}_2|^2 \frac{1}{1-|\underline{r}_2|^2} = \frac{1}{2}|\underline{a}_2|^2 (1-|\underline{r}_2|^2)$$

$$|\underline{a}_2|^2 = 2|\underline{b}_2|^2 \frac{1}{(1-|\underline{r}_2|^2)(1-|\underline{r}_2|^2)}$$

Leistung im D=>1:

$$P_A = \frac{1}{2}|\underline{a}_3|^2(1-|\underline{r}_A|^2)$$

$$= \frac{1}{2}|\underline{S}_{21}|^2|\underline{a}_2|^2(1-|\underline{r}_A|^2)$$

$$= \frac{1}{4}|\underline{a}_2|^2(1-|\underline{r}_A|^2)$$

$$= \frac{1}{2}|\underline{b}_2|^2\frac{1-|\underline{r}_A|^2}{(1-|\underline{r}_2|^2)(1-|\underline{r}_A|^2)}$$

$$= \frac{1}{2}|\underline{b}_2|^2\frac{1-|\underline{r}_A|^2}{(1-|\underline{r}_2|^2)(1-\frac{1}{4}|\underline{r}_A+\underline{r}_B|^2)}$$

e) Der Verstärker ist uneingeschränkt stabil.

Hinreichende Bedingung für uneingeschränkte Stabilität ist:

$$|\underline{r}_i|<1 \quad \wedge \quad |\underline{r}_a|<1$$

Hier:

$$|\underline{r}_i| = |\underline{S}_{11}| = |\underline{r}_2|<1$$

ist erfüllt laut Aufgabenstellung sowie

$$|\underline{r}_a| = |\underline{S}_{22}| = \frac{1}{2}|\underline{r}_A+\underline{r}_B|<1$$

da $|\underline{r}_A|<1$ und $|\underline{r}_B|<1$ (passive Belastung laut Aufgabenstellung)

HO3 A5

a) Reziprozität: $\underline{S} = \underline{S}^T \Rightarrow \underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$, $\underline{S}_{13} = \underline{S}_{31}$, $\underline{S}_{14} = \underline{S}_{41}$

$\underline{S}_{32} = \underline{S}_{23}$, $\underline{S}_{42} = \underline{S}_{24}$, $\underline{S}_{43} = \underline{S}_{34}$

Symmetrie: $\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = \underline{S}_{33} = \underline{S}_{44}$ und $\underline{S}_{23} = \underline{S}_{14}$

$\underline{S}_{24} = \underline{S}_{13}$, $\underline{S}_{34} = \underline{S}_{12}$

b) Aus

$\underline{S}_{11} = 1 - \frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} + \underline{D})$ $\quad \underline{A} = \dfrac{1}{1 - j Z_{LE} \cot\left(\frac{\varphi_E}{2}\right)}$

$\underline{S}_{21} = -\frac{1}{2}(\underline{A} + \underline{B} - \underline{C} - \underline{D})$ mit $\quad \underline{B} = \dfrac{1}{1 + j Z_{LE} \tan\left(\frac{\varphi_E}{2}\right)}$

$\underline{S}_{31} = -\frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{B} - \underline{C} + \underline{D})$ $\quad \underline{C} = \dfrac{1}{1 - j Z_{LO} \cot\left(\frac{\varphi_O}{2}\right)}$

$\underline{S}_{41} = -\frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{B} + \underline{C} - \underline{D})$ $\quad \underline{D} = \dfrac{1}{1 + j Z_{LO} \tan\left(\frac{\varphi_O}{2}\right)}$

und $Z_{LE} = \dfrac{\underline{Z}_{LE}}{Z_L}$ $\quad Z_{LO} = \dfrac{\underline{Z}_{LO}}{Z_L}$

folgt: $\underline{S}_{11} = 1 - \left(\dfrac{1}{1 + Z_{LE}^2} + \dfrac{1}{1 + Z_{LO}^2}\right)$

Annahmen: $\varphi_E = \varphi_O \Rightarrow \beta_E L = \beta_O L \Rightarrow \dfrac{2\pi f \sqrt{\varepsilon_{eff\,E}}}{c_0} L = \dfrac{2\pi f \sqrt{\varepsilon_{eff\,O}}}{c_0}$

$\Rightarrow \varepsilon_{eff\,E} = \varepsilon_{eff\,O}$

Reflexionsfreier Abschluss an allen Toren: $S_{11} = 0$

$$1 = \frac{1}{1+Z_{LE}^2} + \frac{1}{1+Z_{LO}^2} = \frac{2 + Z_{LE}^2 + Z_{LO}^2}{(1+Z_{LE}^2)(1+Z_{LO}^2)}$$

$$\Rightarrow (1+Z_{LE}^2)(1+Z_{LO}^2) = 2 + Z_{LE}^2 + Z_{LO}^2$$

$$\Rightarrow 1 + Z_{LE}^2 + Z_{LO}^2 + Z_{LE}^2 Z_{LO}^2 = 2 + Z_{LE}^2 + Z_{LO}^2$$

$$\Rightarrow Z_{LE}^2 Z_{LO}^2 = 1 \qquad Z_L = \sqrt{Z_{LE} Z_{LO}}$$

S_{21}, S_{31} und S_{41} lassen sich dann vereinfachen zu:

$$S_{21} = \frac{Z_{LE} - Z_{LO}}{Z_{LE} + Z_{LO}} = \rho \qquad S_{31} = 0 \qquad S_{41} = -j\frac{2}{Z_{LE}+Z_{LO}} = q$$

S-Parametermatrix $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & q \\ \rho & 0 & \rho & 0 \\ 0 & q & 0 & \rho \\ q & 0 & \rho & 0 \end{pmatrix}$

c) Für den ungekoppelten Leitungsabschnitt gilt:

$Z_{LE} = Z_{LO} \Rightarrow \rho = 0$ und $q = -j \Rightarrow$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ -j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Ausschreiben des Gleichungssystems $\vec{b} = S_1 \vec{a}$ wobei nur die von 0 verschiedenen Terme Berücksichtigt werden

$b_1 = p a_2 + q a_4$

$b_2 = p a_1 + q a_3$

$b_3 = q a_2 + p a_4$

$b_4 = q a_1 + p a_4$

und umordnen der Gleichungen nach den Vektoren $\vec{b}'^T = (a_1, b_1, a_4, b_4$

und $\vec{a}'^T = (b_2, a_2, b_3, a_3)$ führt zur Wellenzettenmatrix $T_1, \vec{b}' = T_1 \vec{a}'$, mit

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & -\frac{q}{p} \\ 0 & (p - \frac{q^2}{p}) & \frac{q}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{q}{p} & \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{q}{p} & 0 & 0 & (p - \frac{q^2}{p}) \end{pmatrix}$$ oder vereinfacht

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & -\frac{q}{p} \\ 0 & \frac{1}{p} & \frac{q}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{q}{p} & \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{q}{p} & 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ q & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Ausschreiben des Gleichungssystems $\vec{b} = S \vec{a}$ wobei nur die von 0 verschiedenen Terme berücksichtigt werde

$b_1 = q_L \cdot a_4 \qquad b_2 = q_L \cdot a_3$

$b_3 = q_L \cdot a_2 \qquad b_4 = q_L \cdot a_1$

d) Ausschreiben des Gleichungssystems $\vec{b} = S_1 \vec{a}$ wobei nur die von 0 verschiedenen Terme Berücksichtigt werden

$$b_1 = p a_2 + q a_4$$
$$b_2 = p a_1 + q a_3$$
$$b_3 = q a_2 + p a_4$$
$$b_4 = q a_1 + p a_4$$

und umordnen der Gleichungen nach den Vektoren $\vec{b}'^T = (a_1, b_1, a_4, b_4)$ und $\vec{a}'^T = (b_2, a_2, b_3, a_3)$ führt zur Wellenkettenmatrix $T_1, \vec{b}' = T_1 \vec{a}'$, mit

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & -\frac{2}{p} \\ 0 & (p - \frac{2^2}{p}) & \frac{2}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{p} & \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{2}{p} & 0 & 0 & (p - \frac{2^2}{p}) \end{pmatrix}$$ oder vereinfacht

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & -\frac{2}{p} \\ 0 & \frac{1}{p} & \frac{2}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{p} & \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{2}{p} & 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Ausschreiben des Gleichungssystems $\vec{b} = S \vec{a}$ wobei nur die von 0 verschiedenen Terme berücksichtigt werde.

$$b_1 = 2L \cdot a_4 \qquad b_2 = 2L \cdot a_3$$
$$b_3 = 2L \cdot a_2 \qquad b_4 = 2L \cdot a_1$$

g) Transformation der Wellenkettenmatrix T_{ges} in die S-Parametermatrix S_{ges} durch umsortieren des Gleichungssystems nach den Vektoren $\vec{b}^T = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $\vec{a}^T = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Setze $k = j(1+\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} a_1 &= k\, b_2 \\ b_1 &= -k \cdot a_2 \\ a_4 &= k\, b_3 \\ b_4 &= -k \cdot a_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$S_{ges} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

h) Beschaltung des 4-Tors mit idealen Kurzschlüssen an den Toren 2 und 4

$a_2 = -b_2$ und $a_4 = -b_4$

$\Rightarrow b_1 = a_1$ und $b_3 = a_3$

$$S_{2T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

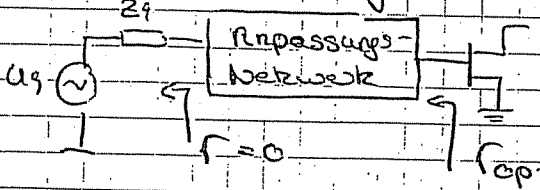
H03

A6

a) $S_{11} = S_{11}' e^{-j2\beta l_1}$ $\quad S_{12} = S_{12}' e^{-j\beta(l_1+l_2)}$

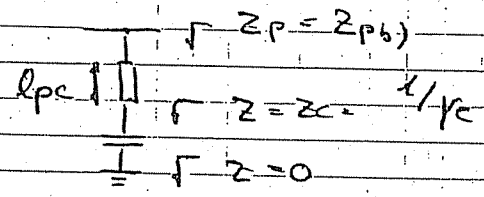
$S_{22} = S_{22}' e^{-j2\beta l_2}$ $\quad S_{21} = S_{21}' e^{-j\beta(l_1+l_2)}$

b) Rauschanpassung



* Γ_{opt} einzeichnen
* Anpassungsweg überlegen (Smith Chart)
* $l_s = 0{,}201\,\lambda$
* $l_p = 0{,}155\,\lambda$

c) z_p muß im Vergleich zu $\underline{z}_p$ im (unterpkt b) gleich sein.

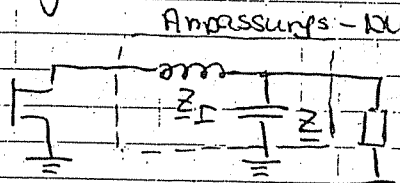


* y_p wie in b)
* Transf. $y_c \rightarrow y_p$ ($y_p = 1/z_p$) über die Leitung
* $l_{pl} = 0{,}056\,\lambda$ (Smith Chart)

d) * $\underline{S}_{22}^*$ im Smith Chart zeichnen

* Anpassung überlegen (nur eine kapazitiv möglich!)

* Topologie



* $\underline{y} = j0{,}66 \rightarrow \underline{z}_{II} = 1/\underline{y}_{II}$ } Smith Chart
* $\underline{z}_I = j1{,}52$

e) $F_0 = \cancel{F_{min}} + \frac{4 r_n}{|1 + \underline{r}_{opt}|^2} \cdot \frac{|\underline{s} - \underline{r}_{opt}|^2}{1 - \underbrace{|\underline{r}_s|^2}_{=0}}$

$= 1{,}226 + \frac{2}{3}(0{,}6)^2$

$= 1{,}226 + 0{,}24 = 1{,}466$

* Phasenlage d. Mittelpunktes

$\underline{C}_F = \frac{\underline{r}_{opt}}{1 + \Delta F_n}$ ΔF_n rein reell!

$\rightarrow \sphericalangle \underline{C}_F = \sphericalangle \underline{r}_{opt} = 85°$

* Radius $= 0{,}44$ → zeichne Mittelpkt (Smith Chart)

* Kreis mit $F = F_0$ zeichnen

* Leistungsanpassung $\underline{r}_s = S_{11}^*$ einzeichnen

* S_{11}^* liegt außerhalb vom Kreis mit $F_0 = 1{,}466$

→ Rauschzahl bei $\underline{r}_s = S_{11}^*$ ist größer als F_0

6 b,c,d

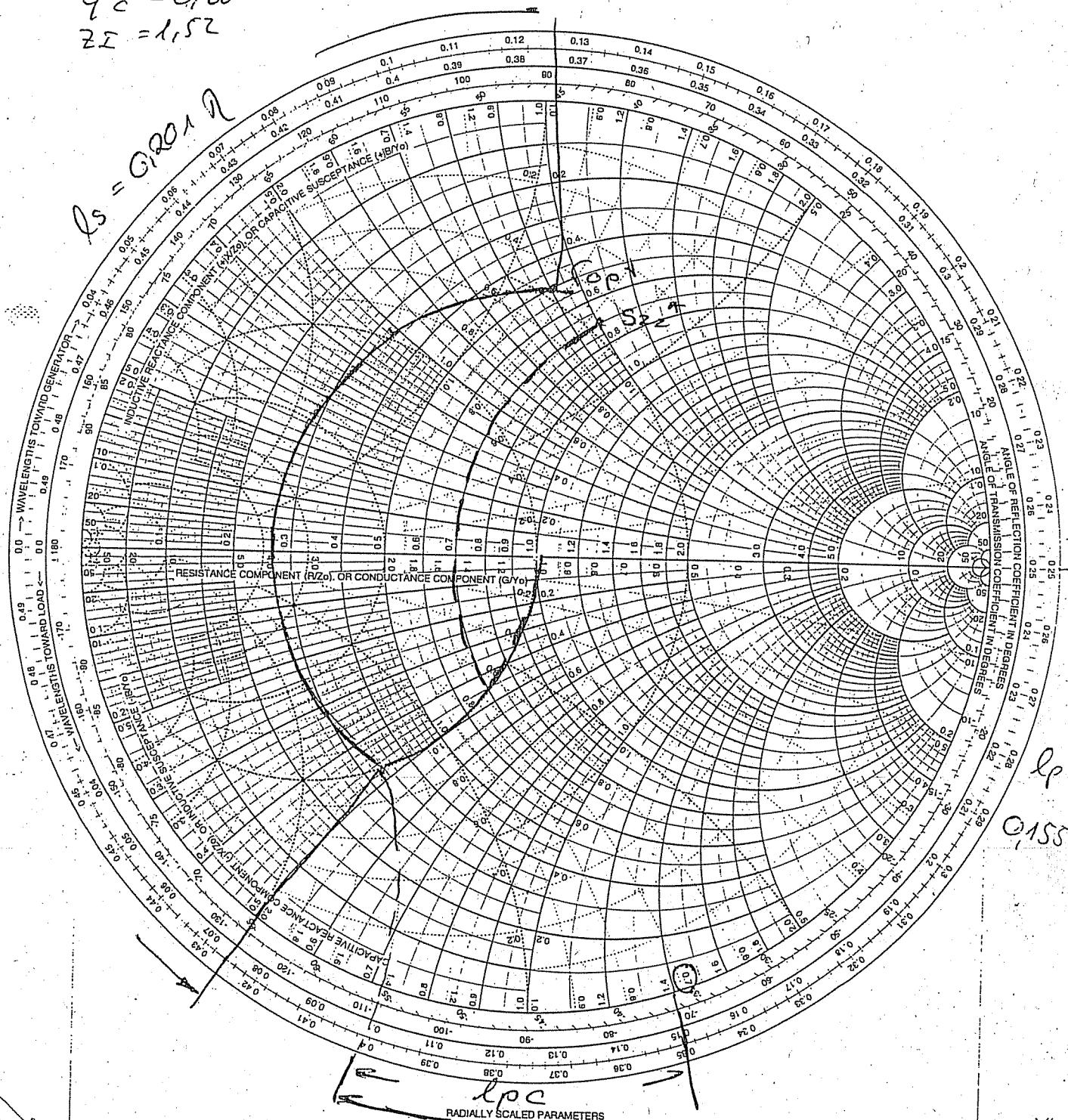
The Complete Smith Chart (ZY)

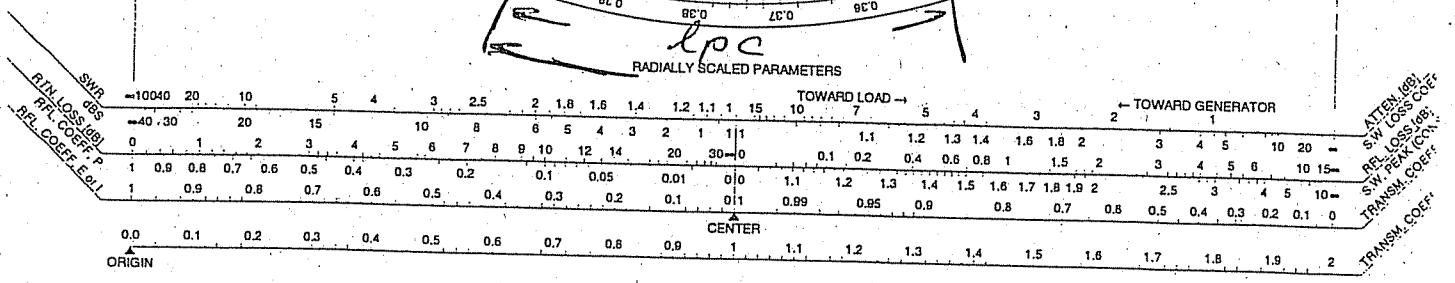
a) $S_{22}^* = 0,54 \angle 74^\circ$

$Y_C = 0,16$

$Z_I = 1,52$

$l_S = 0,201\ \lambda$





Abschrift der ITHE-Musterlösung

EMF I Aufgabe 1 F 2003

a) $\vec{H} = \frac{1}{Z}(\vec{n} \times \vec{E}) \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$$\vec{H}_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin\gamma_1 \\ 0 \\ \cos\gamma_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\gamma_1 \\ 0 \\ \sin\gamma_1 \end{pmatrix} E_{0e} e^{-j\vec{k}_e\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 e^{-j\vec{k}_e\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0e} e^{-j\vec{k}_e\vec{r}}$$

$$\vec{H}_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin\gamma_1 \\ 0 \\ -\cos\gamma_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\gamma_1 \\ 0 \\ \sin\gamma_1 \end{pmatrix} E_{0r} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2\gamma_1 + \sin^2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0r} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0r} e^{-j\vec{k}_r\vec{r}}$$

$$\vec{H}_d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} -\sin\gamma_2 \\ 0 \\ \cos\gamma_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\gamma_2 \\ 0 \\ \sin\gamma_2 \end{pmatrix} E_{0d} e^{-j\vec{k}_d\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2\gamma_2 + \sin^2\gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} E_{0d} e^{-j\vec{k}_d\vec{r}}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{\mu_0}}\, \vec{e}_y\, E_{0d} e^{-j\vec{k}_d\vec{r}}$$

b) $(\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z = \vec{E}_d \times \vec{e}_z$

$(\vec{H}_e + \vec{H}_r) \times \vec{e}_z = \vec{H}_d \times \vec{e}_z$

c)

$$[\vec{H}_e + \vec{H}_r - \vec{H}_d] \times \vec{e}_z = 0 \quad \text{mit } \vec{H}_i = \frac{1}{\varepsilon_i}\,\vec{n}_i \times \vec{E}_i \qquad i = e, r, d$$

also

$$\left[\sqrt{\varepsilon_1}\,(\vec{n}_e \times \vec{E}_e + \vec{n}_r \times \vec{E}_r) - \sqrt{\varepsilon_2}\,(\vec{n}_d \times \vec{E}_d)\right] \times \vec{e}_z = 0 \quad *$$

$$\text{mit } E_i = E_{0i}\, e^{-j\vec{q}_i \vec{r}}\cdot \vec{n}_i$$

* nur dann gültig $\forall r$ in der $z=0$ Ebene, falls die Phasen aller drei Summenterme gleich sind, d.h.:

$$|\vec{k}_e|\,\vec{n}_e\,\vec{r} = |\vec{k}_r|\,\vec{n}_r\,\vec{r} = |\vec{k}_d|\,\vec{n}_d\,\vec{r} \qquad \forall\, \vec{e}_z\,\vec{r} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{n}_e - \vec{n}_r)\,\vec{r} &= 0 \\ [\vec{k}_e \vec{n}_e - |\vec{k}_d|\,\vec{n}_d]\,\vec{r} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Für } z=0,\ r_z = 0,\ r_x,\ r_y \text{ beliebig}$$

$$\left[|\vec{k}_e| \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{pmatrix} - |\vec{k}_d| \begin{pmatrix} -\sin\varphi_2 \\ 0 \\ \cos\varphi_2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$|\vec{k}_e|\,(-\sin\varphi_1)\,r_x - |\vec{k}_d|\,(-\sin\varphi_2)\,r_x = 0$$

d.h.

$$|\vec{k}_e|\sin\varphi_1 = |\vec{k}_d|\sin\varphi_2$$

$$\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_0\varepsilon_0}\sin\varphi_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0\varepsilon_0}\sin\varphi_2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1}\sin\varphi_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\varphi_2$$

oder

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \qquad \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Verhältnis $\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = f(\varphi_1, \varphi_2)$

Ansatz: Stetigkeit von $\vec{E}$-Feld und $\vec{H}$-Feld in der $z=0$ Ebene:

I. $(\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_z - \vec{E}_d \times \vec{e}_z = 0$

II. $\sqrt{\varepsilon_1}\,[\vec{n}_e \times \vec{E}_e + \vec{n}_r \times \vec{E}_r] \times \vec{e}_z - \sqrt{\varepsilon_2}\,[\vec{n}_d \times \vec{E}_d] \times \vec{e}_z = 0$

Mit I und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \left[E_{0e} \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} + E_{0r} \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - E_{0d} \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 \\ 0 \\ \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\cos\varphi_1 E_{0e} \vec{e}_y + \cos\varphi_1 E_{0r} \vec{e}_y - (-\cos\varphi_2) E_{0d} \vec{e}_y = 0$$

$$\text{(III)} \quad -E_{0e}\cos\varphi_1 + E_{0r}\cos\varphi_1 + E_{0d}\cos\varphi_2 = 0$$

mit II und gleichen Phasenfaktoren in der $z=0$ Ebene

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1} \left[E_{0e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + E_{0r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{\varepsilon_2}\, E_{0d} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,[E_{0e}\vec{e}_x + E_{0r}\vec{e}_x] - \sqrt{\varepsilon_2}\, E_{0d}\vec{e}_x = 0$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}\, E_{0r} - \sqrt{\varepsilon_2}\, E_{0d} = 0$$

bzw. $$E_{0d} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\, E_{0e} + \sqrt{\varepsilon_1}\, E_{0r}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

Einsetzen in III):

$$-E_{0e}\cos\varphi_1 + E_{0e}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\varphi_2 + E_{0r}\cos\varphi_1 + E_{0r}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\varphi_2 = 0$$

$$E_{0r}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right) = E_{0e}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\varphi_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\varphi_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\right)$$

3/4
703 ①

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\gamma_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\gamma_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma_2} \qquad (IV)$$

d)

Brewster-Winkel: $E_{0r} = 0$

$$\frac{E_{0r}}{E_{0e}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\gamma_1 - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\gamma_1 + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma_2} \qquad (\text{vgl. } IV)$$

mit $E_{0r} = 0$: $\Rightarrow \sqrt{\varepsilon_2}\cos\gamma_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\cos\gamma_2$

$\cos\gamma_1 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\cos\gamma_2}{\cos\gamma_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

Brechungsgesetz: $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

Mit Hinweis: $E_{0r} = 0$ $\quad \tan\gamma_1 = \tan\gamma_{10} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

by schäng

Abschrift der Musterlösung | F 03 | Aufgabe 2

a)

Maxwell und Materialgleichungen:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma} \nabla \times \vec{H}$$

Ansatz einsetzen:

$$\vec{E} = \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\varepsilon + \sigma} \underline{h}(\varphi)\, e^{(-\underline{\gamma} z)} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{j\omega\varepsilon + \sigma} \frac{1}{\varphi} \frac{d}{d\varphi}\left[\varphi \underline{h}(\varphi)\right] e^{(-\underline{\gamma} z)} \vec{e}_z$$

Da TEM-Feld bzgl der z-Achse gewählt ist, muss die z-Komponente von $\vec{E}$ verschwinden. Hieraus folgt die DGL:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[\varphi \underline{h}(\varphi)\right] = 0$$

Also ist $\varphi \underline{h}(\varphi)$ eine Konstante, und damit ist die allgemeine Lösung

$$\underline{h}(\varphi) = \frac{A}{\varphi}$$

---

b)

Maxwell und Materialgleichungen:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} = (j\omega\varepsilon + \sigma)\vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = (j\omega\varepsilon + \sigma) \nabla \times \vec{E}$$

mit $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$

und $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$:

$$\Rightarrow \quad \Delta \vec{H} = j\omega\mu (j\omega\varepsilon + \sigma) \vec{H}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} - j\omega\mu (j\omega\varepsilon + \sigma) \vec{H} = 0$$

Dies ist die gesuchte Helmholtzgleichung für

$$\underline{k}^2 = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)$$

Einsetzen von $\vec{\underline{H}}$ (wegen des Sonntags nur φ-Komponente relevant)

$$\left\{ \frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}(\varrho \underline{A}(\varrho)) \right] + \underline{\gamma}^2 \underline{A}(\varrho) + \underline{k}^2 \underline{A}(\varrho) \right\} e^{-\underline{\Gamma} z} = 0$$

$= 0$ siehe oben

Diese Gleichung ist nun erfüllt für:

$$\underline{\gamma}^2 = -\underline{k}^2$$

---

c)

Grenzbedingung bei $\varrho = a$: $\vec{\underline{E}}_{tang} = \vec{0}$ (ideale Leiter)

Dies ist durch den Ansatz erfüllt, da $\vec{E}$ nur eine φ-Komponente hat.

Aus Symmetriegründen ist die Stromdichte gleichmäßig über die Leiteroberfläche verteilt:

$$\vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{\underline{I}_0}{2\pi a} e^{(-\underline{\Gamma} z)} \vec{e}_z$$

Grenzbedingung für $\vec{\underline{H}}$ bei $\varrho = a$:

$$\vec{\underline{H}}_{tang} = \vec{n} \times \vec{\underline{J}}_{Fa} = \frac{\underline{I}_0}{2\pi a} e^{(-\underline{\Gamma} z)} \vec{e}_\varphi$$

Einsetzen von $\vec{\underline{H}}$ ergibt

$$\underline{A} = \frac{\underline{I}_0}{2\pi}$$

F03 Aufgabe 2

analog folgt aus der Grenzbedingung für $\vec{H}$ bei $\rho = b$

$$\underline{\vec{J}}_{Fb} = -\frac{\underline{I}_0}{2\pi b} e^{(-\gamma z)} \vec{e}_z$$

---

d)

Feldwellenwiderstand:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\underline{Z}_F} (\vec{e}_z \times \underline{\vec{E}})$$

Einsetzen von $\underline{\vec{E}}$ und $\underline{\vec{H}}$ ergibt

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{H}_\varphi} = \frac{\sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}}{j\omega\varepsilon + \sigma}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}}$$

Poyntingvektor:

$$\underline{\vec{S}} = \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*$$

Einsetzen:

$$\underline{\vec{S}} = \underline{Z}_F |\underline{H}_\varphi|^2 \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{S}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon + \sigma}} \frac{|\underline{I}_0|^2}{4\pi^2 \rho^2} e^{(-2\alpha z)} \vec{e}_z$$

e) Ausbreitungs und Dämpfungskonstante

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\mu(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma}$$

Mit Hinweis:

$$\underline{\gamma} \approx \underbrace{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}_{\beta} + \underbrace{\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{\alpha}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Abschrift der ITHE-Musterlösung der Klausur

EMF I Aufgabe 3 F 2003

a) Es handelt sich um einen Hohlleiter

→ Homogenes Dielektrikum

→ Kein Innen- / Rückleiter

⇒ Es existieren nur TE_z-Wellen und TM_z-Wellen aber keine TEM_z-Wellen

b) Es gilt die Helmholtz'sche Gleichung, d.h.

$$\nabla^2 \underline{\vec{F}} + \kappa^2 \underline{\vec{F}} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

$$\underline{\vec{F}} \sim e^{-j\beta z} \vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2$$

$$\Rightarrow \nabla_t^2 \underline{F} + (\kappa^2 - \beta^2) \underline{F} = 0$$

∇_t: transversalteil des ∇-Operators

c) Separation in zylindrische Koordinaten:

Produktansatz: $\underline{F}(\rho, \varphi) = \underline{R}(\rho) \cdot \underline{\Phi}(\varphi)$

$$\underline{\vec{F}} = \underline{F}_z \vec{e}_z$$

Formelsammlung: $\Rightarrow \nabla^2 \underline{F} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \underline{F}_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial \varphi^2}}_{\nabla_t^2 \underline{F}} + \frac{\partial^2 \underline{F}_z}{\partial z^2}$

$$\nabla_t^2 \underline{F} + (\kappa^2 - \beta^2) \underline{F} = 0 \quad \text{und} \quad F = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}(R' + \rho R'') \Phi + \frac{1}{\rho^2} R \Phi'' + (\kappa^2 - \beta^2) R \Phi = 0$$

mit $R' = \frac{\partial R}{\partial \rho}$, $R'' = \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2}$ und Φ', Φ'' analog

Division durch $(R\Phi)$:

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{=-m^2} + (k^2-\beta^2) = 0 \quad \text{(Bessel'sche DGL)}$$

$$\Rightarrow \text{i)} \quad \Phi'' + m^2\Phi = 0$$

Allgemeine Lösung: $\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi)$

$$\text{ii)} \quad R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left(\underbrace{k^2-\beta^2}_{=\rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

$\rightarrow$ Bessel'sche Dgl.

Allgemeine Lösung: $R(\rho) = C J_m(\rho\rho) + D N_m(\rho\rho)$

mit $\rho = \sqrt{k^2-\beta^2}$ (Separationsbedingung)

d)

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}}_{E_\rho}\vec{e}_\rho + \underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial \rho}}_{E_\varphi}\vec{e}_\varphi$$

↑ Formelsammlung

Randbedingungen bei $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$:

$$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_\rho(\varphi=0) = E_\rho(\varphi=\varphi_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial F_z}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$\Rightarrow$ i) $-mA\sin(m\cdot 0) + mB\cos(m\cdot 0) = 0$ $\quad (\varphi = 0)$

ii) $-mA\sin(m\varphi_0) + mB\cos(m\varphi_0) = 0$ $\quad (\varphi = \varphi_0)$

i) $\Rightarrow B = 0$

ii) $\Rightarrow \sin(m\varphi_0) = 0$

$\Rightarrow m \cdot \varphi_0 = n \cdot \pi$

$\Rightarrow m = m_n = \frac{n\pi}{\varphi_0} = n \frac{\pi}{\pi/3} = 3n \quad n = 1, 2, \ldots$

Insgesamt: $\Phi(\varphi) = A \cos\left(n \frac{\pi \varphi}{\varphi_0}\right)$

e) Rand Bedingung bei $\rho = a, \rho = b$:

$\vec{E}_{tan} = \vec{0} \Rightarrow E_\varphi(\rho = a) = E_\varphi(\rho = b) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial I_z}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = \frac{\partial I_z}{\partial \rho}\Big|_{\rho=b} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial R(\rho=a)}{\partial \rho} = \frac{\partial R(\rho=b)}{\partial \rho} = 0$

f) $\Rightarrow$ $\underline{\rho = a}$: $C J'_m(pa) + D N'_m(pa) = 0$

$\underline{\rho = b}$: $C J'_m(pb) + D N'_m(pb) = 0$

Als lineares homogenes Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{bmatrix} J'_m(pa) & N'_m(pa) \\ J'_m(pb) & N'_m(pb) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristische Gl.:

Das homogene Gleichungssystem muß für $C \neq 0, D \neq 0$ eine Lsg. liefern

$\Rightarrow$ Die Determinante der Systemmatrix muß verschwinden

$\Rightarrow J'_m(pa) N'_m(pb) - N'_m(pa) J'_m(pb) = 0$

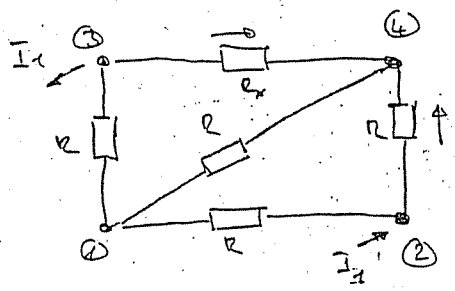
Grenzwellenzahl: $\beta = 0 \Rightarrow k = p := k_c$

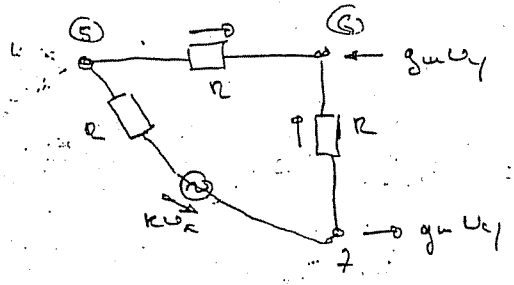
Grenzfrequenz: $f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{k_c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{2\pi} \frac{p}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

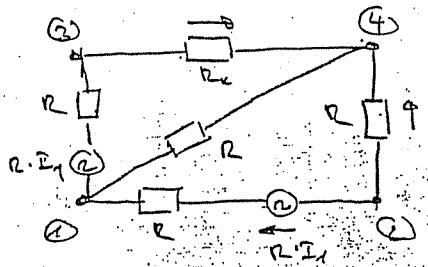
Lsg. schräg

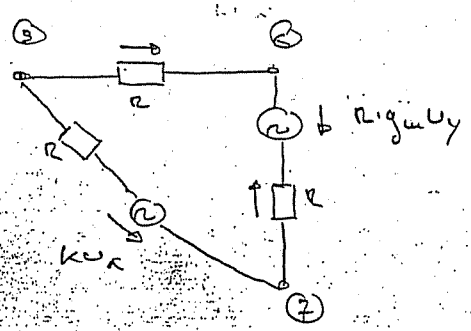
Aufgabe 4):

a)









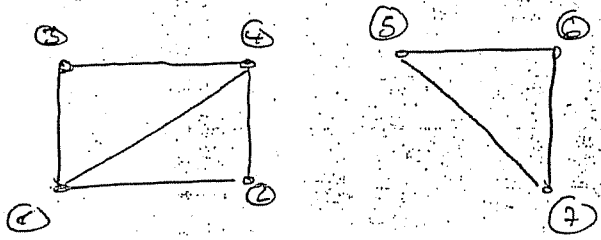
b) $p = k - s = 7 - 2 = 5$

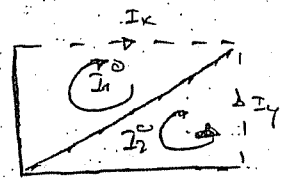
$m = z - p = 8 - 5 = 3$

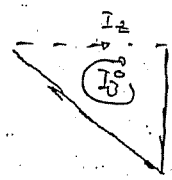
p Anzahl linearsh. Gl. für Schnittmengenpotentialverfahren

m " " " " " Maschenimpedanzverfahren

c)







d) $\underline{I_1^0}$: $I_1^0 \cdot R_K + (I_1^0 + I_2^0) R + I_1^0 \cdot R + R \cdot I_1 = 0$

$\underline{I_2^0}$: $I_2^0 R + (I_1^0 + I_2^0) R + I_2^0 \cdot R - R \cdot I_1 = 0$

$\underline{I_3^0}$: $I_3^0 \cdot R + R g_m U_y + I_3^0 \cdot R - k U_K + R I_3^0 = 0$

mit $U_y = R \cdot I_y = R \cdot I_2^0$

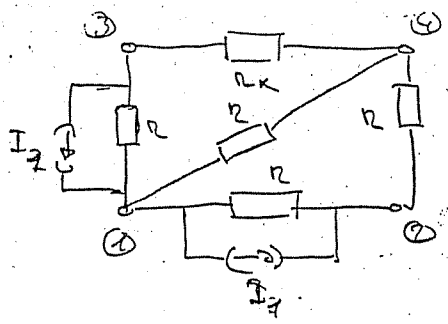
$U_K = I_K \cdot R_K = I_1^0 R_K$

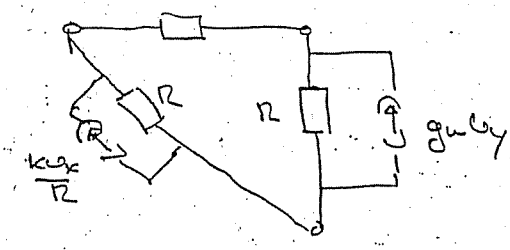
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -R \cdot I_1 \\ R \cdot I_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_K + 2R & R & 0 \\ \cdot R & 3R & 0 \\ -k R_K & R^2 g_m & 3R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \\ I_3^0 \end{pmatrix}$$

e) $I_2 = I_3^0 \rightarrow I_2 = \dfrac{\det \begin{vmatrix} R_K + 2R & R & -R \cdot I_1 \\ R & 3R & R \cdot I_1 \\ -k R_K & R^2 g_m & 0 \end{vmatrix}}{\det (Z)}$

$$= \frac{-(R \cdot I_1) \left| (R \cdot R^2 g_m) + 3R k R_K + (R_K + 2R)(R^2 g_m) + R k R_K \right|}{3R \left(3R (R_K + 2R) - R^2 \right)}$$

-f)



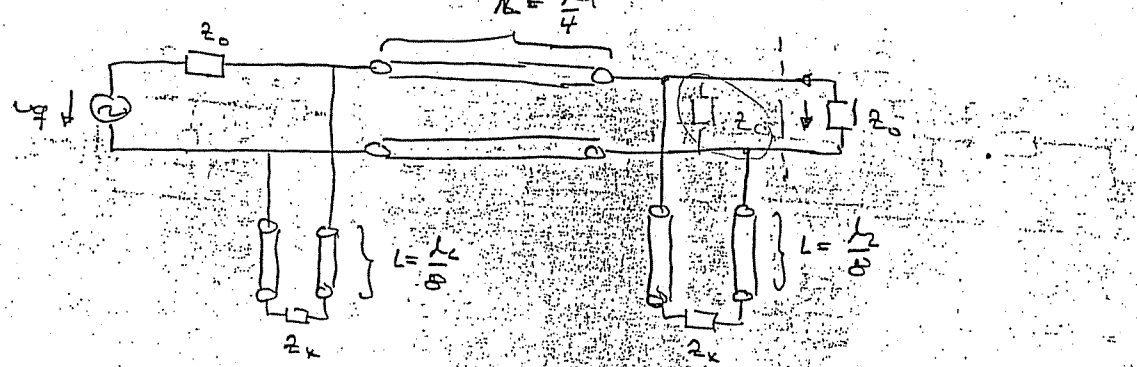


Aufgabe 5

a) $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{pmatrix}$

b) $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{S}}\, a$ siehe Aufgabenblatt 6

c)



$Z_K = 0$ für EW → Gegentakt (Kurzschluss)
$Z_K = \infty$ " MW → Gleichtakt (Leerlauf)

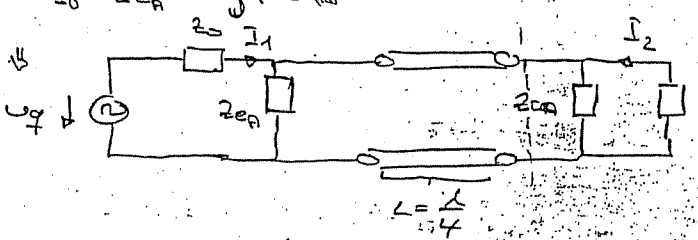
d) $\Gamma_A = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)_A$

$Z_e = j Z_L \tan \beta L$ für Kurzschluss
$Z_0 = \frac{-j Z_L}{\tan \beta L}$ für Leerlauf

Ausgangsfall A → $Z_K = \infty$ da Leerlauf

$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$ → $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

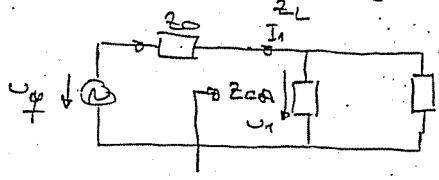
→ $Z_{e_A} = -j Z_0$



$Z_{eq} \| Z_0 = \frac{-j Z_0^2}{Z_0 (1-j)} = \frac{-j}{1-j} Z_0$

$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ → $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

→ $\frac{U_e}{I_e} = \frac{j Z_L I_a}{\frac{j}{Z_L} U_a} = \frac{Z_L^2}{Z_a} = Z_{e2}$



$Z_{e2} = \frac{Z_L^2}{Z_a} = \frac{Z_{L1}^2}{Z_{eq} \| Z_0} = -\frac{Z_0^2 (1-j)}{2 \, Z_0 \, j} = j \frac{Z_0 (1-j)}{2}$

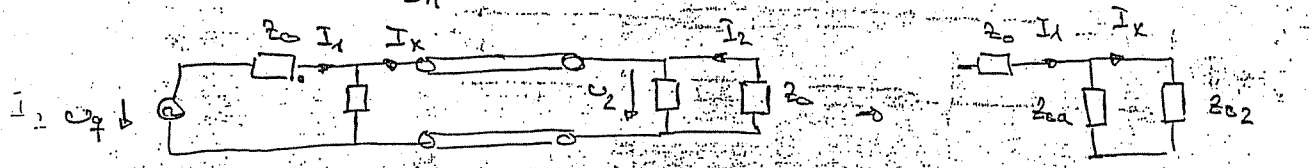
→ $\Gamma_A = \left(\frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{I_1} - Z_0\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{I_1} + Z_0\right)} = \frac{Z_{eq} \| Z_{L2} - Z_0}{Z_{eq} \| Z_{L2} + Z_0}$

$$\Rightarrow \Gamma_A = \frac{z_0 - z_0}{2 z_0} = 0$$

$$\text{mit } z_{ea} \| z_{e2} = \frac{-j z_0 \cdot j \frac{z_0 (1-j)}{2}}{j z_0 \left(\frac{1-j}{2} - 1 \right)} = -j \cdot \frac{z_0 (1-j)}{-1-j-2} = -j \cdot \frac{z_0 (1-j)}{-1-j}$$

$$= \frac{z_0 (-j-1)}{-1-j} = z_0$$

$$\Gamma_A = \frac{b_2}{a_1} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{\frac{U_2}{I_2} - z_0}{\frac{U_1}{I_1} + z_0} \qquad \text{mit } \frac{U_2}{I_2} = -z_0$$



$$I_K = U_2 \cdot \frac{j}{z_L} = \frac{j\sqrt{2}}{z_0} U_2$$

$$I_K = \frac{I_1 \cdot z_{ea}}{z_{ea} + z_{e2}} = I_1 \cdot \frac{-j z_0}{-j z_0 + j \frac{z_0 (1-j)}{2}} = I_1 \frac{1}{1 - \frac{(1-j)}{2}} = I_1 \frac{2}{2 - 1 + j} = I_1 \frac{2}{1+j}$$

$$\Rightarrow I_1 \frac{2}{1+j} = \frac{j\sqrt{2}}{z_0} U_2 \qquad \Rightarrow I_2 = -U_2 \cdot \frac{1}{z_0} \qquad \Rightarrow U_2 = -I_2 \cdot z_0$$

$$\Rightarrow I_1 \frac{2}{1+j} = \frac{j\sqrt{2}}{z_0} (-I_2 z_0) = \frac{2}{1+j}$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{\sqrt{2}}{1+j} \cdot \frac{1}{j\sqrt{2}} I_1$$

$$\Rightarrow \Gamma_A = -\frac{2}{1+j} \frac{1}{j\sqrt{2}} \cdot \frac{-2 z_0}{2 z_0} = \frac{2}{(1+j)} \frac{1}{j\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-1+j} \cdot \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$

e) $\Gamma_B = \left(\frac{b_2}{a_2}\right)_B = 0 \qquad T_B = \left(\frac{b_2}{a_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1-j)$

$$\frac{b_1}{a_1} = (s_{11} + s_{14}) = \Gamma_A \qquad T_A = s_{12} + s_{13}$$

$$\Gamma_B = s_{11} + s_{14} \qquad T_B = s_{12} - s_{13}$$

$$\Rightarrow s_{11} = \Gamma_A - s_{14} \qquad s_{14} = s_{11} - \Gamma_B \Rightarrow s_{11} = \Gamma_A - s_{11} + \Gamma_B \Rightarrow s_{11} = \frac{1}{2} (\Gamma_A + \Gamma_B)$$

$$\Rightarrow s_{14} = \frac{1}{2} (\Gamma_A - \Gamma_B)$$

$$s_{12} = T_A - s_{13} \qquad s_{13} = s_{12} - T_B \Rightarrow s_{12} = T_A - s_{12} + T_B \Rightarrow s_{12} = \frac{1}{2} (T_A + T_B)$$

$$s_{13} = \frac{1}{2} (T_A - T_B)$$

$$\Rightarrow s_{11} = \frac{1}{2} (\Gamma_A + \Gamma_B) = 0 + 0 = 0$$

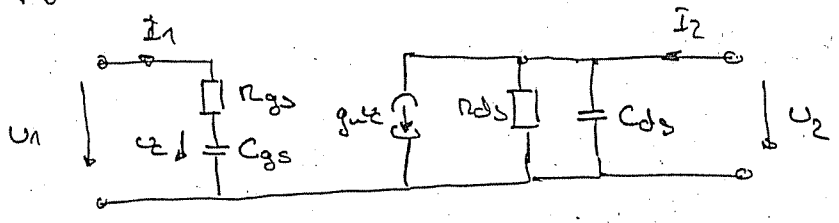
$$s_{14} = \frac{1}{2} (\Gamma_A - \Gamma_B) = 0$$

$$s_{12} = \frac{1}{2} (T_A + T_B) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1-j}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1-j) \right) = \frac{1}{2} \frac{-2j}{\sqrt{2}} = \frac{-j}{\sqrt{2}}$$

$$s_{13} = \frac{1}{2} (T_A - T_B) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1-j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (1-j) \right) = \frac{-2}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 6

a)



$$Z_{in} = R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} = R_{gs} - j\frac{1}{\omega C_{gs}} = 15\,\Omega - j\,18\,\Omega$$

$$Z_{in} = (0{,}3 - j\,0{,}36)\,\Omega \quad \rightarrow S_{in} = 0{,}58 \exp(-j37°)$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} = \frac{1}{12{,}5\,\Omega} + \frac{1}{62{,}5\,\Omega} = (0{,}4 + j\,0{,}8)\,S$$

mit Normierung

$$\rightarrow S_{22} = 0{,}82 \exp(-\,\;°)$$

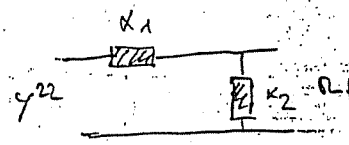
b) Eingangsanpassung $Z_{in}^* = (0{,}3 + j\,0{,}36)\,\Omega$

$R_L = 1\,\Omega$

Entnahmestelle 1.4 Übergang

c) $\Rightarrow$ L_{p2} wäre short und $\frac{L_{p2}}{L} = -0{,}25 + 0{,}432 = \underline{0{,}202}$

d)



Ausgangsanpassung $Z_{22}^* = (0{,}4 - j\,0{,}8)\,S$

$r_L = 1\,\Omega$

$\Rightarrow K_1 = j\,0{,}5$

$K_2 = -j$

e) $P_{IN} = 0{,}01\,mW$ $\quad P_{out}$?

$$P_{IN} = I_g^2 \cdot R_{gs} \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{IN}}{R_{gs}}} = I_g \qquad U_c = \frac{1}{j\omega C_{gs}} \cdot I_g$$

$$P_{out} = \left(\frac{1}{2}(g_m U_c)^2 + R_{ds}\right) \cdot I_2 = \frac{1}{2}\left(g_m \frac{I_g}{j\omega C_{gs}}\right)^2 R_{ds}$$

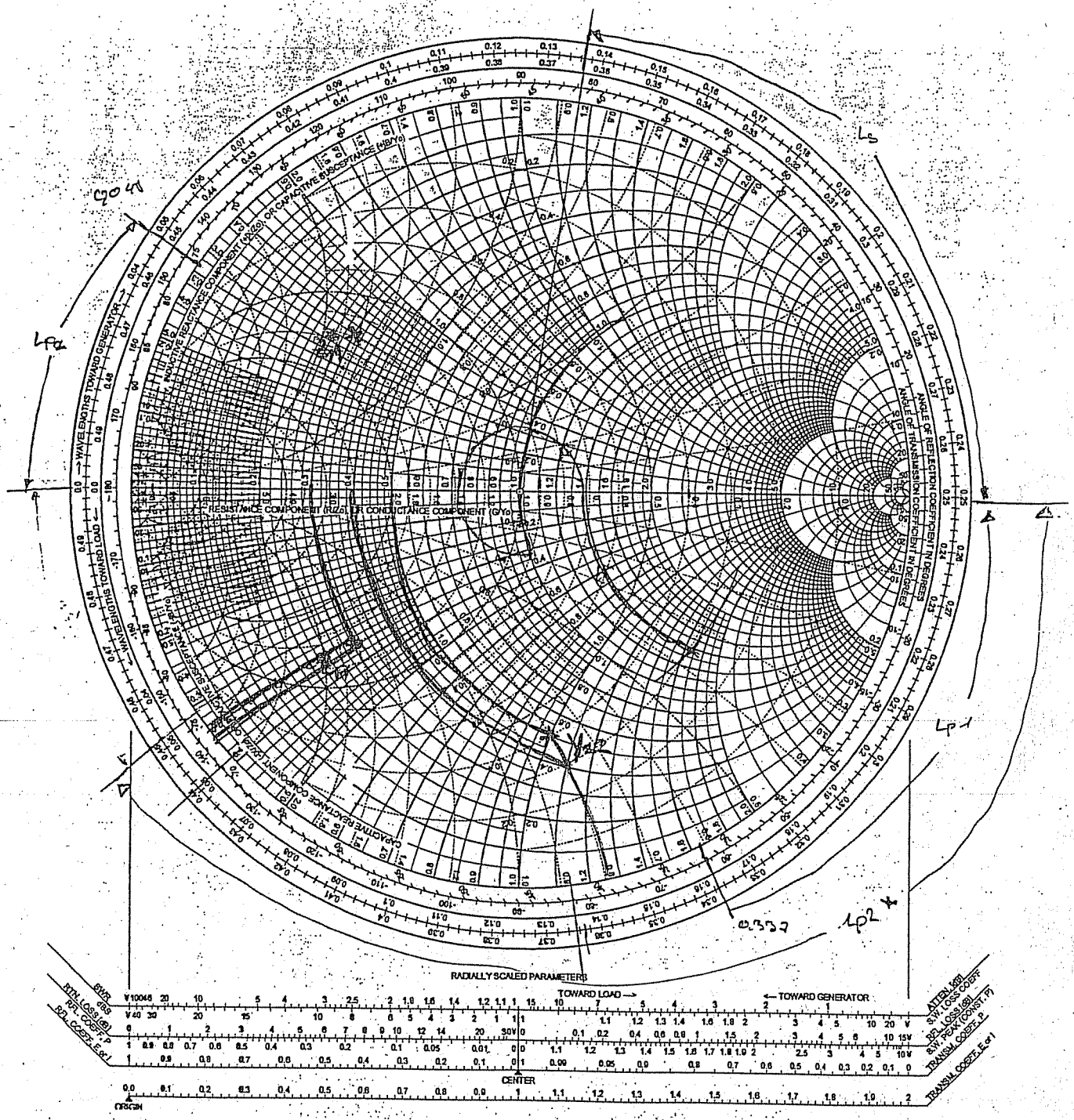
$$= \frac{1}{4} g_m^2 \frac{P_{IN}}{R_{gs}} \frac{R_{ds}}{\omega^2 C_{gs}^2} = \underline{0{,}27\,mW}$$

Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2003

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6 Name: _____ Matr.Nr.: _____



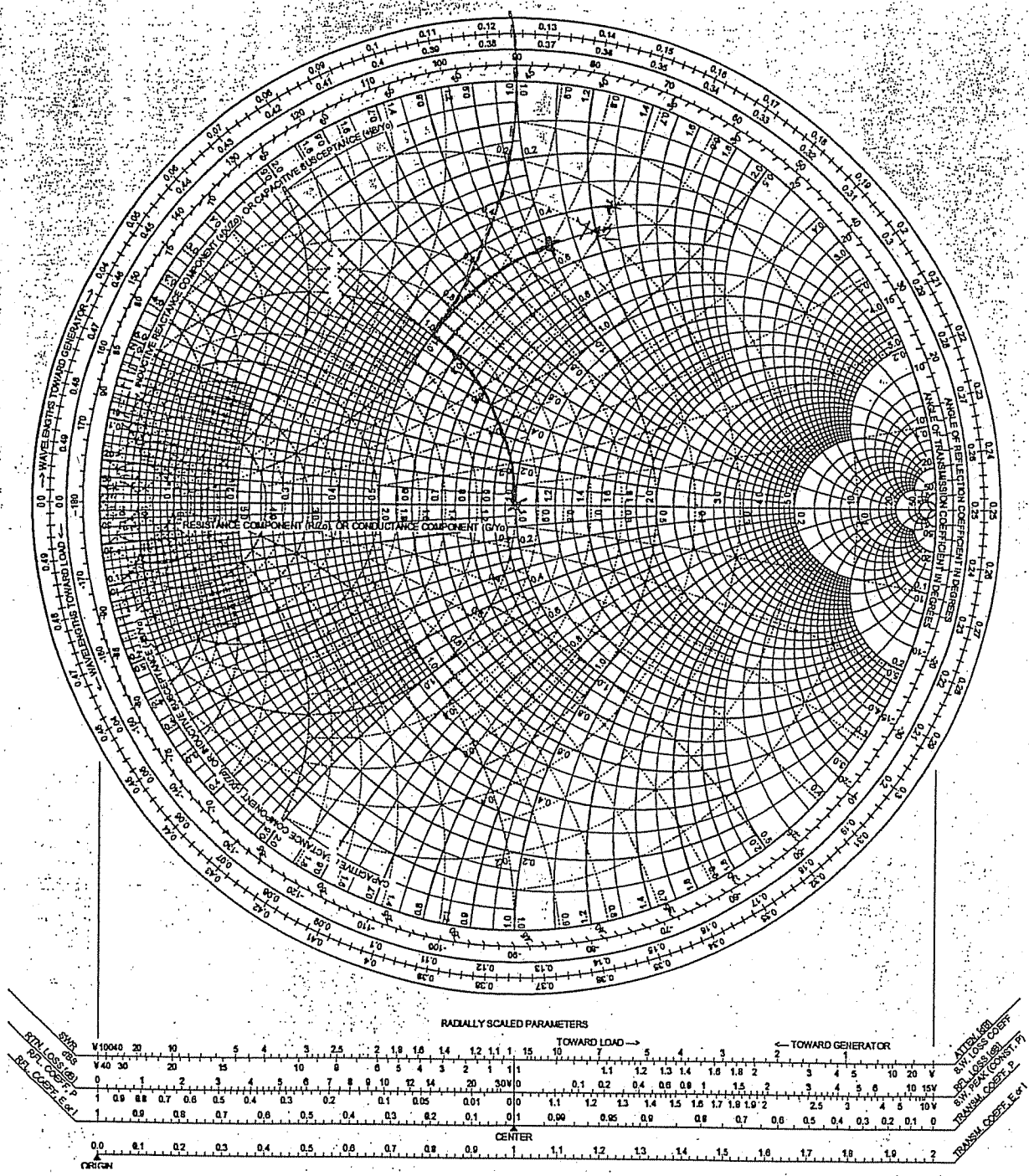
Institut für Theoretische Elektrotechni :
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Frühjahr 2003

KLAUSURAUFGABEN "ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

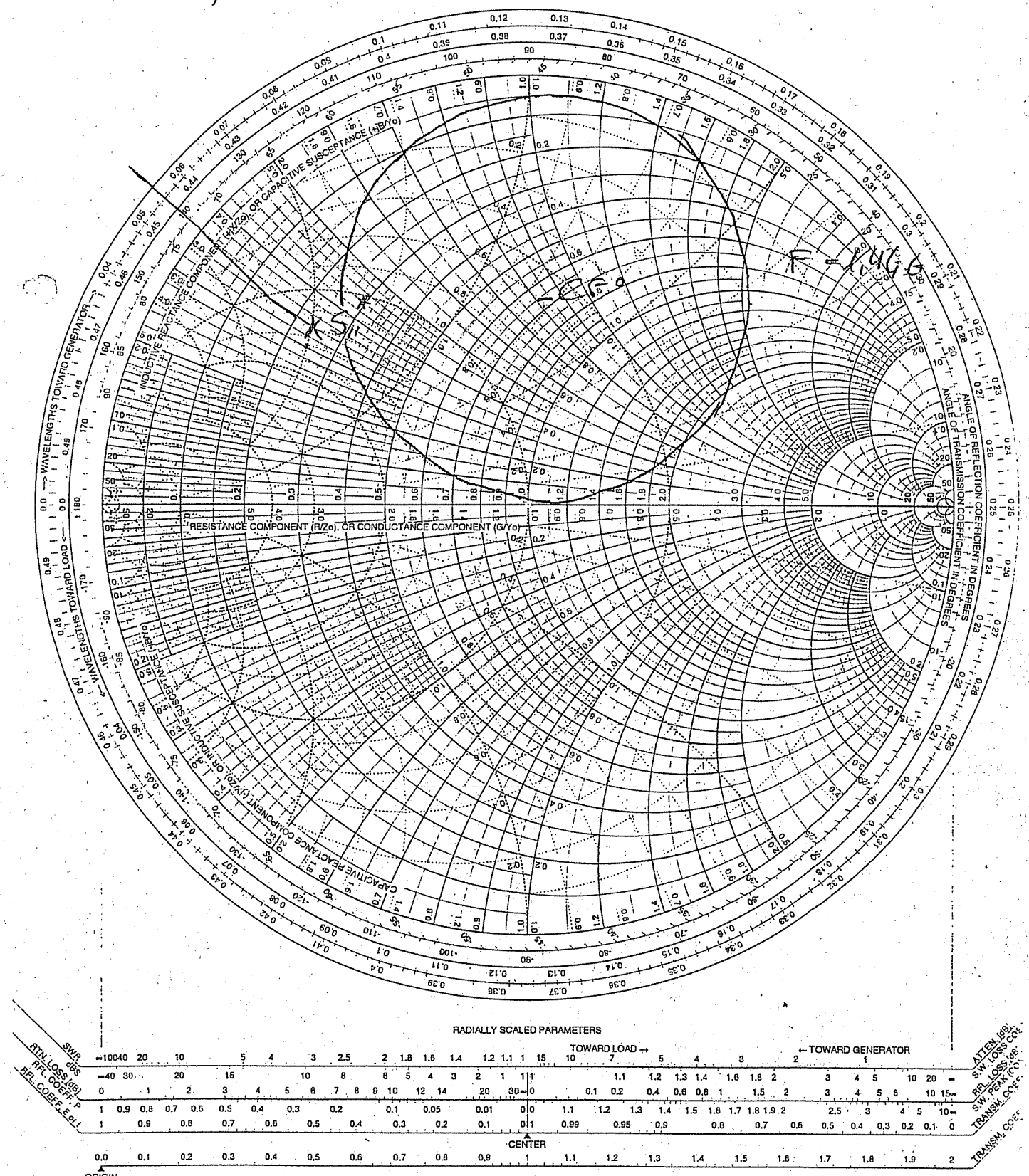
Hilfsblatt 2 zu Aufgabe 6

Name: _____ Matr.Nr.: _____



FOR A6
c)

The Complete Smith Chart (ZY)



HÜ 2

A1: Quasi-TEM-Welle

a) Helmholtzgl. für das Feld im Leiter (Ga):

$$(\Delta + \underline{k}_2^2)\,\vec{\underline{H}}_2 = \vec{0}$$

mit $\underline{k}_2^2 = \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \approx j\omega\mu_0\sigma_M$

Ausnutzung der ggb. Näherung $\sigma_M \gg \omega\varepsilon$:

$$\underline{k}_2^2 \approx -j\omega\mu_0\sigma_M$$

Uns interessieren nur die y-Komponente:

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} + \underline{k}_2^2 h_2(x) = \underline{\gamma}^2 h_2(x) + \underline{\gamma}^2 h_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} + \left[\underline{k}_2^2 + \underline{\gamma}^2\right] h_2(x) = 0$$

mit $\underline{k}_2^2 + \underline{\gamma}^2 \approx -j\omega\mu_0\sigma_M + \underline{\gamma}^2 \approx -j\omega\mu_0\sigma_M$ (Ausnutzung der ggb. Näherung $\omega\mu_0\sigma_M \gg |\underline{\gamma}|^2$) Also ist:

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} - j\omega\mu_0\sigma_M h_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2 h_2(x)}{dx^2} - \frac{2j}{a^2} h_2(x) = 0$$

mit der Eindringtiefe $a = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_M}}$.

Lösung:

$$h_2 = \underline{A}\, e^{\sqrt{2j}\frac{x}{a}} + \underline{B}\, e^{-\sqrt{2j}\frac{x}{a}}$$

$$h_2 = \underline{A}\, e^{\left[(1+j)\frac{x}{a}\right]} + \underline{B}\, e^{-(1+j)\frac{x}{a}}$$

Das Feld muß mit kleiner werdendem x abklingen. Also ist

$$\underline{A} = 0$$

Grenzbed.: $\boxed{x = 0}$: $\quad \vec{\underline{H}}_2 = \vec{\underline{H}}_1$

also ist:

$$\underline{\quad} = \underline{H}_1$$

Lösung für h_z mit Berücksichtigung von γ_m:

$$h_z = \frac{H_{10}}{1+j} e^{(1+j)\frac{x}{a}}$$

b) Stromdichte: $\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$

nur die z-Komponente ist gefragt:

$$J_{z2} = \frac{dh_z(x)}{dx} e^{-\gamma z}$$

$$J_{z2} = \frac{1+j}{a} e^{(1+j)\frac{x}{a}} e^{-\gamma z}$$

$$J_{z2} = H_{10} \frac{1+j}{a} e^{(1+j)\frac{x}{a}} e^{-\gamma z}$$

Verlustleistungsdichte: $\overline{P}_{verl.} = \frac{1}{2\sigma_M} |J_{z2}|^2$

Verlustleistung/Länge:

$$\overline{P}'_{verl} = \frac{1}{2\sigma_M} \int_0^W \int_{-t}^{0} |J_{z2}|^2 \, dx\,dy$$

$$\overline{P}'_{verl.} = \frac{1}{2\sigma_M} |H_{10}|^2 \frac{2}{a^2} \int_0^W \int_{-t}^{0} e^{2\frac{x}{a}} e^{-2\alpha z} \, dx\,dy$$

Absicht da hier nicht mehr komplex?

$$\overline{P}'_{verl.} = |H_{10}|^2 \frac{W}{\sigma_M a^2} \int_{-t}^{0} e^{2\frac{x}{a}} e^{-2\alpha z} \, dx$$

$$= |H_{10}|^2 \frac{W}{2\sigma_M a} e^{2\frac{x}{a}} e^{-2\alpha z} \Big|_{x=-t}^{x=0}$$

$$\overline{P}'_{verl} = |H_{10}|^2 \frac{W}{2\sigma_M a} e^{-2\alpha t} \left[1 - e^{-2\frac{t}{a}}\right]$$

$$\approx |H_{10}|^2 \frac{W}{2\sigma_M a} e^{-2\alpha t} \quad (\text{wegen } a \ll t)$$

c) Poyntingvektor:

$$\vec{S}_n = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \vec{H}_n \cdot \vec{H}_n^* \vec{e}_z$$

$$\vec{S}_n = |H_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} e^{(-(\alpha+jk)z)} e^{(-(\alpha-jk)z)} \vec{e}_z$$

$$\vec{S}_n = |H_{10}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} e^{-2\alpha z} \vec{e}_z$$

Transportierte Leistung im G_A im zeitlichen Mittel:

$$\overline{P}_A(z) = \frac{1}{2}|\underline{H}_{x0}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_0^{W} \int_0^{d} e^{-2\alpha z}\, dx\, dy \qquad \overline{\vec{P}}_A(z) = \iint_A \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\underline{\vec{S}}\}\, dA$$

$$\overline{P}_A(z) = \frac{1}{2}|\underline{H}_{x0}|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, dW\, e^{-2\alpha z}$$

d) Abnahme der transportierten Leistung in z-Richtung:

$$\frac{d\overline{P}_A}{dz} = -|\underline{H}_{x0}|^2\, d \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, dw\, e^{-2\alpha z}$$

Vergleich mit Verlusten im Leiter $\overline{P}'_{verl}$:

$$\overline{P}'_{verl} = -\frac{d\overline{P}_A}{dz}$$

$$|\underline{H}_{x0}|^2 d\, dw \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\, e^{-2\alpha z} = |\underline{H}_{x0}|^2 \frac{\omega}{2\sigma_M a}\, e^{-2\alpha z}$$

$$d\, d \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \frac{1}{2\sigma_M a}$$

$$d = \frac{1}{2 d \sigma_M a} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}$$

H02

A2: Ausbreitung der Hybridwelle in z-Richtung mit noch unbekannter Ausbreitungskonstante γ:

a) $\vec{G}_i(x,y,z) = \tilde{\vec{g}}_i(x,y) \cdot e^{-\gamma z} \cdot \vec{e}_y \quad ; \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$

Differentialgln:

GL1: $(\nabla^2 + k_1^2)\vec{G}_1 = \vec{0}$ mit $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_1^2 + \gamma^2\right) g_{1y} = 0$$

GL2: $(\nabla^2 + k_2^2)\vec{G}_2 = \vec{0}$ mit $k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 + \gamma^2\right) g_{2y} = 0$$

b) Produktansatz:

$$g_{1y}(x,y,z) := g_{1x}(x) \cdot g_{1y}(y) \cdot e^{-\gamma z}$$

einsetzen in DGL:

$$\left(g_{1y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_{1x} + g_{1x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g_{1y} + (k_1^2 + \gamma^2) g_{1x} g_{1y}\right) e^{-\gamma z} = 0$$

multiplizieren mit: $\frac{1}{g_{1x} g_{1y}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{g_{1x}} \frac{\partial^2 g_{1x}}{\partial x^2}}_{:= -k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{g_{1y}} \cdot \frac{\partial^2 g_{1y}}{\partial y^2}}_{:= -k_y^2} + (k_1^2 + \gamma^2) = 0$$

→ allgm. Lsg. in GL1:

$$g_{1y}(x,y,z) = (A_1 \cos(k_x x) + B_1 \sin(k_x x)) \cdot (C_1 \cos(k_y y) + D_1 \sin(k_y y)) \cdot e^{-\gamma z}$$

G2:

Analog, jedoch als Fkt. von $(b-y)$, damit die Randbedingungen bei $y=b$ leichter zu erfüllen sind:

$$\underline{g}_{g2}(x,y,z) = \left(A_2\cos(k_x\cdot x) + B_2\sin(k_x\cdot x)\right)\left(C_2\cos(k_{2y}(b-y)) + D_2\sin(k_{2y}(b-y))\right)\cdot e^{-\gamma z}$$

Seperationsbed. in G2: $-k_x^2 - k_{2y}^2 + (k_2^2 + \gamma^2) = 0$

Randbedingungen bei $x=0$, $x=a$:

$\vec{E}_{ti}(x=0) = E_{yi}(x=0)\vec{e}_y \sim g_i(x=0) = 0$ (i)

$E_{ti}(x=a) \sim g_i(x=a) = 0$ (ii)

(i) $\rightarrow A_1 = A_2 = 0$

(ii) $\rightarrow \sin(k_x\cdot a) = 0 \Rightarrow k_x\cdot a = m\cdot\pi$

$$k_x = \frac{m\cdot\pi}{a}\quad ;\ m = 1,2,\ldots$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_r\cdot\varepsilon_0}$$

c) $$\vec{E}_i = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_i}\left(k_i^2\, g_i\vec{e}_y + \nabla\frac{\partial g_i}{\partial y}\right)$$

$$\vec{H}_i = \nabla g_i \times \vec{e}_y$$

G1:

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & -\gamma g_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \end{vmatrix} = \gamma g_1\vec{e}_x + \frac{\partial g_1}{\partial x}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{j\omega\varepsilon_1}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1}{\partial x\,\partial y} \\ (k_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2})g_1 \\ -\gamma\frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\frac{k_{1y}}{\varepsilon_r}\tan(k_{1y}h) = k_{2y}\tan(k_{2y}(b-h)) \quad (*)$$

Separationsbedingungen:

$$k_{1y}^2 = \omega^2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$$k_{2y}^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$\Rightarrow (*)$ ist eine Bedingungsgleichung, die als einzige Unbekannte γ enthält bei gegebener Frequenz ω

H03/A3

Aufgabe 3

a) $\underline{\vec{A}} = \underline{A}_z \vec{e}_z$ Kugelkoordinaten $\vec{e}_z = \vec{e}_r\cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta\sin\vartheta$

$$\underline{A}_z = \frac{\mu_0 j\omega P}{4\pi}\cdot\frac{e^{-jk_0r}}{r}$$

$$\underline{\vec{A}} = \underbrace{\frac{\mu_0 j\omega P}{4\pi}}_{C}\cdot\frac{e^{-jk_0r}}{r}(\vec{e}_r\cos\vartheta - \vec{e}_\vartheta\sin\vartheta)$$

b) $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0}\underline{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{A}}$

Kugelkoordinaten: $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\vartheta\right]$

$$+\vec{e}_\vartheta\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \dots\right]$$

mit $A_\varphi = 0$ $\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\vartheta = 0$ und $\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{\vec{A}} = \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}C\,e^{-jk_0r}\left(-jk_0(-\sin\vartheta) + \frac{1}{r}\sin\vartheta\right)$$

$$= \vec{e}_\varphi\, e^{-jk_0r}\, C\cdot\sin\vartheta\left(\frac{jk_0}{r} + \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{\approx 0 \text{ für } k_0r \gg 1}\right)$$

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi\cdot\frac{j\omega P}{4\pi}\cdot\frac{e^{-jk_0r}}{r}(jk_0\sin\vartheta)$$

c) $\vec{H} = \frac{1}{Z}(\vec{n}\times\vec{E})$ $\vec{E} = Z(\vec{H}\times\vec{n})$ mit $\vec{n} = \vec{e}_r$

beachte $\vec{H}\perp\vec{e}_r = \vec{n}$ und $\vec{E}\perp\vec{e}_r = \vec{n}$; $\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r = +\vec{e}_\vartheta$

$$\underline{\vec{E}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{j\omega P}{4\pi}\,\frac{e^{-jk_0r}}{r}(jk_0\sin\vartheta)\,\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\frac{j\omega P}{4\pi}\,\frac{e^{-jk_0r}}{r}(jk_0\sin\vartheta)\,\vec{e}_\vartheta \qquad \hat{=}\ \text{Abstrahl}$$

$k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ bzw. $k_0 = \pm\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\omega$ "+" Welle in Richtung von

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{E}} = \frac{\mu_0 j^2\omega^2 P}{4\pi}\,\frac{e^{-jk_0r}}{r}\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta$$

d) $\underline{\vec{A}} = \underline{\vec{A}}_a + \underline{\vec{A}}_b$ $\quad \vec{A}_a$: Vektorpotential des Dipols in $x=h$

$$\underline{\vec{A}}_a = \frac{\mu_0 j\omega \underline{p}}{4\pi} \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}} \vec{e}_z \quad \text{mit } r_a = \sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}$$

$$\underline{\vec{A}}_b = \frac{\mu_0 j\omega \underline{p}'}{4\pi} \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}} \vec{e}_z \quad \text{mit } r_b = \sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}$$

$$\underline{\vec{A}} = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi}\left(\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a} + \underline{p}'\frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b}\right)\vec{e}_z$$

Stetigkeit der Normalkomponente von $\vec{B}$ für $x=0$

$$\underline{B}_{an}(x=0) = \underline{B}_{bn}(x=0) = 0 \Rightarrow \underline{B}(x=0) = 0$$

Bei der gegebenen Anordnung ist $\vec{n} = \vec{e}_x$ (Normalkomponente)

Aus $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ folgt: $\underline{B}_x = \partial_y \underline{B}_z$

d.h. nur folgende Terme müssen berechnet werden

$$\partial_y r_a = \frac{y}{r_a} \qquad \partial_y r_b = \frac{y}{r_b}$$

$$\partial_y e^{-jk_0 r_a} = -\frac{jk_0 y}{r_a} e^{-jk_0 r_a} \qquad \partial_y e^{-jk_0 r_b} = -\frac{jk_0 y}{r_b} e^{-jk_0 r_b}$$

$$\partial_y \underline{A}_z = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi}\left(\underline{p}\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a} + \underline{p}'\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b}\right)$$

$$\underline{B}_x = \frac{\mu_0 j\omega}{4\pi} y\left(\underline{p}\frac{e^{-jk_0 r_a}}{r_a^3}(-jk_0 r_a - 1) + \underline{p}'\frac{e^{-jk_0 r_b}}{r_b^3}(-jk_0 r_b - 1)\right)$$

für $x=0$ gilt: $r_a(x=0) = r_b(x=0) = r_0$

mit $\underline{B}_x = 0$, $x = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{p} = -\underline{p}'$$

$$e^{-jk_0 r_a} = e^{-jk_0\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{1}{2} jk_0 \frac{1}{r_a} \cdot 2y$$

Randbed. bei $y=0$:

$$\vec{E}_{t_1}(y=0) = E_{1x}(y=0)\vec{e}_x \sim \frac{\partial g_{x1}}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$+ E_{1z}(y=0)\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k_{1y}\left(-C_1 \sin(k_{1y}\cdot 0) + D_1 \underbrace{\cos(k_{1x}\cdot 0)}_{=1}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\underbrace{\sin(k_{1y}\cdot 0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow D_1 = 0$$

Randbed. bei $y=b$:

$$\vec{E}_{t_2}(y=b) = E_{2x}(y=b)\vec{e}_x \sim \frac{\partial g_2}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \quad \forall x$$

$$+ E_{2z}(y=0)\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow D_2 = 0$$

$$g_1(x,y,z) = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos(k_{1y}y)\, e^{-\gamma z}$$

$$g_2(x,y,z) = C_2 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos(k_{2y}(b-y))\, e^{-\gamma z}$$

d) Randbedg. a. der dielektr. Grenzfläche $y=h$:

$\forall x$: $\vec{E}_{t_1}(y=h) = \vec{E}_{t_2}(y=h) \Rightarrow E_{x1}(y=h) = E_{x2}(y=h)$ (I)

$E_{z1}(y=h) = E_{z2}(y=h)$ (II)

$\vec{H}_{t_1}(y=h) = \vec{H}_{t_2}(y=h) \Rightarrow H_{x1}(y=h) = H_{x2}(y=h)$ (III)

$H_{z1}(y=h) = H_{z2}(y=h)$ (IV)

(I): $E_{xi} \sim \frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial^2 g_i}{\partial y \partial x} \Rightarrow \boxed{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}k_{1y}\sin(k_{1y}\cdot h) = C_2 k_{2y}\sin(k_{2y}\cdot h)}$ (V)

(II): $E_{zi} \sim \frac{1}{\varepsilon_i}\frac{\partial g_i}{\partial y} \Rightarrow$ keine zusätzliche Info.

(III): $H_{xi} \sim \frac{\partial g_i}{\partial y} \Rightarrow$ keine zusätzliche Info.

(IV): $H_{zi} \sim \frac{\partial g_i}{\partial x} \Rightarrow$ keine zusätzliche Info.

(1) durch (2) teilen

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{k_{1y}}{\varepsilon_r}\tan(k_{1y}h_1) = k_{2y}\tan(k_{2y}(b-h_1))} \quad (*)$$

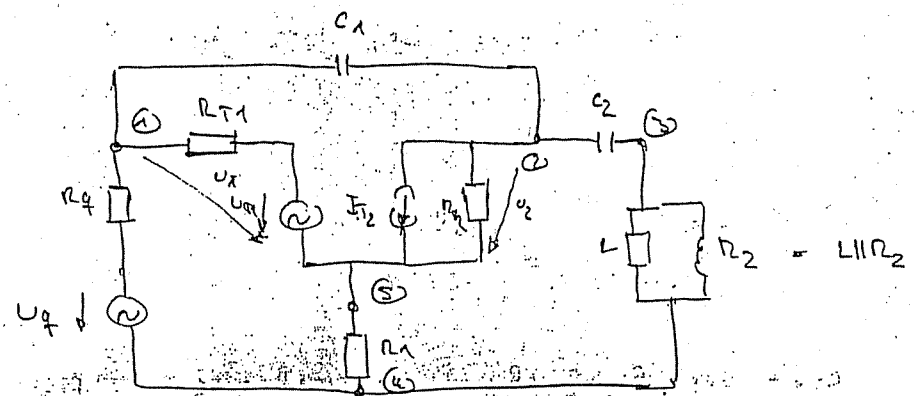
Separationsbedingungen: $k_{1y}^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$

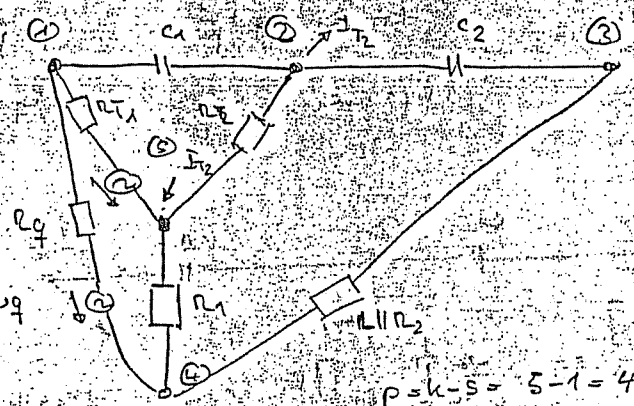
$$k_{2y}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

$\Rightarrow$ (*) ist die Bestimmungsgleichung, die als einzige Unbekannte γ enthält bei gegebener Frequenz ω.

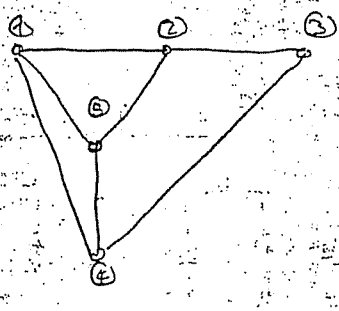
Aufgabe 4

a)





Graph

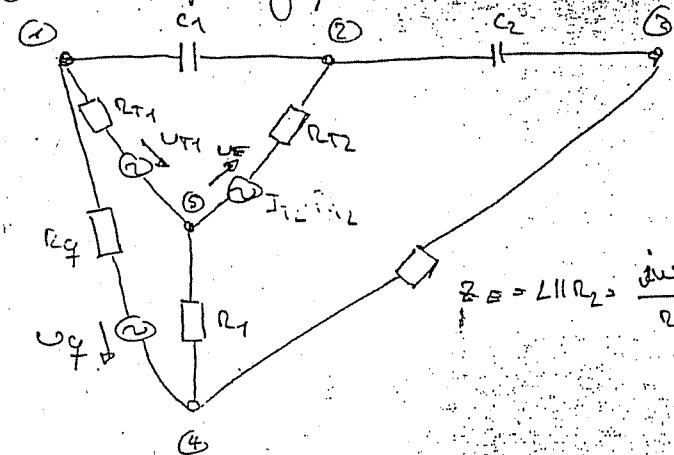


$p = k - s = 5 - 1 = 4$

$m = z - p = 7 - 4 = 3$

b) Maschen-Impedanz-Verfahren

Strom → Spannungsquellen

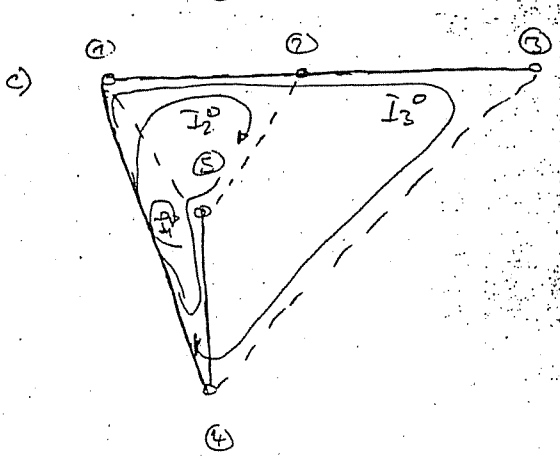


$U_{T1} = H_{12} \cdot U_2 = H_{12} R_{T2} (I_2 - I_{T2})$

$U_o = I_{T2} \cdot R_{T2} = H_{21} \cdot R_{T2} \cdot I_1$

$Z_{ers} = L \| R_2 = \frac{j\omega L \cdot R_2}{R_2 + j\omega L}$

c)



$\underline{I_1^\circ}$: $I_1^\circ \cdot R_{T1} + U_{T1} + R_1(I_1^\circ + I_2^\circ) + R_q(I_1^\circ + I_2^\circ + I_3^\circ) - U_q = 0$

$\underline{I_2^\circ}$: $I_2^\circ \cdot R_{T2} - U_E + R_1(I_1^\circ + I_2^\circ) + R_q(I_1^\circ + I_2^\circ + I_3^\circ) - U_q + (I_2^\circ + I_3^\circ)\frac{1}{j\omega C_1} = 0$

$\underline{I_3^\circ}$: $I_3^\circ \cdot Z_E + (I_1^\circ + I_2^\circ + I_3^\circ)R_q - U_q + (I_2^\circ + I_3^\circ)\frac{1}{j\omega C_1} + I_3^\circ \frac{1}{j\omega C_2} = 0$

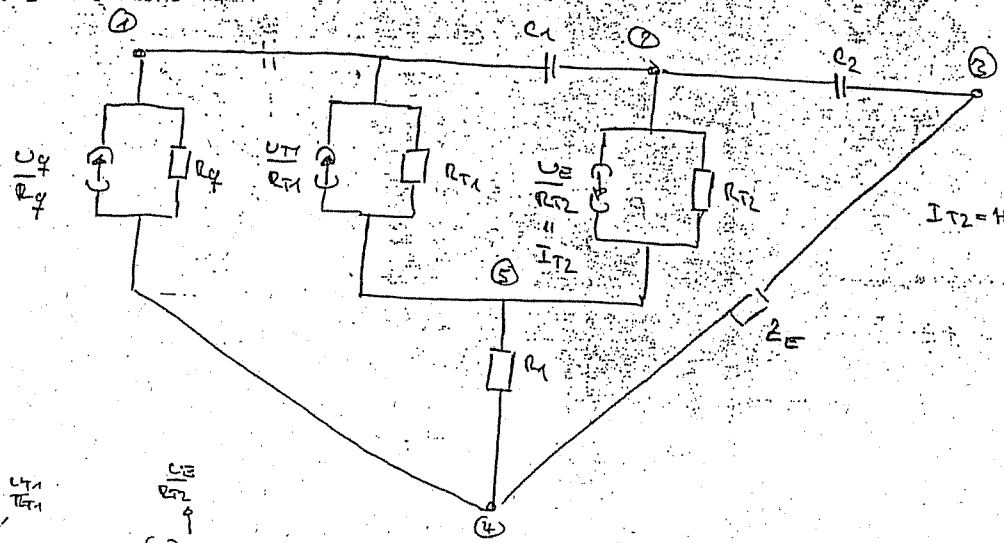
mit $Z_E = \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}$

$U_{T1} = H_{12}(I_2^\circ R_{T2} + \underline{U_E}) = H_{12}\underline{H_{21}}R_{T2}I_2^\circ - H_{21}R_{T2}I_1^\circ)$

$U_E = H_{21}R_{T2}I_1 = H_{21}R_{T2}I_1^\circ$

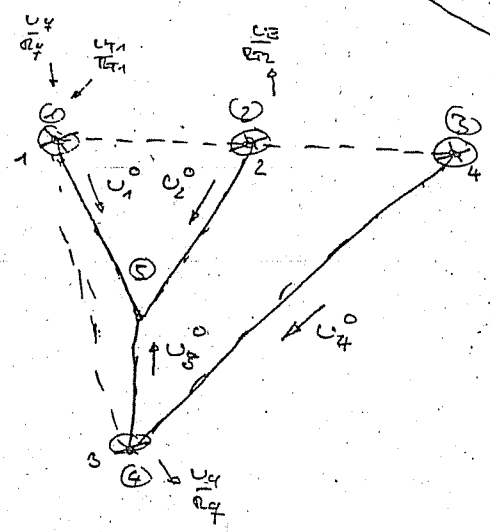
$$\begin{pmatrix} U_q \\ U_q \\ U_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{T1} - H_{21}H_{12}R_{T2} + R_1 + R_q & H_{12}R_{T2} + R_1 + R_q & R_q \\ -H_{21}R_{T2} + R_1 + R_q & R_{T2} + R_1 + R_q + \frac{1}{j\omega C_1} & R_q + \frac{1}{j\omega C_1} \\ R_q & R_q + \frac{1}{j\omega C_1} & Z_E + R_q + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^\circ \\ I_2^\circ \\ I_3^\circ \end{pmatrix}$$

d)



$I_{T2} = H_{21} I_1 = H_{21}\left(\frac{U_1 - U_{T1}}{R_{T1}}\right)$

e)



1Ⓚ : $\frac{U_4}{R_4} + \frac{U_{T1}}{R_{T1}} + (U_2^0 - U_1^0)\cdot j\omega C_1 - U_1^0 \frac{1}{R_{T1}} + (U_3^0 - U_1^0)\cdot \frac{1}{R_4} = 0$

2Ⓚ : $-\frac{U_E}{R_{T2}} - U_2^0 \frac{1}{R_{T2}} - (U_2^0 - U_1^0) j\omega C_1 + (U_4^0 + U_3^0 - U_2^0) j\omega C_2 = 0$

3Ⓚ : $-\frac{U_4}{R_4} + U_4^0 \frac{1}{Z_E} - U_3^0 \cdot \frac{1}{R_1} + (U_1^0 - U_3^0)\frac{1}{R_4} = 0$

4Ⓚ : $-(U_4^0 + U_3^0 - U_2^0) j\omega C_2 - U_4^0 \cdot \frac{1}{Z_E} = 0$

mit $I_{T2} = H_{21}\left(\frac{U_1 - U_{T1}}{R_{T1}}\right) = H_{21}\left(\frac{U_2^0 - U_{T1}}{R_{T1}}\right) = H_{21}\left(\frac{U_1^0 - H_{12}U_2}{R_{T1}}\right) = H_{21}\left(\frac{U_1^0}{R_{T1}} - \frac{H_{12}}{R_{T1}}\cdot U_2^0\right)$

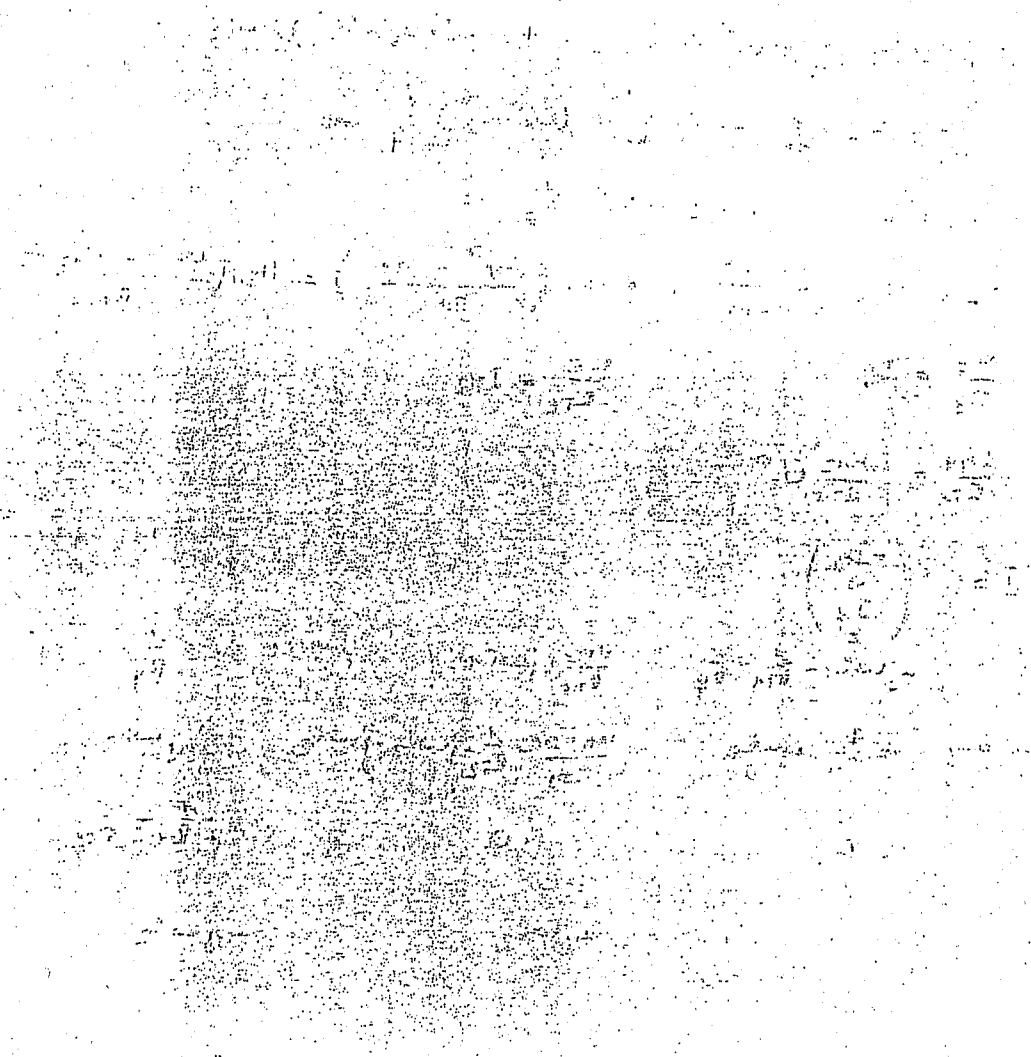
$\frac{U_4}{R_4} = I_4$ $\qquad \frac{U_E}{R_{T2}} = I_{T2}$

$\frac{U_{T1}}{R_{T1}} = \frac{H_{12}}{R_{T1}} U_2^0$

$\underline{I} = \begin{pmatrix} -I_4 \\ 0 \\ I_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} -j\omega C_1 - \frac{1}{R_{T1}} - \frac{1}{R_4} & \frac{H_{12}}{R_{T1}} + j\omega C_1 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ -\frac{H_{21}}{R_{T1}} + j\omega C_1 & \frac{H_{21}H_{12}}{R_{T1}} - \frac{1}{R_{T2}} - j\omega C_1 - j\omega C_2 & j\omega C_2 & j\omega C_2 \\ \frac{1}{R_4} & 0 & -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4} & \frac{1}{Z_E} \\ 0 & +j\omega C_2 & -j\omega C_2 & -j\omega C_2 - \frac{1}{Z_E} \end{pmatrix}$$

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \\ U_4^0 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 5

$L = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

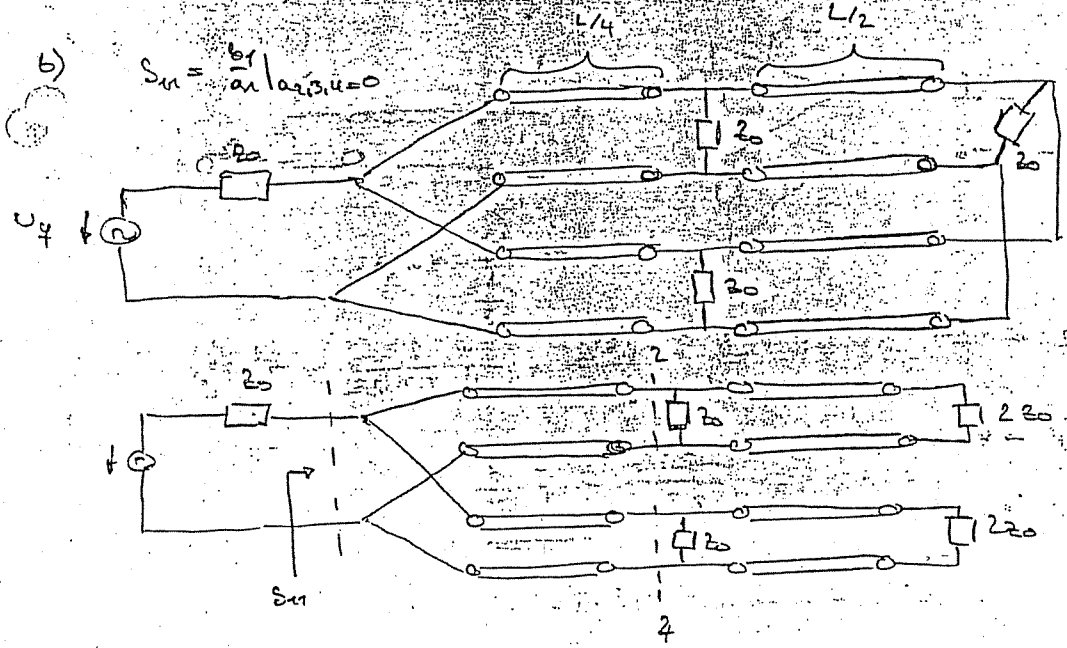
$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & jZ_L \\ \frac{1}{jZ_L} & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Z_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{jZ_L \cdot I_a}{\frac{1}{jZ_L} \cdot U_a} = \frac{Z_L^2}{Z_a}$

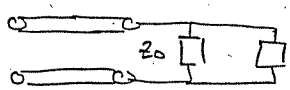
$L = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \beta L = \pi \rightarrow \cos\pi = -1 \quad \sin\pi = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z_e = \frac{-U_a}{-U_e} = Z_a$

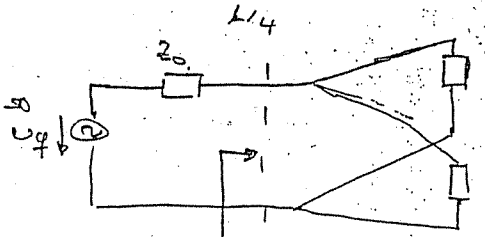
b) $S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2,3,4=0}$



NR:

$\Rightarrow$ 

da $Z_L = Z_a$ bei $L/2$ $\Rightarrow Z_0 \| 2Z_0 = \frac{2Z_0^2}{3Z_0} = \frac{2}{3}Z_0$

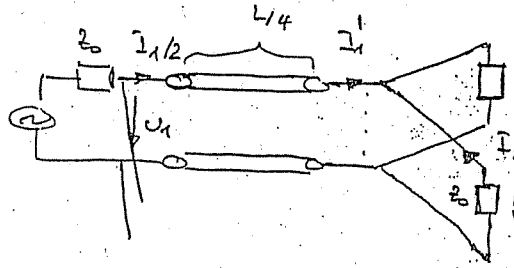


$\frac{Z_L^2}{Z_0 \| 2Z_0} = \frac{(2 \cdot Z_0)^2}{\frac{2}{3}Z_0} = \frac{2Z_0^2}{Z_0} = 2Z_0$

$2Z_0 \Rightarrow \frac{U_1}{I_1} = 2Z_0 \| 2Z_0 = Z_0$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{1/2(U_1 - Z_0 I_1)}{1/2(U_1 + Z_0 I_1)} = \frac{\frac{U_1}{I_1} - Z_0}{\frac{U_1}{I_1} + Z_0} = \underline{0}$

c) $S_{21} = S_{41} = \frac{U_2}{a_L} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{\frac{U_1}{I_2} - Z_0}{\frac{U_1}{I_1} + Z_0}$



$A = \begin{pmatrix} 0 & j Z_L \\ \frac{j}{Z_L} & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{U_2}{I_2} = -Z_0 \quad \rightarrow U_2 = \frac{Z_L}{j} \cdot \frac{I_1}{2}$

$\rightarrow U_2 = \frac{Z_L}{j} \cdot \frac{I_1}{2}$

$\rightarrow S_{21} = j \frac{1}{T_3} \frac{-2Z_0}{2Z_0} = -j \frac{1}{T_3}$

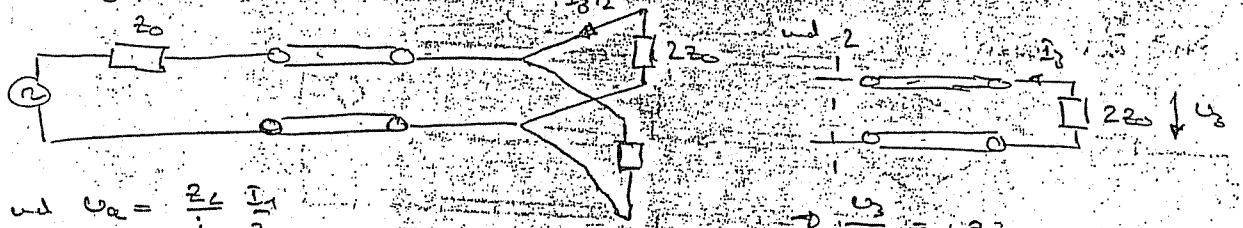
$\rightarrow Z_0 \; I_2 = -\frac{Z_L}{j} \frac{I_1}{2} = j Z_L \frac{I_1}{2}$

$\rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{2} j Z_L = \frac{1}{2} j \frac{2 \cdot Z_0}{T_3 Z_0} = j \frac{1}{T_3 Z_0}$

wg. Symmetrie: $S_{41} = -j \frac{1}{T_3}$

$= -j \frac{1}{T_3}$

d) analog zu c



$\rightarrow U_a = \frac{Z_L}{j} \frac{I_1}{2} \rightarrow \frac{U_3}{\frac{I_3}{2}} = -Z_0$

$\rightarrow + I_3 Z_0 = \frac{Z_L}{j} \frac{I_1}{2} \rightarrow \frac{I_3}{I_1} = -\frac{Z_L}{j Z_0} = -j \frac{2 Z_0}{T_3 \cdot 2 Z_0} = -j \frac{1}{T_3}$

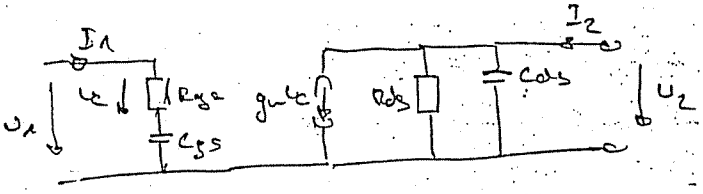
$\rightarrow S_{31} = \frac{I_3}{I_1} \cdot \frac{\frac{U_3}{I_2} - Z_0}{\frac{U_1}{I_1} + Z_0} = +j \frac{1}{T_3} \cdot \frac{-2Z_0}{2Z_0} = -j \frac{1}{T_3}$

e) Leistung teilt sich gleichmäßig auf: $|P_2| = |P_3| = |P_4| = |\frac{1}{3} P_1|$

Aufgabe 6

$f_0 = 5\,GHz$ $\quad Z_0 = 50\,\Omega$

a)



$z_{11} = R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} = (0{,}04 - j\,0{,}07)\,\Omega \Rightarrow 2\,\Omega - j\,3{,}5\,\Omega \Rightarrow R_{gs} = 2\,\Omega$ $\quad \omega C_{gs} = 0{,}286$ $\quad 1{,}50$

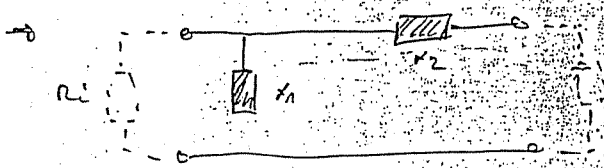
$y_{22} = \frac{1}{R_{ds}} + j\omega C_{ds} = (0{,}57 + j\,0{,}9)\,S \Rightarrow$

$= (0{,}011 + j\,0{,}018)\,S \Rightarrow \omega C_{ds} = 0{,}018\,S$

$R_{ds} = 90\,\Omega$

b) $Z_L = 50\,\Omega$

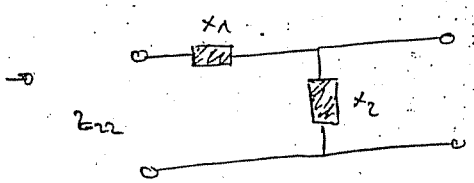
$z_{11}^* = (0{,}04 + j\,0{,}07)\,\Omega$ $\quad z_i = 1\,\Omega$



$\Rightarrow x_1 = \underline{0{,}218}$

$x_2 = -0{,}22 + 0{,}261 = \underline{0{,}041}$

c) $Z_L = 1\,\Omega$ $\quad y_{22} = (0{,}55 - j\,0{,}9)\,S$



$x_2 = \underline{-j}$

$x_1 = j(0{,}9 - 0{,}5) = \underline{j\,0{,}3}$

d) $\frac{P}{P_{reaf}} = 1 - |\Gamma|^2$

$f \to 0 \Rightarrow$ Elektrische Länge $\to 0 \Rightarrow |\Gamma| = 0{,}92$

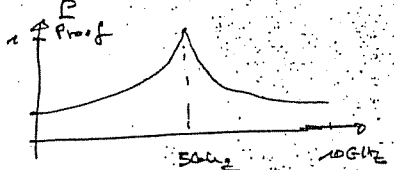
$f \to 5\,GHz \Rightarrow$ optimale Anpassung $\to |\Gamma| = 0$

$f = 10\,GHz \Rightarrow$ doppelte Elektrische Länge $\Rightarrow l_p = 2 \cdot 0{,}218 = 0{,}436$

$l_s = 0{,}082$

für $l_p \to -j\,0{,}42$

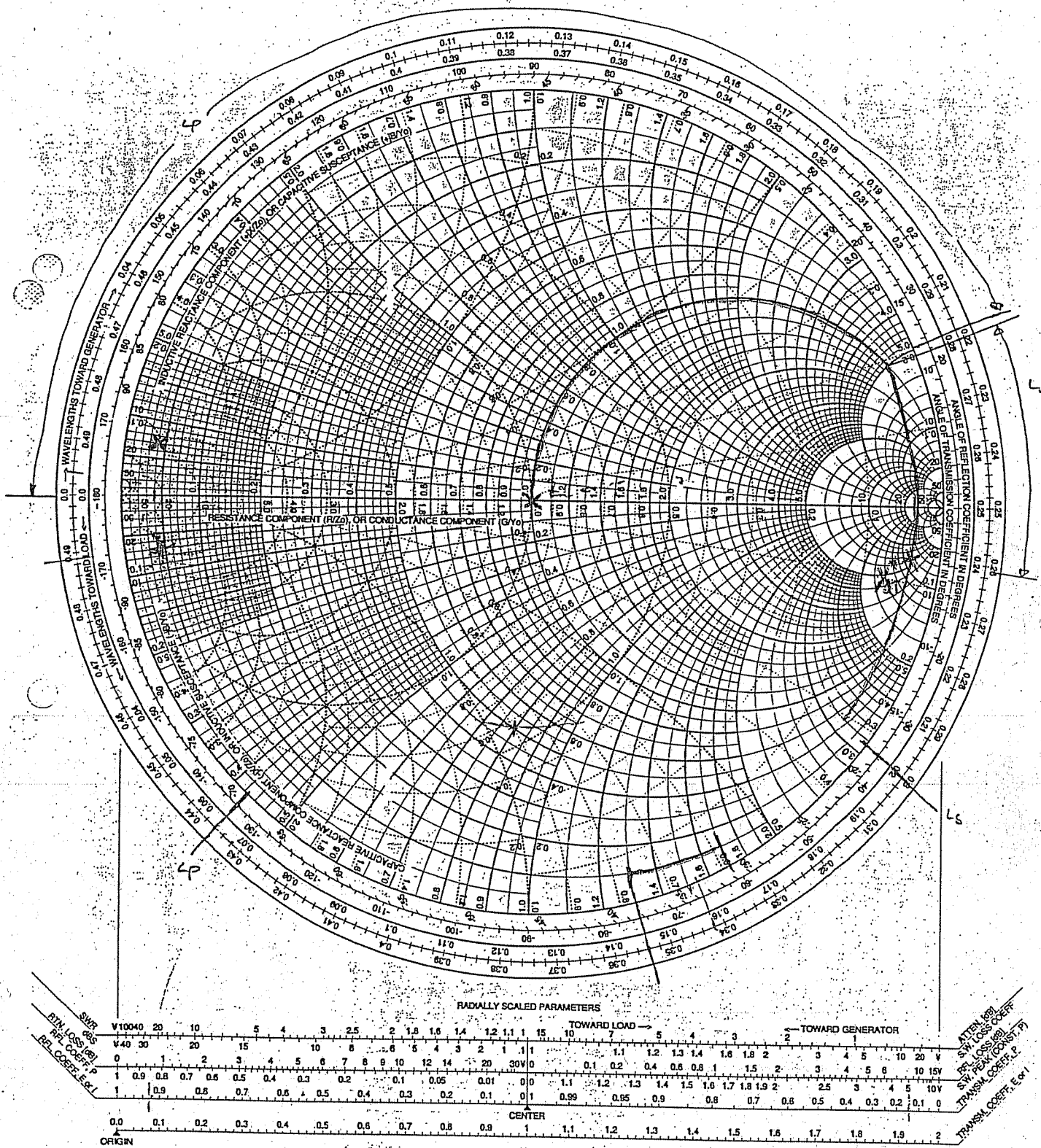
$l_s \to -j\,1{,}3$ $\quad \Rightarrow 1{,}3 - 0{,}42 = 1{,}72 \Rightarrow \Gamma = 0{,}93 \Rightarrow \frac{P}{P_{reaf}} = 0{,}15$



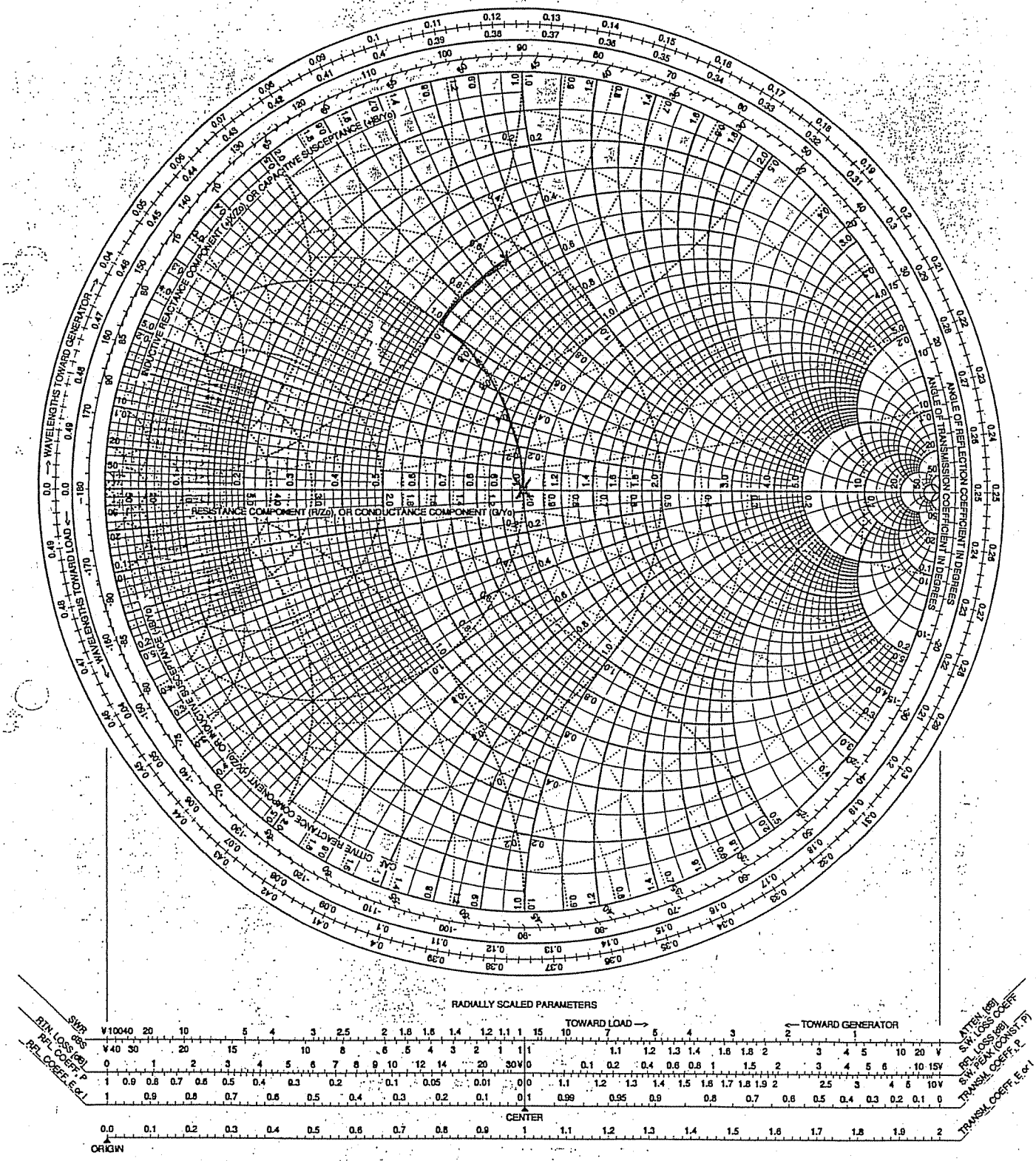
e) $z_1' = 0{,}04 - j\,0{,}07$

$\frac{l_{p1}}{\lambda} = 0{,}016$ short $\quad \frac{l_s}{\lambda} = 0{,}062$ $\quad \frac{l_{p2}}{\lambda} = 0{,}176$ open

The Complete Smith Chart (ZY)



The Complete Smith Chart (ZY)



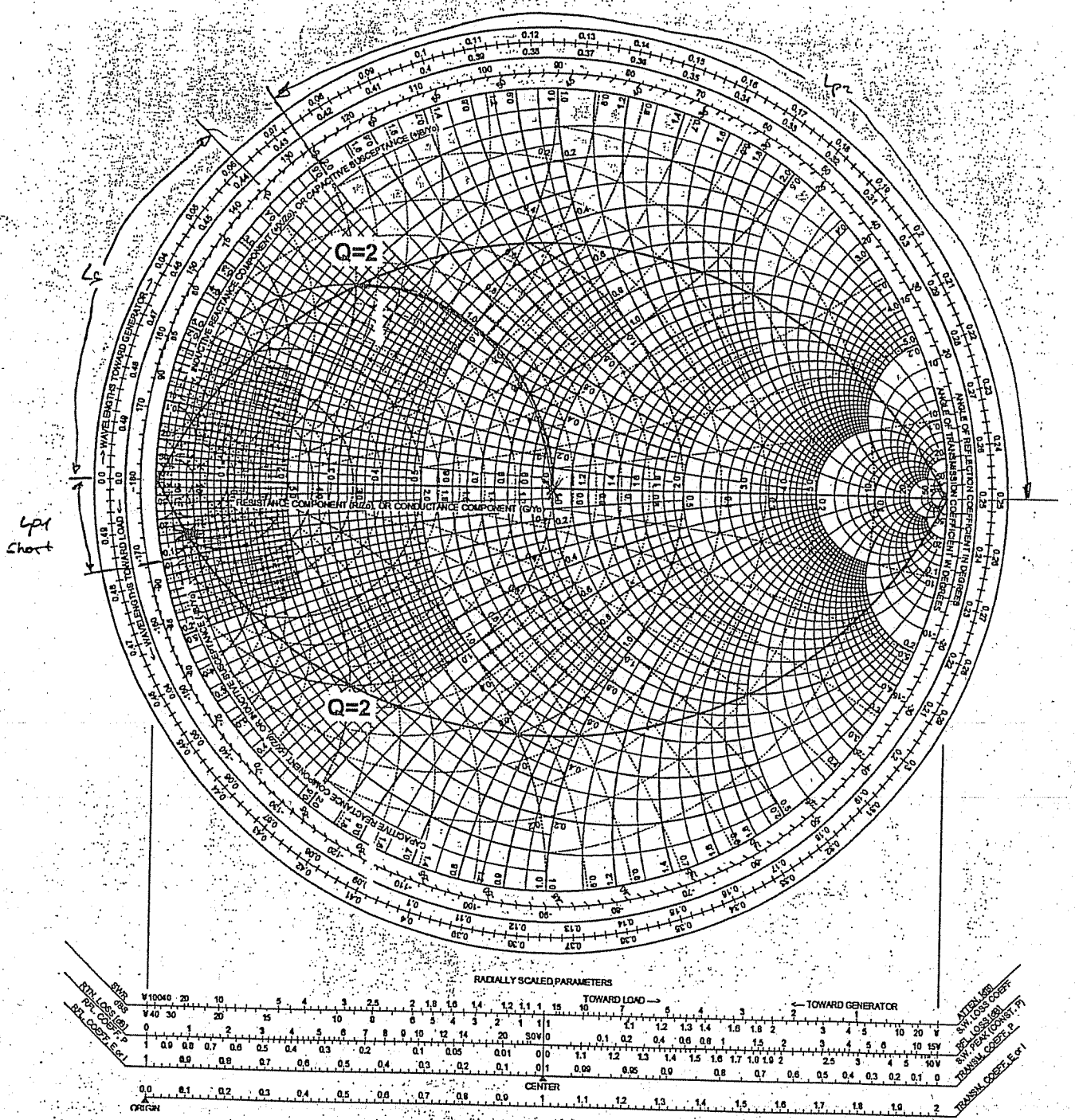
Institut für Theoretische Elektrotechnik
Rhein.-Westfäl. Techn. Hochschule Aachen
Prof. Dr.-Ing. Rolf H. Jansen

Herbst 2002

KLAUSURAUFGABEN "ELEKROMAGNETISCHE FELDER 2 (EE)" DPO 98

Hilfsblatt 3 zu Aufgabe 6

Name: _____ Matr.Nr.: _____



LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
FRÜHJAHR 2002

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\underline{\vec{H}}$$
$$\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}} \approx \sigma\underline{\vec{E}}$$
$$\varepsilon \operatorname{div}\underline{\vec{E}} = 0$$
$$\mu \operatorname{div}\underline{\vec{H}} = 0$$

folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \sigma(\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}) = -j\omega\mu\sigma\underline{\vec{H}}$$

Mit der Identität $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\vec{H}} - \Delta\underline{\vec{H}}$ und den Materialparametern der beiden Gebiete folgt die Differenzialgleichung

$$\Delta\underline{\vec{H}}_n - j\omega\mu_0\sigma_n\underline{\vec{H}}_n = \vec{0} \qquad n = 1,2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\underline{\vec{H}}_n - \underline{k}_n^2\underline{\vec{H}}_n = \vec{0} \qquad \text{mit} \quad \underline{k}_n := \frac{1-j}{\delta_n} \qquad \text{und} \quad \delta_n := \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_n}}$$

b). Aufgrund der Quasistationarität hängt $\underline{\vec{H}}_n$ nicht von z ab. Da der Leiter sehr breit ist ($b \gg a+d$), können wir die Abhängigkeit von x vernachlässigen. $\underline{\vec{H}}_n$ hängt also nur von y ab.
Mit dieser Einschränkung ist

$$\underline{\vec{J}}_n = \operatorname{rot}\underline{\vec{H}}_n = \frac{\partial\underline{H}_{nz}}{\partial y}\vec{e}_x - \frac{\partial\underline{H}_{nx}}{\partial y}\vec{e}_z$$

Da $\underline{\vec{J}}_n$ nur eine $z-$Komponente besitzt, folgt $\underline{H}_{nz} = 0$ und damit der folgende Ansatz für die magnetische Feldstärke:

$$\underline{\vec{H}}_n = \underline{H}_{nx}(y)\,\vec{e}_x$$

c).

$$\Delta\underline{\vec{H}}_n - \underline{k}_n^2\underline{\vec{H}} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\underline{H}_{nx}}{\partial y^2} + \underline{k}_n^2\underline{H}_{nx} = 0$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

$$\underline{H}_{1x} = \underline{A}\cos(\underline{k}_1 y) + \underline{B}\sin(\underline{k}_1 y)$$
$$\underline{H}_{2x} = \underline{C}\cos\big(\underline{k}_2(y-a)\big) + \underline{D}\sin\big(\underline{k}_2(y-a)\big)$$

wobei $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ beliebige komplexe Konstanten sind.

d). Mit $\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\underline{H}_x}{\partial y}\vec{e}_z$ erhalten wir für die elektrische Feldstärke:

$$\underline{\vec{E}}_1 = \frac{\underline{k}_1}{\sigma_1}\Big(\underline{A}\sin(\underline{k}_1 y) - \underline{B}\cos(\underline{k}_1 y)\Big)\vec{e}_z$$
$$\underline{\vec{E}}_2 = \frac{\underline{k}_2}{\sigma_2}\Big(\underline{C}\sin\big(\underline{k}_2(y-a)\big) - \underline{D}\cos\big(\underline{k}_2(y-a)\big)\Big)\vec{e}_z$$

e). An den Grenzflächen bei $y = 0$ und $y = a$ müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke, also $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_x$, stetig sein. Da im Bereich 4 wegen $\mu_4 \to \infty$ kein magnetisches Feld vorhanden ist, erhalten wir als erste Gleichung:

$$\begin{aligned} & \underline{H}_{1x}\big|_{y=0} = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \underline{A} = 0 \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der magnetischen Feldstärke bei $y = a$ folgt die Gleichung

$$\underline{B}\sin(\underline{k}_1 a) = \underline{C}$$

und aus der Stetigkeit der elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned} & -\frac{\underline{k}_1}{\sigma_1}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) = -\frac{\underline{k}_2}{\sigma_2}\underline{D} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}\underline{D} \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\underline{B}\cos(\underline{k}_1 a) = \underline{D} \end{aligned}$$

Der Strom und die magnetische Feldstärke sind verknüpft über die Gleichung

$$\oint \vec{\underline{H}}\, d\vec{s} = \hat{\underline{I}}$$

Da $\vec{\underline{H}}$ nur eine $x-$Komponente hat, liefern die beiden Schmalseiten des Leiters keinen Beitrag zum Integral, genau wie die Unterseite, da hier $\vec{\underline{H}} = 0$ ist. Es bleibt also:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{I}} &= -\int_0^b \underline{H}_{2x}\big|_{y=a+d}\, dx \\ &= -b\big(\underline{C}\cos(\underline{k}_2 d) + \underline{D}\sin(\underline{k}_2 d)\big) \end{aligned}$$

Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem ($\underline{A} = 0$ weggelassen):

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos(\underline{k}_2 d) & \sin(\underline{k}_2 d) \\ \sin(\underline{k}_1 a) & -1 & 0 \\ \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\cos(\underline{k}_1 a) & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{B} \\ \underline{C} \\ \underline{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{I}}{b} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a). Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\Delta + k^2\right) \underline{g} = 0 \qquad \text{mit } k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\ \Rightarrow \quad & \left(\Delta_t + p^2\right) \underline{g} = 0 \qquad \text{mit } p^2 = \underline{\gamma}^2 + k^2 \end{aligned}$$

Bei einer TEM-Welle ist $p = 0$:

$$\begin{aligned} & \Delta_t \underline{g} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{da } \underline{g} \text{ nicht von } x \text{ abhängt} \end{aligned}$$

Für $\underline{\gamma}$ ergibt sich der Wert

$$\underline{\gamma} = \sqrt{-k^2} = jk$$

b).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \underline{g}}{\partial y^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & G''(y)\,\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} = G''(y)\,\mathrm{e}^{-jkz} = 0 \\ \Rightarrow \quad & G''(y) = 0 \\ \Rightarrow \quad & G(y) = Ay + B \\ \Rightarrow \quad & g(y,z) = (Ay + B)\,\mathrm{e}^{-jkz} \end{aligned}$$

Dabei sind A und B beliebige Konstanten.
Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung erhalten wir für die elektrische Feldstärke:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\underline{\gamma}}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \underline{g}(y,z) \\ &= -\frac{k}{\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \underline{g}(y,z) \vec{e}_y \\ &= -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\varepsilon} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y \\ &= -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y \end{aligned}$$

Bei einer TEM-Welle können wir die magnetische Feldstärke berechnen über

$$\begin{aligned} \underline{\vec{H}} &= \frac{1}{Z}\,\vec{n} \times \underline{\vec{E}} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{e}_z \times \left(-\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_y\right) \\ &= A\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_x \end{aligned}$$

c).

$$\begin{aligned}\underline{U}^+(z) &= -\int_0^b \underline{E}_y\,dy \\ &= \int_0^b \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}A\,\mathrm{e}^{-jkz} \\ &= b\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}A\,\mathrm{e}^{-jkz} \\ \underline{I}^+(z) &= \int_0^a \underline{H}_x\,dy \\ &= \int_0^a A\,\mathrm{e}^{-jkz} \\ &= aA\,\mathrm{e}^{-jkz}\end{aligned}$$

d).

$$\begin{aligned}Z_L &= \frac{\underline{U}^+(z)}{\underline{I}^+(z)} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ Z_F &= \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} \qquad \text{gilt für TEM-Wellen} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\end{aligned}$$

e). Bei verlustfreien Leitungen ($R' = G' = 0$) gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dz} &= -j\omega L' I \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{1}{-j\omega I}\frac{dU}{dz} \\ \frac{dI}{dz} &= -j\omega C' U \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{1}{-j\omega U}\frac{dI}{dz}\end{aligned}$$

Daraus folgt in unserem Fall

$$\begin{aligned}L' &= \frac{1}{-j\omega aA\,\mathrm{e}^{-jkz}} b\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}A(-jk)\,\mathrm{e}^{-jkz} \\ &= \frac{kb}{\omega a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ &= \mu\frac{b}{a} \\ C' &= \frac{1}{-j\omega b\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}A\,\mathrm{e}^{-jkz}} aA(-jk)\,\mathrm{e}^{-jkz} \\ &= \frac{ka}{\omega b}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \\ &= \varepsilon\frac{a}{b}\end{aligned}$$

f).

$$Z_L = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Aufgabe 3

a).

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_n &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}_n\,, \qquad n=1,2\\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}}\left(j\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}\,h_n(x)\vec{e}_x + h_n'(x)\vec{e}_z\right)\\ &= \mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}}\left(\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_0}}\,h_n(x)\vec{e}_x + \frac{h_n'(x)}{j\omega\varepsilon_0}\vec{e}_z\right)\end{aligned}$$

b). Da das elektrische Feld auf idealen Leitern senkrecht steht, muss $\underline{E}_{1z}\big|_{x=0} = \underline{E}_{2z}\big|_{x=2d} = 0$ sein. Daraus folgt als Grenzbedingung für $h_n(x)$:

$$h_1'(0) = h_2'(2d) = 0$$

c).

$$\begin{aligned}& & \Delta\underline{\vec{H}}_n + k_n^2\underline{\vec{H}}_n &= \vec{0} \qquad \text{mit } k_n = \omega\sqrt{\mu_n\varepsilon_0}\\ \Rightarrow & & \Delta\underline{H}_{ny} + k_n^2\underline{H}_{ny} &= 0\\ \Rightarrow & h_n''(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} - \omega^2\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0 h_n(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} + \omega^2\mu_n\varepsilon_0 h_n(x)\,\mathrm{e}^{-jz\omega\sqrt{\mu_{\mathrm{eff}}\varepsilon_0}} &= 0\\ \Rightarrow & & h_n''(x) + \omega^2\varepsilon_0(\mu_n - \mu_{\mathrm{eff}})h_n(x) &= 0\\ \Rightarrow & & h_n''(x) + p_n^2 h_n(x) &= 0\end{aligned}$$

Unter der Bedingung $k_n \neq 0$ lautet also die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \underline{A}\cos(p_1x) + \underline{B}\sin(p_1x)\\ h_2(x) &= \underline{C}\cos\big(p_2(2d-x)\big) + \underline{D}\sin\big(p_2(2d-x)\big)\end{aligned}$$

Dabei sind $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ beliebige komplexe Konstanten.
Aus der Grenzbedingung von Punkt b) folgt

$$\underline{B} = \underline{D} = 0$$

und somit das Ergebnis

$$\begin{aligned}h_1(x) &= \underline{A}\cos(p_1x)\\ h_2(x) &= \underline{C}\cos\big(p_2(2d-x)\big)\end{aligned}$$

d). An Grenzflächen sind die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke stetig, also

$$\begin{aligned}& \underline{H}_{1y}\big|_{x=d} &&= \underline{H}_{2y}\big|_{x=d}\\ \Rightarrow\ & h_1(d) &&= h_2(d)\\ \Rightarrow\ & \underline{A}\cos(p_1d) &&= \underline{C}\cos(p_sd)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \underline{E}_{1z}\big|_{x=d} &&= \underline{E}_{2z}\big|_{x=d}\\ \Rightarrow\ & h_1'(d) &&= h_2'(d)\\ \Rightarrow\ & -\underline{A}p_1\cos(p_1d) &&= \underline{C}p_2\cos(p_2d)\end{aligned}$$

Division dieser beiden Gleichungen liefert die gesuchte Eigenwertgleichung für μ_{eff}:

$$\begin{aligned}& -p_1\tan(p_1d) &&= p_2\tan(p_2d)\\ \Rightarrow\ & -\sqrt{\mu_1-\mu_{\mathrm{eff}}}\,\tan\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_1-\mu_{\mathrm{eff}})}\,d\right) &&= \sqrt{\mu_2-\mu_{\mathrm{eff}}}\,\tan\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_2-\mu_{\mathrm{eff}})}\,d\right)\end{aligned}$$

e). Für $\omega \to 0$ geht die Eigenwertgleichung über in

$$-\sqrt{\mu_1 - \mu_{\text{eff}}}\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_1 - \mu_{\text{eff}})}\,d\right) = \sqrt{\mu_2 - \mu_{\text{eff}}}\left(\omega\sqrt{\varepsilon_0(\mu_2 - \mu_{\text{eff}})}\,d\right)$$

$$\Rightarrow \quad -(\mu_1 - \mu_{\text{eff}}) = \mu_2 - \mu_{\text{eff}}$$

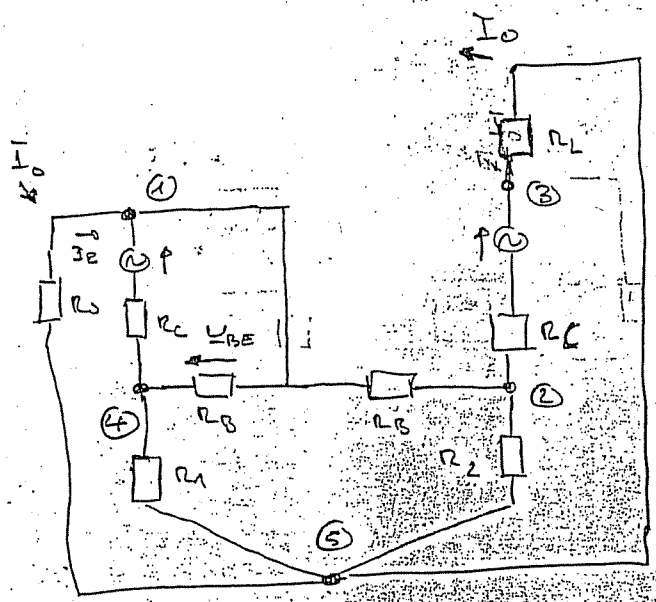
$$\Rightarrow \quad \mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist

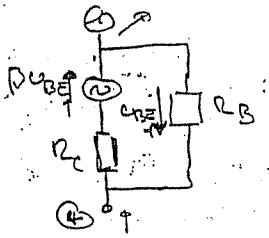
$$\begin{aligned} v_{\text{ph}} &= \frac{\omega}{\beta} \\ &= \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_{\text{eff}}}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0(\mu_1 + \mu_2)}} \end{aligned}$$

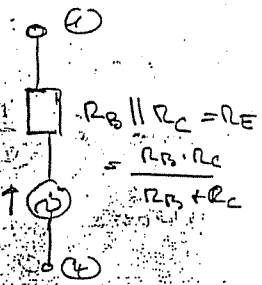
Aufgabe 4

a)



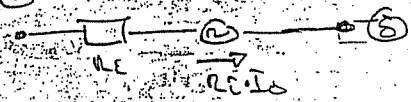
Umwandlung

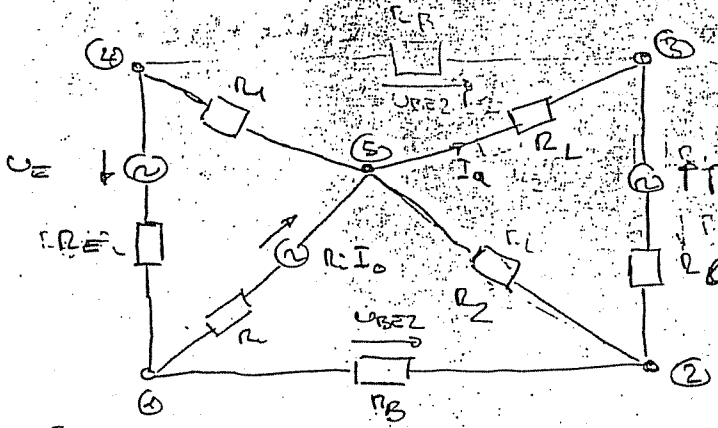




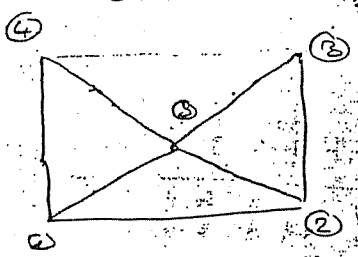
$$U_E = \beta U_{BE} \cdot \frac{R_B \cdot R_C}{R_B + R_C} = \beta U_{BE} \frac{R_B}{R_B + R_C}$$

Strom I_0 im Spaziergang Pfad (4) –



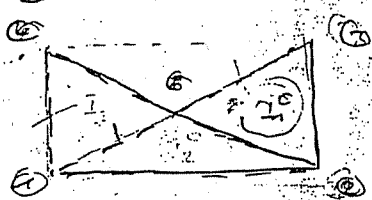


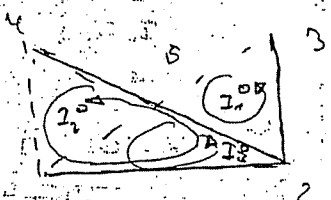
b)



$p - k - 0 = 5 - 1 = 4$

$m = z - p = 7 - 4 = 3$





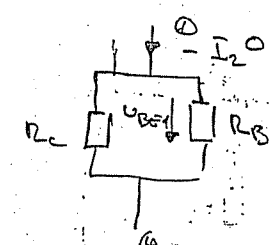
c)

c) $\underline{I_1^0}$: $I_1^0 \cdot R_L + (I_1^0 - I_B^0 - I_2^0) R_2 + I_1 \cdot R_L + \beta U_{BE2} = 0$

$\underline{I_2^0}$: $U_E + I_2^0 R_E + (I_2^0 + I_3^0) R_B + (I_2^0 + I_3^0 - I_1^0) R_2 + I_2^0 \cdot R_1$

I_B^0: $I_3^0 R_L - I_3 R_L + (I_2^0 + I_3^0) R_B + (I_2^0 + I_3^0 - I_1^0) R_2$

$U_E = \beta U_{BE1} \cdot \frac{R_B}{R_C + R_B}$ U_{BE1} mit Strombilanz



$= -\beta \frac{-R_C I_2^0}{R_B \cdot (R_C + R_B)} \cdot \frac{R_B}{(R_C + R_B)} \Rightarrow U_{BE1} \frac{1}{R_B} = -I_2^0 \cdot \frac{R_C}{R_C + R_B}$

$= -\beta \frac{I_B^2 R_C}{(R_C + R_B)^2} \cdot I_2^0$

$\beta U_{BE2} = \beta \cdot (I_2^0 + I_3^0) R_B$

$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 R_i \end{pmatrix}$

$Z = \begin{pmatrix} 2R_L + R_2 & -R_2 + \beta R_B \frac{R_C}{R_C + R_B} & -R_2 + \beta R_B \\ -R_2 & -\beta \frac{R_B^2 \cdot R_C}{(R_C + R_B)^2} + R_E + R_B + R_2 + R_1 & R_B + R_2 \\ -R_2 & R_B + R_2 & R_i + R_B + R_2 \end{pmatrix}$

$I^0 = \begin{pmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \\ I_3^0 \end{pmatrix}$

d) $I_a = -I_1^0$ $I_c = I_B^0$ $Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

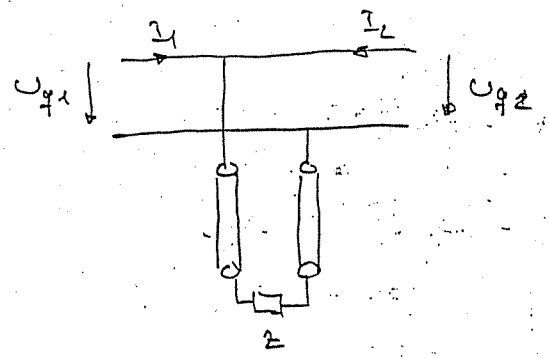
$\alpha = \frac{I_a}{I_e} = \frac{-\det \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ I_3 R_i & h & i \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & I_3 R_i \end{vmatrix}} = -\frac{\det \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$

$= -\frac{\beta \det \begin{vmatrix} R_B & R_B \\ -\frac{R_B^2 R_C}{(R_B + R_C)^2} & 0 \end{vmatrix}}{\beta \det \begin{vmatrix} 0 & R_B \\ 0 & \frac{R_B^2 R_C}{(R_C + R_B)^2} \end{vmatrix}}$

mit $\beta \to \infty$?

Aufgabe 5:

a)



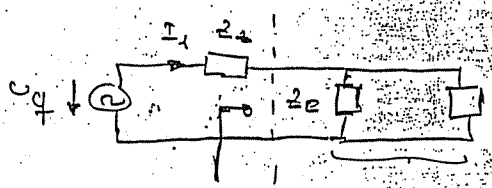
Symmetrie $S_{11} = S_{22}$

Reziprozität $S_{12} = S_{21}$

passiv $|S_{12}|^2 + |S_{21}|^2 \leq 1$

b) $$Z_e = \frac{Z + Z_0 \tanh(\gamma_0 l_s)}{\frac{Z}{Z_0}\tanh(\gamma_0 l_s) + 1}$$

c)

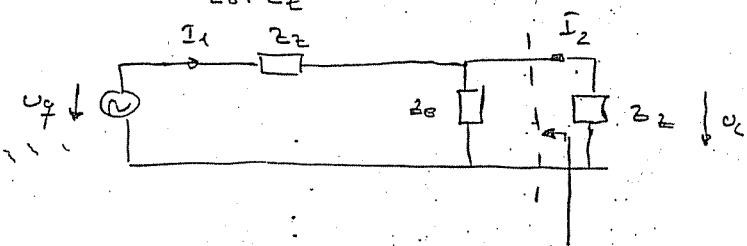


$$Z_e \parallel Z_L = \frac{Z_e \cdot Z_L}{Z_e + Z_L}$$

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{I_1} - Z_L\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{I_1} + Z_L\right)} = \frac{(Z_e \parallel Z_L) - Z_L}{(Z_e \parallel Z_L) + Z_L}$$

$$= \frac{\frac{Z_e \cdot Z_L}{Z_e + Z_L} - Z_L}{\frac{Z_e \cdot Z_L}{Z_e + Z_L} + Z_L} = \frac{Z_e \cdot Z_L - (Z_e + Z_L) Z_L}{Z_e \cdot Z_L + Z_L (Z_e + Z_L)} = \frac{-Z_L^2}{2 Z_e Z_L + Z_L^2}$$

d)



$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{\frac{I_2}{I_1} \cdot \left(\frac{U_2}{I_2} - Z_L\right)}{\left(\frac{U_1}{I_1} + Z_L\right)}$$

$$\frac{U_2}{I_2} = -Z_L$$

$$I_2 = -\frac{Z_e}{Z_e + Z_L} I_1$$

$$= \frac{-\frac{Z_e}{Z_e + Z_L}(-2Z_L)}{\frac{Z_e \cdot Z_L}{Z_e + Z_L} + Z_L} = \frac{2 Z_e}{Z_e + Z_e + Z_L} = \frac{2 Z_e}{2 Z_e + Z_L}$$

Damit $S_{21} = 0$ muss $Z_e = 0$ sein

e) $\varepsilon_{eff} = 9 \quad l_s = 2{,}5\,mm$

$$z_{2,1=0} = z_e = \frac{\cosh(\gamma_s l_s)\cdot U_a + Z_s \sinh(\gamma_s l_s) I_a}{\frac{1}{Z_s}\sinh(\gamma_s l_s) U_a + \cosh(\gamma_s l_a) I_a}$$

$$\Rightarrow \cosh(\gamma_s l_s)\cdot \infty + Z_s \sinh(\gamma_s l_s) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \infty \cosh(\gamma_s l_s) = -Z_s \sinh(\gamma_s l_s) \qquad Z_s \to 0 \quad \Rightarrow \cosh(\gamma_s l_s) = 0$$

$$\gamma_s = j\beta_s = j\frac{2\pi}{\lambda_s} \rightarrow \gamma_s l_s = j\frac{2\pi}{\lambda_s} l_s$$

$$\Rightarrow \cosh\left(j\frac{2\pi}{\lambda_s} l_s\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_s} l_s\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_s}\cdot l_s = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_s = 4 l_s = 10\,mm$$

$$\lambda = \frac{v_{ph}}{f} \Rightarrow f = \frac{v_{ph}}{\lambda} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\cdot\lambda} = \underline{\underline{10\ GHz}}$$

$$v_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Aufgabe 6

$$z_{11} = R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} = (10 - j\,100)\,\Omega$$

$$z_{22} = \frac{R_{ds} \cdot \frac{1}{j\omega C_{ds}}}{R_{ds} + \frac{1}{j\omega C_{ds}}} = \frac{R_{ds}}{1 + j\omega R_{ds} C_{ds}} = (100 - j\,100)\,\Omega$$

$z_{12} = 0$

$$U_{gs} = z_{11} \cdot I_g + z_{12} I_d$$

$$= (I_d - g_m U_c) \cdot z_{11} = \left(I_d - g_m \frac{I_g}{j\omega C_{gs}}\right) z_{11}$$

$$\Rightarrow z_{11} = -\frac{g_m \cdot z_{11}}{j\omega C_{gs}} = (200 + j\,200)\,\Omega$$

b) $Z_{0f} = 50\,\Omega$

$\Rightarrow z_{11} = (0{,}2 - j\,2)\,\Omega \rightarrow S_{11} = 0{,}92 \cdot \exp(\angle -58°)$

$z_{22} = (2 - j\,2)\,\Omega \quad S_{22} = 0{,}62 \cdot \exp(\angle 30°)$

$[\, z_{12} = 4 + j\,4\,\Omega \quad S_{21} = 0{,}78 \cdot \exp(\angle 5°)$] nicht wichtig

d) $z_{22} = 150\,\Omega - j\,100\,\Omega \rightarrow z_{22}' = 3\,\Omega + j\,2\,\Omega = Z_{in}$

$Z_{out} = 1\,\Omega$

$$\frac{L_P}{\lambda} = -0{,}25 + 0{,}334 = 0{,}089$$

$$\frac{L_S}{\lambda} = -0{,}322 + 0{,}476 = 0{,}154$$

c) Nicht mehr unilateral $\rightarrow S_{12}$ abhängig von $C_{gs}, R_{gs}, g_m, C_{gd}$

e) $\frac{L_P}{\lambda} = 0{,}164$ kürzeste Leitung Bauteil bedingt da kürzer da Wachstum von λ dann nicht so groß ist

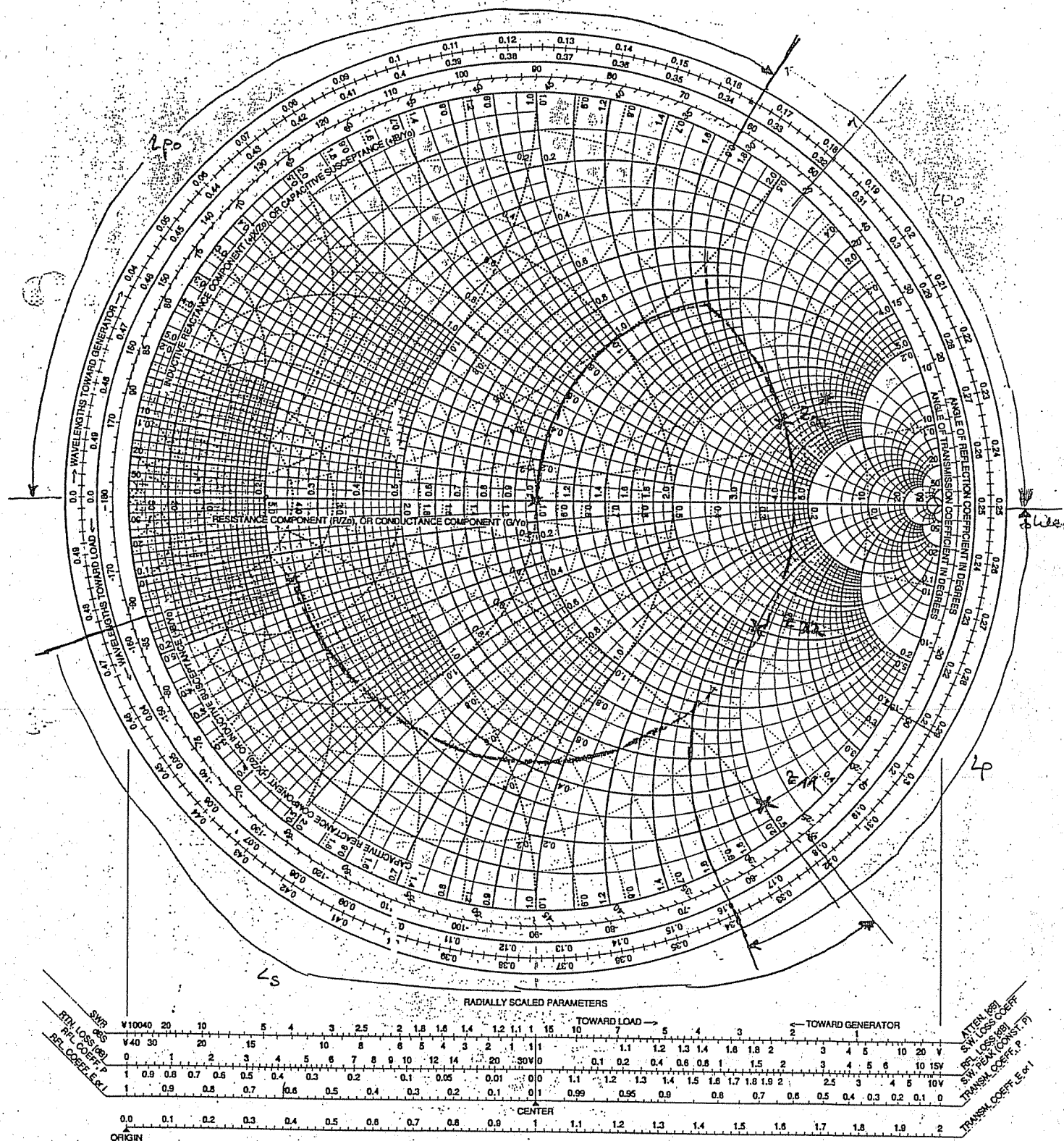
f) $P_{in} = 10\,\mu W \quad P_{out} = ?$

$$P_{out} = \frac{(g_m U_c)^2}{R_{ds}} \cdot \frac{1}{2} \qquad P_{in} = I_g^2 \cdot R_{gs} = (U_c \cdot j\omega C_{gs})^2 \cdot R_{gs}$$

$$\Rightarrow U_c = \sqrt{\frac{P_{in}}{R_{gs}}} \cdot \frac{1}{j\omega C_{gs}}$$

$$\Rightarrow P_{out} = \left| \frac{g_m^2 \cdot R_{in}}{R_{gs}\, \omega^2 C_{gs}^2\, R_{ds}} \right| \cdot \frac{1}{2} = 400\,\mu W$$

The Complete Smith Chart (ZY)



LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
HERBST 2001

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Da es sich um eine TEM-Welle handelt, können wir $\underline{\vec{H}}_{1e}$ mit dem Ansatz $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z}\vec{n} \times \underline{\vec{E}}$ berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}}_{1e} &= \frac{1}{Z_1}\vec{n}_{1e} \times \underline{\vec{E}}_{1e} \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,\underline{\vec{E}}_{1e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1e}\vec{r}}\big(\cos(\varphi_1)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_1)\,\vec{e}_z\big)\end{aligned}$$

Für $\underline{\vec{E}}_{1r}$ wählen wir den Ansatz

$$\underline{\vec{E}}_{1r} = \underline{E}_{1r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1r}\vec{r}}\,\vec{e}_x$$

und erhalten daraus die magnetische Feldstärke

$$\underline{\vec{H}}_{1r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\,\underline{E}_{1r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{1r}\vec{r}}\big(-\cos(\varphi_1)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_1)\,\vec{e}_z\big)$$

b). Wir erhalten analog zu Punkt a):

$$\begin{aligned}\underline{\vec{E}}_{2e} &= \underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2e}\vec{r}}\,\vec{e}_x \\ \underline{\vec{E}}_{2r} &= \underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2r}\vec{r}}\,\vec{e}_x \\ \underline{\vec{H}}_{2e} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,\underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2e}\vec{r}}\big(\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big) \\ \underline{\vec{H}}_{2r} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\,\underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{-j\,\vec{k}_{2r}\vec{r}}\big(-\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big)\end{aligned}$$

c).

GF1:	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{E}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{E}_x$ stetig	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{H}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{H}_y$ stetig
GF2:	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{E}} = \vec{0}$	$\Rightarrow$	$\underline{E}_x$ stetig	$\mathrm{Rot}\,\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}}_F$		

d). Da in einem idealen Leiter $\underline{\vec{E}} \equiv \vec{0}$ ist, und $\underline{\vec{E}}_{tang}$ an der Grenzfläche stetig ist, folgt mit $\vec{r} = a\,\vec{e}_z$:

$$\begin{aligned}&\underline{E}_{2ex}\big|_{z=a} + \underline{E}_{2rx}\big|_{z=a} = 0 \\ \Rightarrow\quad &\underline{E}_{2e0}\,\mathrm{e}^{-j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)} + \underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)} = 0 \\ \Rightarrow\quad &\underline{E}_{2e0} = -\underline{E}_{2r0}\,\mathrm{e}^{2j\,k_2\,a\cos(\varphi_2)}\end{aligned}$$

e).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{J}_F}\big|_{GF2} &= \mathrm{Rot}\,\underline{\vec{H}}\big|_{\vec{r}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y+a\,\vec{e}_z} \\
&= \vec{e}_z \times \left(\underline{\vec{H}_3}\big|_{z=a} - \underline{\vec{H}_2}\big|_{z=a}\right) \\
&= -\vec{e}_z \times \left(\underline{\vec{H}_{2e}}\big|_{z=a} + \underline{\vec{H}_{2r}}\big|_{z=a}\right) \qquad (\text{wegen } \underline{\vec{H}_3} \equiv \vec{0}) \\
&= -\vec{e}_z \times \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} \Big(\underline{E}_{2e0}\, \mathrm{e}^{-j\,k_2(-y\sin(\varphi_2)+a\cos(\varphi_2))}\big(\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big) \\
&\qquad + \underline{E}_{2r0}\, \mathrm{e}^{-j\,k_2(-y\sin(\varphi_2)-a\cos(\varphi_2))}\big(-\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big)\Big) \\
&= -\vec{e}_z \times \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\, \underline{E}_{2e0} \Big(\mathrm{e}^{j\,k_2(y\sin(\varphi_2)-a\cos(\varphi_2))}\big(\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y + \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{j\,k_2(y\sin(\varphi_2)-a\cos(\varphi_2))}\big(\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_y - \sin(\varphi_2)\,\vec{e}_z\big)\Big) \\
&= 2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\, \underline{E}_{2e0}\, \mathrm{e}^{j\,k_2(y\sin(\varphi_2)-a\cos(\varphi_2))}\cos(\varphi_2)\,\vec{e}_x
\end{aligned}$$

f). Im Zeitmittel wird Leistung in Richtung $-\vec{e}_y$ transportiert. Weil die Welle bei $z = a$ komplett reflektiert wird, heben sich die $z-$Komponenten der Poynting-Vektoren der einfallenden und reflektierten Welle gegenseitig auf (stehende Welle).

Aufgabe 2

a). Die Helmholtzgleichung für $\underline{g}(x,y,z)$ lautet:

$$\Delta\underline{g}(x,y,z) + k^2\underline{g}(x,y,z) = 0$$

mit $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Daraus folgt mit dem gegebenen Ansatz:

$$\underline{u}''(x)\underline{v}(y)\underline{w}(z) + \underline{u}(x)\underline{v}''(y)\underline{w}(z) + \underline{u}(x)\underline{v}(y)\underline{w}''(z) + k^2\underline{u}(x)\underline{v}(y)\underline{w}(z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{u}''(x)}{\underline{u}(x)} + \frac{\underline{v}''(y)}{\underline{v}(y)} + \frac{\underline{w}''(z)}{\underline{w}(z)} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{u}''(x)}{\underline{u}(x)} = -k_x^2 \qquad \frac{\underline{v}''(y)}{\underline{v}(y)} = -k_y^2 \qquad \frac{\underline{w}''(z)}{\underline{w}(z)} = -k_z^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{u}''(x) + k_x^2\,\underline{u}(x) = 0 \qquad \underline{v}''(y) + k_y^2\,\underline{v}(y) = 0 \qquad \underline{w}''(z) + k_z^2\,\underline{w}(z) = 0$$

b).

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

c). Für $\underline{u}(x)$ und $\underline{v}(y)$ sind trigonometrische Ansätze sinnvoll:

$$\underline{u}(x) = \underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)$$
$$\underline{v}(y) = \underline{C}\sin(k_y y) + \underline{D}\cos(k_y y)$$

Für $\underline{w}(z)$ bietet sich hingegen ein Ansatz über e-Funktionen an:

$$\underline{w}(z) = \underline{E}\,\mathrm{e}^{-jk_z z} + \underline{F}\,\mathrm{e}^{jk_z z}$$

Dabei sind $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$ und $\underline{F}$ beliebige komplexe Konstanten.
(Diese Lösungsansätze setzen voraus, dass k_x, k_y und k_z alle $\neq 0$ sind, was im vorliegenden Fall erfüllt ist. Bei $k_x = 0$ beispielsweise wäre $\underline{u}(x) = \underline{A}x + \underline{B}$, was wegen $\underline{g} \sim \underline{E}_z$ ein in $x-$Richtung linear ansteigendes Feld $\underline{E}_z$ zur Folge hätte.)
Als allgemeinen Lösungsansatz erhalten wir also:

$$\underline{g}(x,y,z) = \big(\underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)\big)\big(\underline{C}\sin(k_y y) + \underline{D}\cos(k_y y)\big)\big(\underline{E}\,\mathrm{e}^{-jk_z z} + \underline{F}\,\mathrm{e}^{jk_z z}\big)$$

d). Da auf idealen Leitern das $\vec{E}-$Feld senkrecht steht, muss am Rand des Hohlleiters $\underline{E}_z = 0$ und damit $\underline{g} = 0$ sein.

$$\underline{u}(x)\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B} = 0$$
$$\underline{u}(x)\big|_{x=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x a = m\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$
$$\underline{v}(y)\big|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{D} = 0$$
$$\underline{v}(y)\big|_{y=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_y b = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Da sich die Welle in $+z-$Richtung ausbreitet, muss auch $\underline{F} = 0$ sein.
Der Wert der dritten Separationskonstanten ergibt sich aus den anderen beiden über die Gleichung aus Punkt b):

$$\beta_{mn} := k_z = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Wenn wir noch die Konstanten $\underline{A}$, $\underline{C}$ und $\underline{E}$ zusammenfassen, erhalten wir als Elementarlösung

$$\underline{g}_{mn}(x,y,z) = \underline{G}_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{-j\beta_{mn}z}$$

und die allgemeine Lösung durch Superposition:

$$\underline{g}(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\underline{g}_{mn}(x,y,z)$$

e). Der TM-Wellentyp niedrigster Ordnung ist die $E_{11}-$Mode. Die Separationskonstanten lauten also

$$k_x = \frac{\pi}{a}$$
$$k_y = \frac{\pi}{b}$$

Die Ausbreitungskonstante ist folglich

$$k_z = \beta_{11} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

Die Welle ist nur ausbreitungsfähig, wenn β_{11} reell ist. Bei der Grenzfrequenz ist die Wurzel also gerade gleich 0:

$$\omega_c^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_c \sqrt{\varepsilon \mu} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad f_c = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Aufgabe 3

a).

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} &= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{H}_\varphi)\vec{e}_z \\
&= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho}\underline{H}_\varphi + \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \rho}\right)\vec{e}_z \\
&= j\omega\varepsilon\, f(\rho)\, \mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{\omega\varepsilon}{\rho k} f(\rho)\, \mathrm{e}^{-jkz} + \frac{\omega\varepsilon}{k} f'(\rho)\, \mathrm{e}^{-jkz}\right)\vec{e}_z \\
&= j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} \\
\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} &= f(\rho)\, \mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + f'(\rho)\right)\frac{1}{jk}\,\mathrm{e}^{-jkz}\,\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Da es sich um eine TEM-Welle handelt, muss $\underline{E}_z = 0$ sein. Daraus folgt die Differenzialgleichung

$$f'(\rho) + \frac{1}{\rho} f(\rho) = 0$$

mit der Lösung

$$f(\rho) = \frac{const}{\rho}$$

Mit der gegebenen Bedingung für $f(\rho = a)$ erhalten wir schließlich die Lösung

$$f(\rho) = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{\rho}$$

Durch Einsetzen verifiziert man leicht die in der Aufgabenstellung gegebenen Feldstärken.
Da die magnetische Feldstärke nur eine $\varphi-$Komponente besitzt, welche nur von ρ und z abhängt, vereinfacht sich der Laplace-Operator zu

$$\begin{aligned}
\Delta\underline{\vec{H}} &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \underline{H}_\varphi)\right) + \frac{\partial^2 \underline{H}_\varphi}{\partial z^2}\right]\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{\partial^2 \underline{H}_\varphi}{\partial z^2}\vec{e}_\varphi \qquad\qquad \text{da } \frac{\partial}{\partial \rho}\rho \underline{H}_\varphi = 0 \\
&= -k^2 \underline{\vec{H}} \\
\Rightarrow \quad \Delta\underline{\vec{H}} + k^2 \underline{\vec{H}} &= \vec{0}
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
\underline{u}(z) &= \int_P^{P'} \underline{\vec{E}}\, d\vec{r} = \int_a^b \underline{E}_\rho\, d\rho = U_0\, \mathrm{e}^{-jkz} \\
\underline{i}(z) &= \oint_C \underline{\vec{H}}\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi\big|_{\rho=a}\, a\, d\varphi = \frac{2\pi\,\omega\varepsilon\, U_0}{k\, \ln \frac{b}{a}}\,\mathrm{e}^{-jkz}
\end{aligned}$$

c).

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \underline{u}(z)}{dz^2} &= -j\omega L' \frac{d\underline{i}(z)}{dz} = -\omega^2 L' C' \underline{u}(z) \\
\Rightarrow \quad \frac{d^2 \underline{u}(z)}{dz^2} &+ \omega^2 L' C' \underline{u}(z) = 0 \\
\Rightarrow \quad \underline{u}(z) &= \underline{A}\, \mathrm{e}^{-j\omega\sqrt{L'C'}z} + \underline{B}\, \mathrm{e}^{j\omega\sqrt{L'C'}z}
\end{aligned}$$

Da sich die Welle in $+z-$Richtung ausbreitet, muss $\underline{B} = 0$ sein.
Aus $\underline{u}(0) = U_0$ folgt $\underline{A} = U_0$.

$$\underline{u}(z) = U_0 \, \mathrm{e}^{-j\omega\sqrt{L'C'}z}$$

$$\underline{i}(z) = \frac{1}{-j\omega L'} \frac{d\underline{u}(z)}{dz} = \sqrt{\frac{C'}{L'}} \, U_0 \, \mathrm{e}^{-j\omega\sqrt{L'C'}z}$$

d). Aus dem Vergleich der beiden Formeln für $\underline{u}(z)$ folgt

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \stackrel{!}{=} \omega\sqrt{L'C'} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\varepsilon\mu} \stackrel{!}{=} \sqrt{L'C'}$$

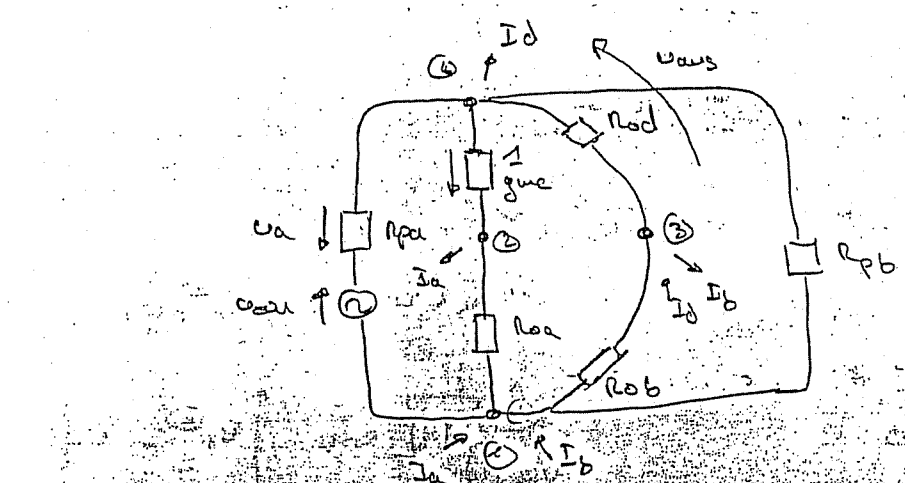
Außerdem folgt aus dem Vergleich der beiden Formeln für $\underline{i}(z)$

$$\frac{2\pi\,\omega\varepsilon}{k \ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi}{\ln\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

Multiplikation bzw. Division der letzten beiden Gleichungen liefert schließlich das Ergebnis

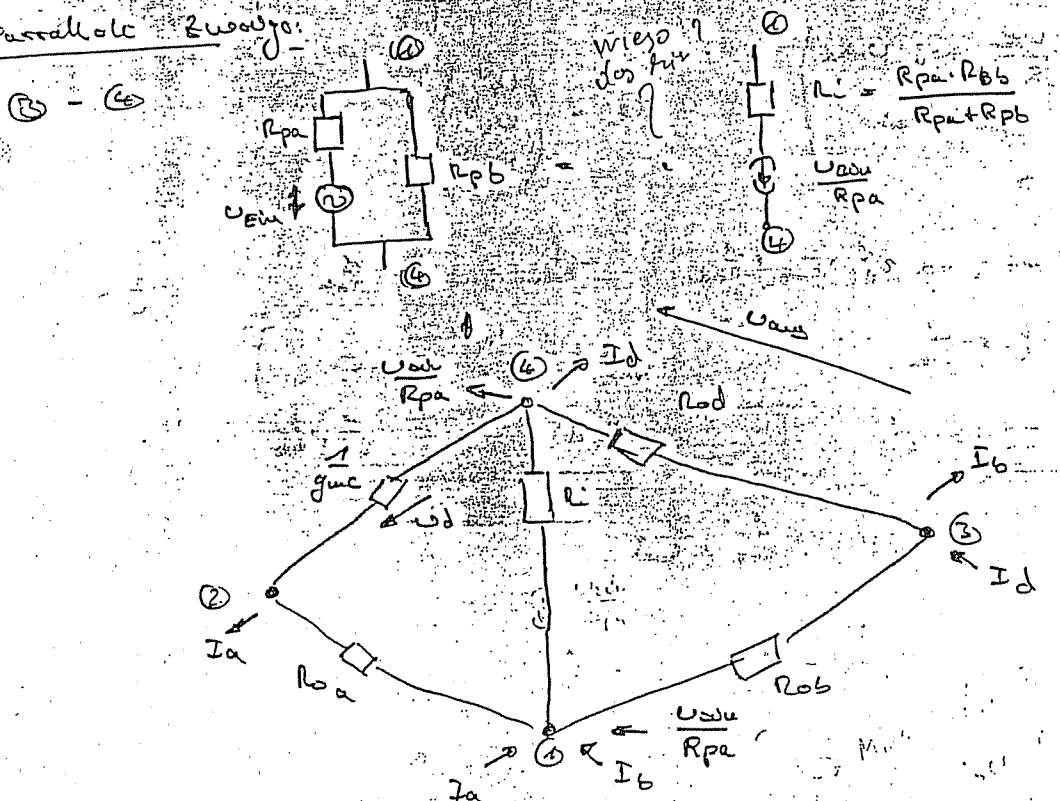
$$C' = \frac{2\pi\,\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} \qquad L' = \frac{\mu \ln\frac{b}{a}}{2\pi}$$

Aufgabe 4:

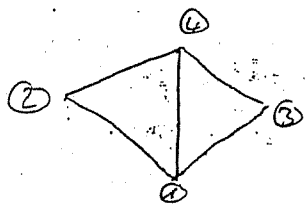


Parallele Zweige:

① - ④



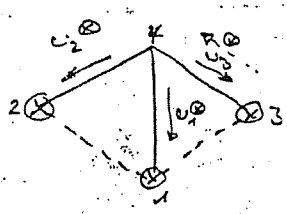
6)



p = k − s = 4 − 1 = 3

m = z − p = 5 − 3 = 2

c)



c) knoten 1: Einlaufende positiv ✓

$$I_a + I_b + \frac{U_{ein}}{R_{pa}} + U_1^{\otimes} \cdot \frac{1}{R_i} + (U_1^{\otimes} - U_3^{\otimes}) \cdot \frac{1}{R_{ob}} + (U_1^{\otimes} - U_2^{\otimes}) \frac{1}{R_{oa}}$$

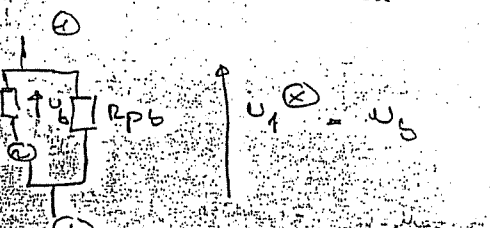
knoten 2: $-I_a + U_2^{\otimes} g_{mc} + (U_2^{\otimes} - U_1^{\otimes}) \frac{1}{R_{oa}}$

knoten 3: $I_d - I_b + U_3^{\otimes} \frac{1}{R_{od}} + (U_3^{\otimes} - U_1^{\otimes}) \frac{1}{R_{ob}}$

$I_a = g_{ma} U_a = + g_{ma} (U_1^{\otimes} - U_{ein})$ $\quad U_a = U_b - U_{ein} = U_1^{\otimes} - U_{ein}$

$I_b = g_{mb} U_b = g_{mb} U_1^{\otimes}$

$I_d = g_{md} U_d = g_{md} U_2^{\otimes}$



$$\Rightarrow I^{\otimes} = \begin{pmatrix} + \frac{U_{ein}}{R_{pa}} + g_{ma} U_{ein} \\ - g_{ma} U_{ein} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U^{\otimes} = \begin{pmatrix} U_1^{\otimes} \\ U_2^{\otimes} \\ U_3^{\otimes} \end{pmatrix}$$

$$Y^{\otimes} = \begin{pmatrix} g_{mb} + g_{ma} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{ob}} + \frac{1}{R_{oa}} & - \frac{1}{R_{oa}} & - \frac{1}{R_{ob}} \\ - g_{ma} - \frac{1}{R_{oa}} & g_{mc} + \frac{1}{R_{oa}} & 0 \\ - g_{mb} - \frac{1}{R_{od}} & g_{md} & \frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{R_i} = \frac{R_{pa} + R_{pb}}{R_{pa} \cdot R_{pb}}$$

d) $g_{ma} = g_{mb} = g_{mc} = g_{md} = g_m \Rightarrow \frac{1}{R_{oa}}, \frac{1}{R_{od}}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} U_{ein} \left(+ \frac{1}{R_{pa}} + g_{ma} \right) \\ - U_{ein} g_m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_m + \frac{1}{R_i} & - \frac{1}{R_{oa}} & - \frac{1}{R_{ob}} \\ - g_m & g_m & 0 \\ - g_m & g_m & \frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{\otimes} \\ U_2^{\otimes} \\ U_3^{\otimes} \end{pmatrix}$$

$U_{aus} = - U_3^{\otimes} \Rightarrow - U_{aus} =$

$$\frac{\det \begin{vmatrix} g_m + \frac{1}{R_i} & - \frac{1}{R_{oa}} & U_{ein} \left(+ \frac{1}{R_{pa}} + g_{ma} \right) \\ - g_m & g_m & - U_{ein} g_m \\ - g_m & g_m & 0 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} g_m + \frac{1}{R_i} & - \frac{1}{R_{oa}} & - \frac{1}{R_{ob}} \\ - g_m & g_m & 0 \\ - g_m & g_m & \frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}} \end{vmatrix}}$$

oder: $-U_{ein}\, g_m = -g_m U_1 + g_m U_2$

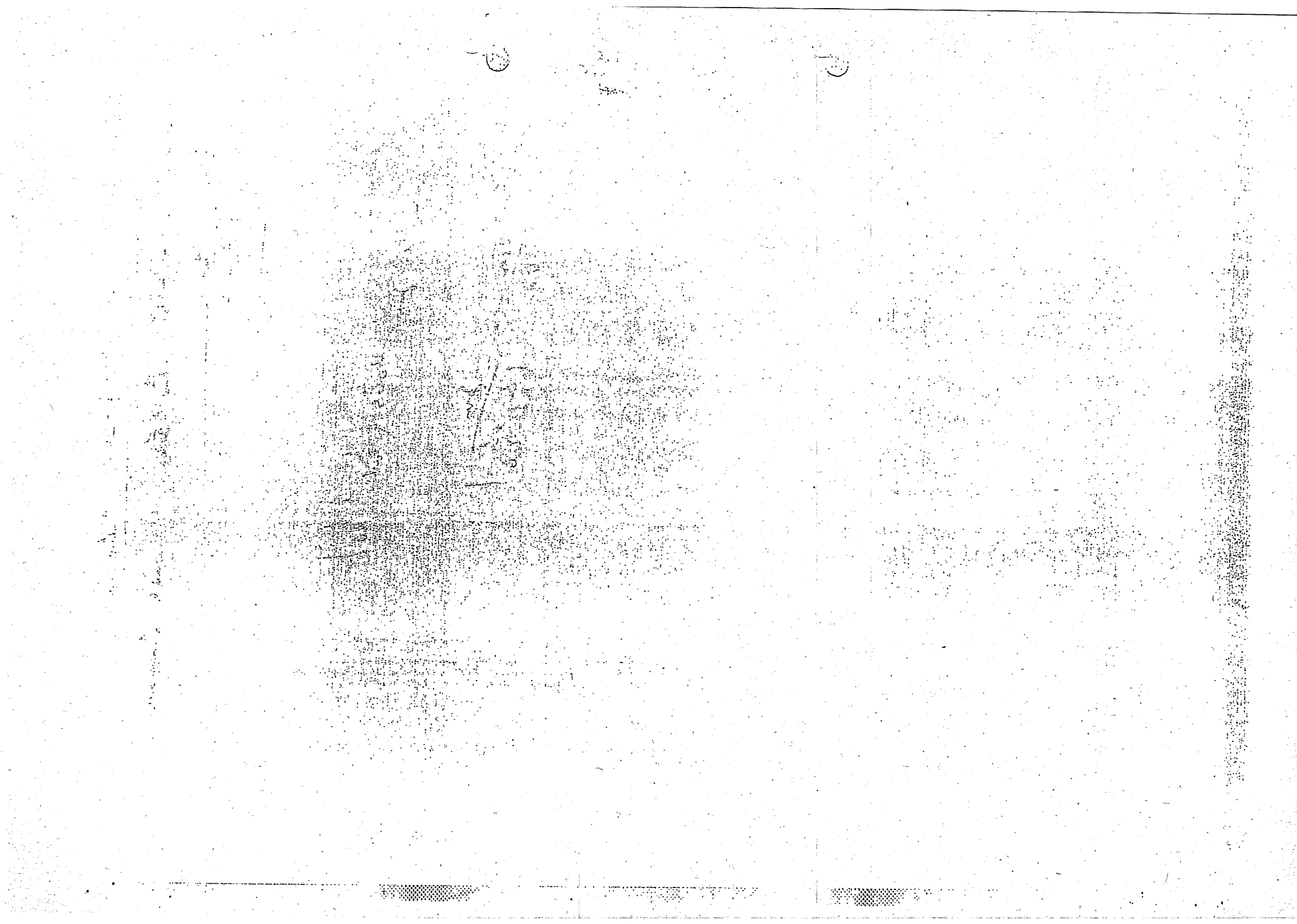
$0 = -g_m U_1^{\circledast} + g_m U_2^{\circledast} + \left(\frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}}\right) U_B^{\circledast}$

$-U_{ein}\, g_m = -U_B^{\circledast}\left(\frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}}\right)$ mit $U_B^{\circledast} = -U_{aus}$

$\Rightarrow \frac{U_{aus}}{U_{ein}} = -\frac{g_m}{\left(\frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}}\right)}$

$-U_{ein}\, g_m = U_{aus}\left(\frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}}\right)$

$\frac{U_{aus}}{U_{ein}} = -\frac{g_m}{\left(\frac{1}{R_{od}} + \frac{1}{R_{ob}}\right)}$



Aufgabe 5

a)

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{11} & S_{21} \\ S_{41} & S_{31} & S_{21} & S_{11} \end{pmatrix}$$

b) siehe Aufgabenblatt

c) $L = \frac{\lambda}{8}$ $\quad Z_0$ $\quad \gamma = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad \beta L = j\beta \cdot L = j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{8} = j\frac{\pi}{4}$

$\cosh(jx) = \cos(x)$

$\sinh(jx) = j\sin(x)$

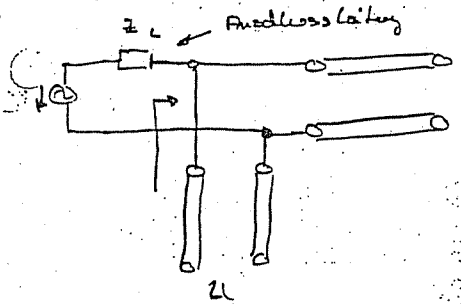
$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \cosh(j\beta L) &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sinh(j\beta L) &= j\sin\frac{\pi}{4} = j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & j Z_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{j}{Z_0}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}U_2 + j Z_0 \frac{\sqrt{2}}{2} I_2}{\frac{j}{Z_0}\frac{\sqrt{2}}{2}U_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} I_2} = \frac{\frac{U_2}{I_2} + j Z_0}{\frac{j}{Z_0}\frac{U_2}{I_2} + 1} = \frac{Z_2 + j Z_0}{j\frac{Z_2}{Z_0} + 1}$$

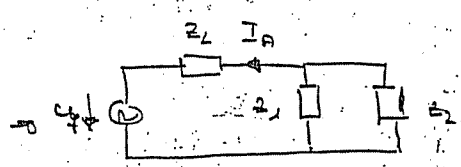
$\Rightarrow$ $Z_2 = 0$: $\Rightarrow Z_1 = \frac{j Z_0}{1} = j Z_0$

$Z_2 = \infty$: $Z_1 = \frac{1 + j\frac{Z_0}{\infty}}{\frac{j}{Z_0} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\frac{j}{Z_0}} = -j Z_0$

d) I_{1A}: MW | MW in Symmetrieebene



$\Rightarrow$



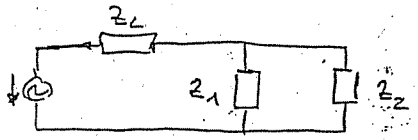
$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= -j Z_0 = -j\frac{1}{T_2} Z_L \\ Z_2 &= -j Z_L \end{aligned}\right\} Z_1 \| Z_2 = \frac{-j\frac{1}{T_2} Z_L \cdot (-j Z_L)}{-j Z_L - j\frac{1}{T_2} Z_L} = \frac{\frac{1}{T_2} Z_L^2}{j Z_L\left(-1 - \frac{1}{T_2}\right)} = -j\frac{Z_L}{T_2 + 1}$$

$$\Rightarrow I_{1A} = \frac{U_q}{Z_L + (Z_1 \| Z_2)} = \frac{U_q}{Z_L\left(1 - j\frac{1}{1+T_2}\right)} = \frac{U_q}{Z_L\left(1 - \frac{j}{1+T_2}\right)} = \frac{-U_q(1+T_2)}{Z_L(1+T_2-j)}$$

$$= \frac{U_q}{Z_L\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)} \qquad \kappa = \sqrt{2}+1$$

I_1B: MW in Se1
EW in Se2

$\kappa = \sqrt{2}+1$



$Z_1 = -j Z_0 = -j \frac{1}{\sqrt{2}} Z_L$ (LL)

$Z_2 = j Z_0 = j Z_L$ (KL)

$\Rightarrow Z_1 \| Z_2 = \frac{+Z_L^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{jZ_L(1-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{+Z_L^2}{jZ_L(\sqrt{2}-1)} = -j\frac{Z_L}{(\sqrt{2}-1)}$

$\Rightarrow I_{1B} = \frac{U_q}{Z_L + j\frac{Z_L}{\sqrt{2}-1}} = \frac{U_q}{Z_L(1-j\frac{1}{\sqrt{2}-1})} = \frac{U_q}{Z_L(1-jK)} = \frac{U_q}{Z_L(1-j(\sqrt{2}+1))} = \frac{U_q}{Z_L(-j\sqrt{2})} = \frac{U_q}{Z_L\sqrt{2}}\,j$

$\kappa = \sqrt{2}+1 = \frac{2}{\sqrt{2}}+1 = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$U_q \cup Q: \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1 = 1$

I_1C: EW in Se1 ($\kappa = \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$)
MW in Se2

$Z_1 = -jZ_0 = -j\frac{1}{\sqrt{2}}Z_L$ (KL)
$Z_2 = -jZ_0 = -jZ_L$ (LL)

$\Rightarrow Z_1 \| Z_2 = \frac{Z_L^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{jZ_L(\frac{1}{\sqrt{2}}-1)} = -j\frac{Z_L}{(1-\sqrt{2})} = j\frac{Z_L}{\sqrt{2}-1}$

$\Rightarrow I_{1C} = \frac{U_q}{Z_L + j\frac{Z_L}{\sqrt{2}-1}} = \frac{U_q}{Z_L(1+j\frac{1}{\sqrt{2}-1})} = \frac{U_q}{Z_L(1+j\kappa)}$

I_1D: EW in Se1, EW in Se2

$Z_1 = jZ_0 = j\frac{1}{\sqrt{2}}Z_L$
$Z_2 = jZ_0 = jZ_L$
$\Rightarrow Z_1 \| Z_2 = \frac{-Z_L^2\frac{1}{\sqrt{2}}}{jZ_L(1+\frac{1}{\sqrt{2}})} = +j\frac{Z_L}{\sqrt{2}+1} = j\frac{Z_L}{\kappa}$

$\Rightarrow I_{1D} = \frac{U_q}{Z_L + j\frac{Z_L}{\kappa}} = \frac{U_q}{Z_L(1+j/\kappa)}$

e) Lineare Überlagerung der Fälle A bis D.

$\Rightarrow U_{q1} = 4U_q$, $U_{q2}=0$ $U_{q3}=0$ $U_{q4}=0$

Tore 2 bis 4 sind quellenfrei und reflektionsfrei mit Z_L abgeschlossen

$\Rightarrow a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_i=0\ i=2,3,4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_{L1}}} - \sqrt{Z_{L1}}\,I_1\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_{L1}}} + \sqrt{Z_{L1}}\,I_1\right)} = \frac{U_1 - Z_{L1} I_1}{U_1 + Z_{L1} I_1}$

$$S_{11} = \frac{\frac{U_1}{I_1} - Z_L}{\frac{U_1}{I_1} + Z_L} =$$

UG $\quad U_1 + I_1 Z_L = 4U_q + (I_A + I_B + I_C + I_D) Z_L$

$$= 4U_q + U_q \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{K}} + \frac{1}{1 - jK} + \frac{1}{1 + jK} + \frac{1}{1 + j/K} \right)$$

$$= 4U_q + U_q \left(\frac{1 + j/K + 1 - jK}{(1 - j/K)(1 + j/K)} + \frac{(1 + jK) + (1 - jK)}{(1 + jK)(1 - jK)} \right)$$

$$= 4U_q + U_q \left(\frac{2}{1 + 1/K^2} + \frac{2}{1 + K^2} \right) = 4U_q + 2U_q \left(\frac{(1 + K^2) + (1 + 1/K^2)}{1 + K^2 + 1/K^2 + 1} \right)$$

$$= 4U_q + 2U_q \left(\frac{2 + K^2 + 1/K^2}{2 + K^2 + 1/K^2} \right) = 4U_q + 2U_q = 6U_q$$

b $\quad S_{11} = \frac{U_1 - Z_L I_1}{U_1 + Z_L I_1} = \frac{2U_q}{6U_q} = \frac{1}{3}$

$$S_{21} = \frac{U_2 - Z_L I_2}{6U_q} = \frac{-Z_L I_2}{6U_q}$$

UG: $\quad Z_L I_2 = U_q \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{K}} - \frac{1}{1 - jK} + \frac{1}{1 + jK} - \frac{1}{1 + j/K} \right)$

$$= U_q \cdot \left(\frac{(1 + j/K) + (1 - j/K)}{1 + 1/K^2} + \frac{(1 + jK) - (1 - jK)}{1 + K^2} \right)$$

$$= U_q \cdot \left(\frac{-2j/K}{1 + 1/K^2} + \frac{-2jK}{1 + K^2} \right) = -2jU_q \left(\frac{1/K (1 + K^2) + K(1 + 1/K^2)}{(1 + 1/K^2)(1 + K^2)} \right)$$

$$= -2j \left(\frac{1/K + K + K + 1/K}{1 + K^2 + 1/K^2 + 1} \right) = \left(\frac{2K + 2/K}{2 + 1/K^2 + K^2} \right)(-2j) = \frac{2(K + 1/K)}{(K + 1/K)^2} \cdot (-2j)$$

$$= -4j \frac{1}{K + 1/K} = -4j \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} =$$ Abstrich

Aufgabe 1:

a) $z_{11} = \frac{1}{j\omega C_{gs}} + R_{gs}$

$z_{22} = \frac{R_{ds} \cdot \frac{1}{j\omega C_{ds}}}{R_{ds} + \frac{1}{j\omega C_{ds}}} = \frac{R_{ds}}{1 + j\omega C_{ds} R_{ds}}$

$u_{ds} = z_{21} I_g + z_{22} I_d$

gesucht z_{21}:

$u_{ds} = \frac{R_{ds}}{1 + j\omega C_{ds} R_{ds}} \left(I_d - g_m u_c \right) = z_{22} \left(I_d - g_m \frac{1}{j\omega C_{gs}} \cdot I_g \right)$

$= z_{22} I_d + \left(-\frac{g_m}{j\omega C_{gs}} \cdot z_{22} \right) I_g$

$\Rightarrow z_{21} = -z_{22} \cdot \frac{g_m}{j\omega C_{gs}} = -\frac{g_m}{j\omega C_{gs}} \cdot \frac{R_{ds}}{1 + j\omega C_{ds} R_{ds}}$

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

b) $f = 5\,\text{GHz}$

$z_{11} = 10\,\Omega - j\,70\,\Omega \qquad z_{2n} = 50\,\Omega$

Nochmal auf $50\,\Omega$:

$\Rightarrow z_{11} = 0{,}2\,\Omega - j\,1{,}4\,\Omega \qquad z_{2n} = 1\,\Omega$

$z_{11}^* = 0{,}2\,\Omega + j\,1{,}4\,\Omega$

$\Rightarrow X_L = 50 \cdot j\,(0{,}4 + 1{,}4) = j\,90\,\Omega$

$B_C = \frac{1}{50} \cdot j\,2 = \frac{1}{25}\,S = j\,0{,}04\,S$

$z_K = 0{,}2\,\Omega + j\,1{,}4\,\Omega$ (wg. Leistungsanpassung)

c) $P_{1verl} = I_g^2 \cdot R_{gs} \Rightarrow I_g = \sqrt{\frac{P_{1verl}}{R_{gs}}} \Rightarrow u_c = R_{gs} \cdot I_g = R_{gs} \cdot \sqrt{\frac{P_{1verl}}{R_{gs}}}$

$= \sqrt{R_{gs} \cdot P_{1verl}}$

$u_c = \frac{1}{j\omega C_{gs}} \cdot I_g = \frac{1}{j\omega C_{gs}} \cdot \sqrt{\frac{P_{1verl}}{R_{gs}}}$

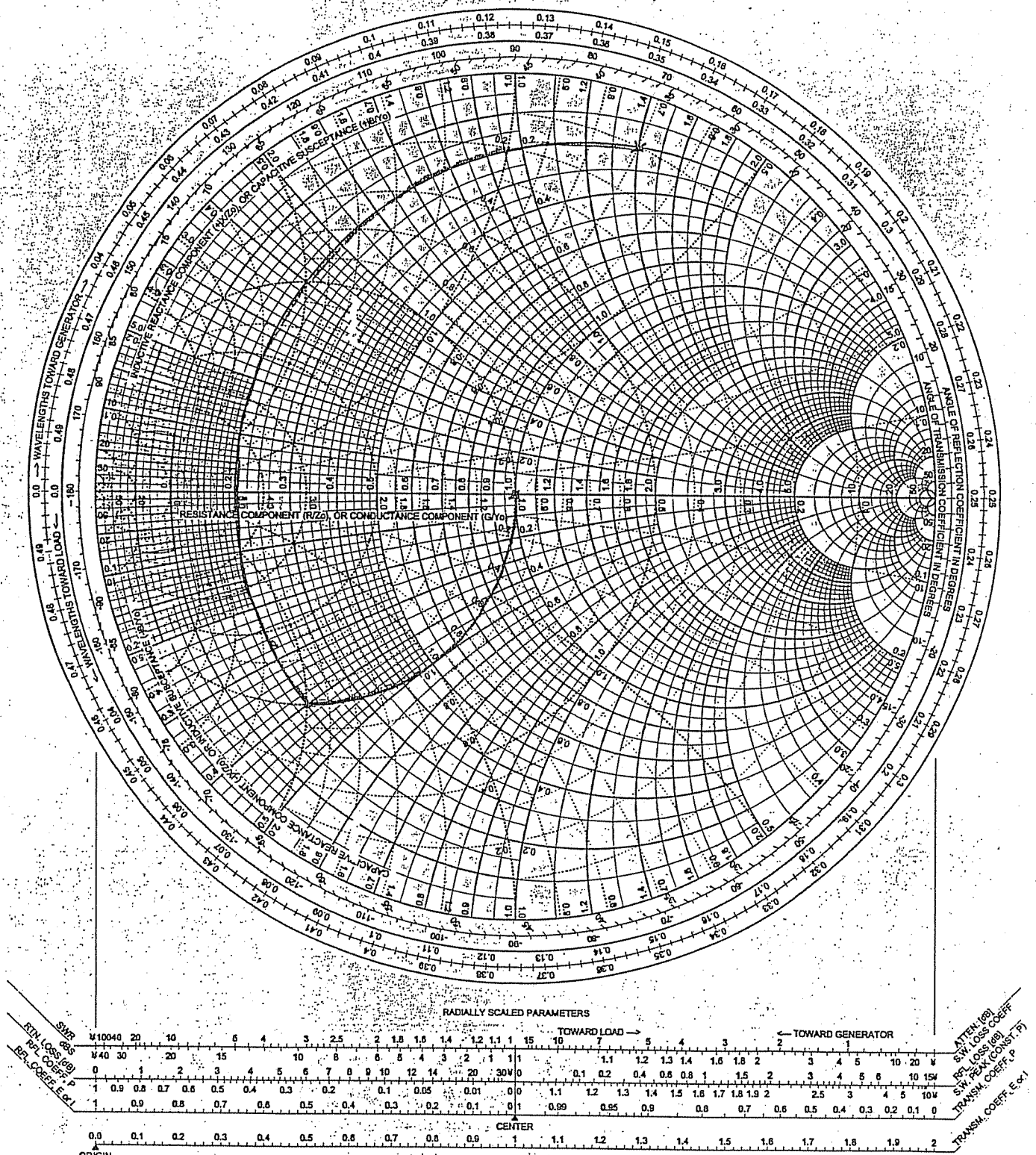
$P_{2verl} = \frac{1}{2} (g_m u_c)^2 \cdot R_{ds}$

$P_{2verl} = \left| \frac{1}{2} \left(g_m^2 \cdot \left(-\frac{1}{j\omega^2 C_{gs}^2} \right) \frac{P_{1verl}}{R_{gs}} \right) R_{ds} \right|$

$\Rightarrow \frac{P_{2verl}}{P_{1verl}} = \frac{\frac{1}{2} g_m^2 \cdot R_{ds}}{\omega^2 C_{gs}^2 R_{gs}}$

$\Rightarrow \frac{P_{2verl}}{P_{1verl}} = \frac{1}{2} \frac{g_m^2 + R_{ds}}{\omega^2 C_{gs}^2 R_{gs}}$

The Complete Smith Chart (ZY)



LÖSUNG ELEKTROMAGNETISCHE FELDER 1
FRÜHJAHR 2001

Dies ist keine offizielle Musterlösung vom ITHE.

Aufgabe 1

a). Aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} &= -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}} \\ \operatorname{rot} \underline{\vec{H}} &= (\sigma_0 + j\omega\varepsilon_0)\underline{\vec{E}} \approx \sigma_0 \underline{\vec{E}} \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \underline{\vec{E}} &= 0 \\ \mu_0 \operatorname{div} \underline{\vec{H}} &= 0 \end{aligned}$$

folgt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \sigma(\operatorname{rot} \underline{\vec{E}}) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \underline{\vec{H}}$$

Mit der Identität $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{\vec{H}} - \Delta \underline{\vec{H}}$ folgt die Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} & \Delta \underline{\vec{H}} - j\omega\mu_0\sigma_0 \underline{\vec{H}} = \vec{0} \\ \Rightarrow \qquad & \Delta \underline{\vec{H}} - \underline{k}^2 \underline{\vec{H}} = \vec{0} \qquad \text{mit} \quad \underline{k} := \frac{1-j}{\delta} \qquad \text{und} \quad \delta := \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}} \end{aligned}$$

b). Im Zwischenraum erhalten wir $\underline{H}_\varphi$ am leichtesten durch ein Umlaufintegral:

$$\begin{aligned} \oint \underline{\vec{H}}\, d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \underline{H}_\varphi(\rho)\rho\, d\varphi = I \\ \Rightarrow \qquad \underline{H}_\varphi(\rho) &= \frac{I}{2\pi\rho} \end{aligned}$$

Im Außenraum ist $\underline{\vec{H}} \equiv \vec{0}$, da in der Summe kein Strom umschlossen wird.

c).

$$\begin{aligned} & \Delta \underline{H}_\varphi(\rho) - \underline{k}^2 \underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\, \underline{H}_\varphi(\rho))\right) + \underline{k}^2 \underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \frac{d^2 \underline{H}_\varphi(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\underline{H}_\varphi(\rho)}{d\rho} + \left(\underline{k}^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)\underline{H}_\varphi(\rho) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um eine Bessel-DGL 1. Ordnung. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\underline{H}_\varphi(\rho) = \underline{A} J_1(\underline{k}\rho) + \underline{B} N_1(\underline{k}\rho)$$

Dabei sind $\underline{A}$ und $\underline{B}$ beliebige komplexe Konstanten.

d). Im Innenleiter muss $\underline{B} = 0$ sein, da das magnetische Feld für $\rho \to 0$ nicht singulär wird.
Die andere Konstante können wir über die Randbedingung bei $\rho = R$ bestimmen. Hier muss $\underline{H}_\varphi(\rho)$ stetig sein.
Mit dem Ergebnis aus b) folgt die Gleichung

$$\underline{A} J_1(\underline{k}R) = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{A} = \frac{I}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}.$$

Die Komponente $\underline{H}_\varphi(\rho)$ im Innenleiter ist also

$$\underline{H}_\varphi(\rho) = \frac{I}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_1(\underline{k}\rho)$$

e).

$$\begin{aligned}\vec{\underline{J}} &= \operatorname{rot} \vec{\underline{H}} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{d\rho}(\rho \underline{H}_\varphi(\rho))\right)\vec{e}_z \\ &= \frac{I\,\underline{k}}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_0(\underline{k}\rho)\,\vec{e}_z\end{aligned}$$

f). Mit $\omega \to 0$ geht auch $\underline{k} \to 0$.
Außerdem gilt $J_1(\underline{k}R) \to \frac{\underline{k}R}{2}$ für $\underline{k} \to 0$.
Damit gilt für den Gleichstromfall:

$$\begin{aligned}\vec{\underline{J}} &= \frac{I\,\underline{k}}{2\pi R\, J_1(\underline{k}R)}\, J_0(\underline{k}\rho)\,\vec{e}_z \\ &\xrightarrow{\omega \to 0} \frac{2\,I\,\underline{k}}{2\pi R \underline{k} R} = \frac{I}{\pi R^2}\end{aligned}$$

Der Strom verteilt sich also gleichmäßig über den Leiterquerschnitt.

Aufgabe 2

a).

$$\begin{aligned}
\vec{\underline{H}} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{\underline{E}} \\
&= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\underline{E}_\varphi \sin\vartheta)\,\vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{E}_\varphi)\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{A_0\omega\mu_0}{\underline{k}r}\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,2\sin\vartheta\,\underbrace{\cos\vartheta}_{\approx 0}\,\vec{e}_r \\
&\quad - \frac{1}{j\omega\mu_0}\,\frac{1}{r}(-j\underline{k})A_0\omega\mu_0\,\frac{1}{\underline{k}}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\vartheta \qquad \text{unter Vernachlässigung von } \underline{H}_r
\end{aligned}$$

b).

$$\begin{aligned}
\vec{H}(r,\vartheta,t) &= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\;\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-j\underline{k}r+j\omega t}\}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\;\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{-k''r+j(\omega t-k'r)}\}\,\vec{e}_\vartheta \\
&= \frac{A_0}{r}\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-k''r}\cos(\omega t-k'r)\,\vec{e}_\vartheta
\end{aligned}$$

Phase: $\omega t - k'r$
Phasenflächen: $r = \text{const} \rightarrow$ Kugeln
Ausbreitungsrichtung: $\vec{n} = \vec{e}_r$
Wegen $\vec{E} \perp \vec{n}$ und $\vec{H} \perp \vec{n}$ handelt es sich um eine TEM-Welle.

c).

$$\begin{aligned}
\vec{\underline{E}} &= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\vec{\underline{H}} \\
&= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\underline{H}_\vartheta)\,\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,\frac{-j\underline{k}}{r}A_0\sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-j\underline{k}r}\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Formel für $\vec{\underline{E}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega\mu_0}{\underline{k}} &= \frac{1}{\sigma + j\omega\varepsilon}\,j\underline{k} \\
\Rightarrow\quad \underline{k}^2 &= -j(\sigma + j\omega\varepsilon)\omega\mu_0 \\
&= \omega^2\varepsilon\mu_0 - j\sigma\omega\mu_0 \\
&= \omega^2\varepsilon\mu_0\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \\
&= \frac{\omega^2}{v_0^2}\left(1 - \frac{j}{\omega\tau}\right)
\end{aligned}$$

d).

$$\underline{k} = \frac{\omega}{v_0}\sqrt{1-\frac{j}{\omega\tau}} \approx \frac{\omega}{v_0}\left(1-\frac{j}{2\omega\tau}\right)$$

1) $k' = \frac{\omega}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\omega}{k'} = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{Ph}}}{v_0} = 1$

2) $v_{\mathrm{Gr}} = \left(\frac{dk'}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{v_0}\right)^{-1} = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{Gr}}}{v_0} = 1$

3) $k''\Delta r = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \frac{1}{k''} = 2\tau v_0$

$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{\Delta r k'}{2\pi} = \frac{2\tau v_0 k'}{2\pi} = \frac{\tau\omega}{\pi} \gg 1$ (schwache Dämpfung)

Aufgabe 3

a).

$$\Delta \underline{H}_{1x} + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \underline{H}_{1x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{H}_{1x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\alpha_1^2 - \frac{2}{5} k_1^2 + \varepsilon_1 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{A} \cos(\alpha_1 y)\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1^2 = k_1^2 - \frac{2}{5} k_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 \qquad \text{da } \alpha_1 \text{ positiv nach Aufgabenstellung}$$

$$\Delta \underline{H}_{2x} + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \underline{H}_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{H}_{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_2^2 - \frac{6}{5} k_2^2 + \varepsilon_2 \mu_0 \omega^2 \right) \underline{B}\, \mathrm{e}^{\alpha_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2^2 = \frac{6}{5} k_2^2 - k_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}\, k_2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 = -\sqrt{\frac{1}{5}}\, k_2 \qquad \text{da } \underline{H}_2 \to 0 \text{ für } y \to \infty$$

b).

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_1 &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \operatorname{rot} \underline{\vec{H}}_1 \\
&= \frac{1}{j\omega\varepsilon_1} \left(\frac{\partial \underline{H}_{1x}}{\partial z} \vec{e}_y - \frac{\partial \underline{H}_{1x}}{\partial y} \vec{e}_z \right) \\
&= \frac{1.}{j\omega\varepsilon_1} \left(-j\sqrt{\frac{2}{5}}\, k_1 \underline{A} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_y \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 \underline{A} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_z \right) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, \underline{A} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_y \\
&\quad - j\sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\, \underline{A} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, k_1 y \right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}} k_1 z}\, \vec{e}_z
\end{aligned}$$

analog:

$$\begin{aligned}
\underline{\vec{E}}_2 &= -\sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, \underline{B}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}} k_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z}\, \vec{e}_y \\
&\quad - j\sqrt{\frac{1}{5}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\, \underline{B}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}} k_2 y}\, \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}} k_2 z}\, \vec{e}_z
\end{aligned}$$

c). Die Grenzbedingungen auf einem idealen Leiter lauten: $\vec{\underline{E}}_{\text{tang}} \doteq \vec{0}$ und $\underline{H}_{\text{norm}} \doteq 0$, im vorliegenden Fall also:

$$\underline{E}_x\big|_{y=0} = 0$$
$$\underline{E}_z\big|_{y=0} = 0$$
$$\underline{H}_y\big|_{y=0} = 0$$

Diese drei Bedingungen sind offensichtlich erfüllt.

d). Bei $y = d$ müssen die Tangentialkomponenten von $\vec{\underline{E}}$ und $\vec{\underline{H}}$ stetig sein, also:

(1) $$\underline{E}_{1z}\big|_{y=d} = \underline{E}_{2z}\big|_{y=d}$$

(2) $$\underline{H}_{1x}\big|_{y=d} = \underline{H}_{2x}\big|_{y=d}$$

Aus (2) folgt:

(3) $$\underline{A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}}k_1 z} = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}$$

Da diese Gleichung für alle z gelten muss, müssen die beiden Phasenterme gleich sein:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}\,k_1 = \sqrt{\frac{6}{5}}\,k_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2}{5}\varepsilon_1 = \frac{6}{5}\varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{3}$$

Nun können wir in (3) die Exponentialfunktionen kürzen und erhalten:

(4) $$\underline{A}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}$$

Aus (1) folgt

$$-j\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}\,\underline{A}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) \mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{2}{5}}k_1 z} = -j\sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}\,\underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{A}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{1}{5}}k_2 d}$$

Division dieser Gleichung durch (4) ergibt:

$$\tan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d\right) = 1$$
$$\Rightarrow \qquad \sqrt{\frac{3}{5}}\,k_1 d = \frac{\pi}{4} + n\pi \qquad \mathrm{n} = 0;\,1;\,2\,\ldots$$
$$\Rightarrow \qquad d = \sqrt{\frac{5}{3}}\,\frac{1}{k_1}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

e).

$$\vec{\underline{H}}_{2'} = \underline{B}\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 y}\,\mathrm{e}^{-j\sqrt{\frac{6}{5}}k_2 z}\,\vec{e}_x$$

Aufgabe 4

a) Keine Variation in y-Richtung → keine y-Abhängigkeit, da keine Wellentypen angeregt werden (in y-Richtung)

b) $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_{mn} = f_{mn}(x,z)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{H}_{mn} = \frac{1}{j\omega\mu}\left(\frac{\partial^2 f_{mn}}{\partial x \partial z}\vec{e}_x + \left[k^2 f_{mn} + \frac{\partial^2 f_{mn}}{\partial z^2}\right]\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{E}_{10} = \left(-A_1 k_{x1}\sin(k_{x1}x) + B_1 k_{x1}\cos(k_{x1}x)\right)\exp\left(\pm\beta_1 z\right)$$

$$\vec{H}_{10}^{(e)} = \frac{1}{j\omega\mu}\Big[\left(-A_1 k_{x1}\sin(k_{x1}x) + B_1 k_{x1}\cos(k_{x1}x)\right)\cdot\pm j\beta_1\cdot\exp\left(\pm j\beta_1 z\right)\cdot\vec{e}_x$$

$$+\Big(k^2\left(A_1\cos(k_{x1}x) + B_1\sin(k_{x1}x)\right)\exp\left(\pm j\beta_1 z\right)$$

$$-\left(A_1\cos(k_{x1}x) + B_1\sin(k_{x1}x)\right)\left(\beta_1^2\right)\exp\left(\pm j\beta_1 z\right)\Big)\vec{e}_z\Big]$$

wg. RW $x=0 \rightarrow \underline{H}_{10z}^{(e)} = 0 \rightarrow A_1 = 0$

$x=a \rightarrow \underline{H}_{10z}^{(e)} = 0$

$$\rightarrow B_1\sin(k_{x1}a)\exp\left(\pm j\beta_1 z\right)\left(1-\beta_1^2\right) = 0$$

$$\rightarrow k_{x1} = \frac{\pi}{a}n$$

für $a < x < c$, $z = 0$ $\quad \underline{H}_{10x}^{(e)} = 0$

$$\Rightarrow B_1 k_{x1}\cos(k_{x1}x)\cdot\pm\beta_1\cdot\frac{1}{j\omega\mu} = 0$$

$$f_{m0}(x,z) = B_1\sin(k_{x1}x)\cdot\exp\left(\pm j\beta_1 z\right)$$

$$\Delta f_{m0} + k^2 f_{m0} = 0$$

$$\Rightarrow -B_1 k_{x1}^2\sin(k_{x1}x)\cdot\exp(\pm j\beta_1 z)\,\vec{e}_x \mp \beta_1^2 B_1\sin(k_{x1}x)\exp(\pm j\beta_1 z)\,\vec{e}_z + k^2 f_{m0} = 0$$

$$= -k_{x1}^2 f_{m0} \mp \beta_1^2 f_{m0} + k^2 f_{m0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 = k_{x1}^2 + \beta_1^2$$

wg. Ausbreitungsrichtung

$$\Rightarrow \beta_1 = k^2 - k_{x1}^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}$$

Grenzfrequenz: $\beta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{\varepsilon\mu}} = \frac{\pi}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$

c) wie b)

$$k_x^{(2)} = \frac{\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad \omega_{gr}^{(2)} = \frac{\pi c}{a}$$

d) Gebiet 1 $z = -0$

$$\vec{E}_T^{(1)} = \left[E_0 + E_r^{(1)} + B_{11} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \right] \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_T^{(1)} = \left[-\frac{E_0}{Z_{F0}} + \frac{B_{11}}{\mu_0} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) + H_x^{(1)} \right] \vec{e}_x$$

?

Gebiet 2 $z = +0$

$$\vec{E}_T^{(2)} = \left[E_h^2 + B_{12} \frac{\pi}{c} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right) \right] \vec{e}_y = \left[E_h^{(2)} + B_1 \frac{\pi}{c} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right) \right] \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_T^2 = \left[H_n^2 - \frac{B_{12} c}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right) \right] \vec{e}_x = \left[-\frac{E_h^{(2)}}{Z_F} - \frac{B_r c \pi}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right) \right] \vec{e}_x$$

e) $c < x < a$: $y = 0$

$\Rightarrow H_x^{(1)} = 0$

$0 < x < c$ $z = 0$

$\mathrm{Rot}\, H = 0 \Rightarrow H_{x2}^{(2)} = H_x^{(1)}$

$\mathrm{Rot}\, E = 0 \Rightarrow E_y^{(2)} = E_y$

Aufgabe 4 FO1

Da keine Variation in y-Richtung → keine y-Abhängigkeit, da keine Wellentypen in y-Richtung angeregt werden

b) $\underline{H}_{10}^{(r)} = -\frac{\partial f_{10}}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial f_{10}}{\partial x}\vec{e}_y$ nach a) $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

$= \frac{\partial f_{10}}{\partial x}\vec{e}_y = \left(-k_{x1} \cdot A_1 \sin(k_{x1} x) + B_1 k_{x1} \cos(k_{x1} x)\right)\vec{e}_y \exp(-j\beta_1 z)$

$\underline{E}_{10}^{(r)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 f_{10}}{\partial x \partial z}\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + \left[k^2 f_{10} + \frac{\partial^2 f_{10}}{\partial z^2}\right]\vec{e}_z\right)$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(\left(-k_{x1} A_1 \sin(k_{x1} x) + B_1 k_{x1} \cos(k_{x1} x)\right)\left(\pm j\beta_1 \exp(\pm j\beta_1 z)\right)\vec{e}_x + \left[\left(k^2 + \beta_1^2\right) f_{10}\right]\vec{e}_z\right)$

$\mathrm{Rot}\, E = 0 \rightarrow E_{tan} = 0 \rightarrow \vec{e}_x$ und $\vec{e}_z$ Richtung $= 0$

$\mathrm{Rot}\, H = 0 \rightarrow H_{tan} = 0 \rightarrow \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ Richtung $= 0$

$\Rightarrow \left(k^2 + \beta_1^2\right) f_{10} = 0$ für $x = 0$ und $x = a$

$\Rightarrow A_1 \cos 0 + B_1 \sin 0 = 0 \rightarrow A_1 = 0 \quad (x = 0)$

$(x = a)$ $B_1 \sin(k_{x1} a) = 0 \rightarrow k_{x1} \cdot a = n \cdot \pi \Rightarrow k_{x1} = \frac{\pi}{a} \cdot n,\ n = 1, 2, 3$

$\Rightarrow f_{10} = B_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot n x\right) \exp(\pm j\beta_1 z)$

$\triangle f_{10} + k^2 f_{10} = 0$:

$\Rightarrow -B_1 \left(\frac{\pi^2}{a^2} n^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} n x\right) \exp(\pm j\beta_1 z) + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} n x\right) \exp(\pm j\beta_1 z)\left(\mp\beta_1^2\right)$
$+ k^2 B_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} n x\right) \exp(\pm j\beta_1 z) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{a} n\right)^2 \mp \beta_1^2 + k^2 = 0$ Ausbreitungsrichtung in +z-Richtung

$\Rightarrow -k_{x1}^2 - \beta_1^2 + k^2 = 0 \rightarrow k^2 = k_{x1}^2 + \beta_1^2$

$\rightarrow \beta_1^2 = k^2 - k_{x1}^2 \rightarrow$ Grenzfrequenz $\gamma = 0 \neq \beta \rightarrow 0 = k^2 - k_{x1}^2$

$\Rightarrow k^2 = k_{x1}^2 \Rightarrow \omega^2 \varepsilon\mu = k_{x1}^2 \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\frac{\pi}{a} n\right)$

$= \frac{n}{2a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$\underline{E}_{10}^{1} = B_1 k_{x1} \cdot \cos(k_{x1} x)\ \exp(-j\beta z)\ \vec{e}_y$$

$$\underline{H}_{10}^{1} = \frac{1}{j\omega\mu}\Big[B_1 k_{x1} \cos(k_{x1} x)(-j\beta)\exp(-j\beta z)\,\vec{e}_x + (k^2 - \beta_1^2)\cdot B_1 \cos(k_{x1} x)\exp(-j\beta_1 z)\cdot \vec{e}_z \Big]$$

c) with b not $k_{x1} = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow f = \frac{n}{2a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

d) Conductor 1 $z = -0$

$$\underline{\vec{E}}_T^{(1)} = \underline{\vec{E}}_n^{(1)} + \underline{\vec{E}}_{10}^{1} + \underline{\vec{E}}_r^{(1)} = \left(\underline{E}_0 + \underline{E}_r + B_1 k_{x1} \cos(k_{x1} x)\right)\vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{H}}_T^{(1)} = \underline{\vec{H}}_n^{(1)} + \underline{\vec{H}}_r^{1} + \underline{\vec{H}}_{10}^{1} = \left(-\frac{\underline{E}_0}{Z_{F0}} + \underline{H}_r^{(1)} + \frac{1}{j\omega\mu} B_1 k_{x1}^2 \cos(k_{x1} x)\right)\vec{e}_x$$

Conductor 2 $z = +0$

$$\underline{\vec{E}}_T^{(2)} = \left(\underline{E}_b^{2} + B_1^{(2)} k_{x1} \cos(k_{x1} x)\right)\vec{e}_y = \left(\underline{E}_b + B_1^{(2)} \frac{\pi}{c} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right)\right)\vec{e}_y$$

$$\underline{\vec{H}}_T^{(2)} = \left(\underline{H}_n^{(2)} - \frac{1}{j\omega\mu} B_1^{(2)} \frac{\pi}{c} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right)\right)\vec{e}_x = \left(-\frac{\underline{E}_n^{(2)}}{Z_{F0}} - \frac{1}{j\omega\mu} B_1^{(2)} \frac{\pi}{c} \cos\left(\frac{\pi}{c} x\right)\right)\vec{e}_x$$

e) $x < x < a$; $0 < y < b$

$$H_1^{(2)} = 0$$

$0 < x < c$,

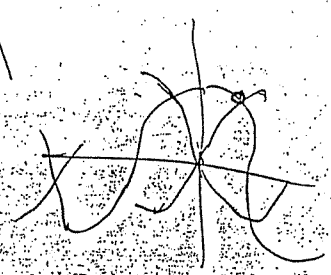
$$\text{Rot } H = 0 \Rightarrow H_T^{(2)} = H_T^{(1)}$$

$$\text{Rot } E = 0 \Rightarrow E_T^{(1)} = E_T^{(2)}$$

Aufgabe 5

1) $r = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{U}{\sqrt{2}Z_0} - \sqrt{Z_0}\,I\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{U}{\sqrt{2}Z_0} - \sqrt{Z_0}\,I\right)} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} = \frac{1 - j\omega Z_0 C}{1 + j\omega Z_0 C}$

b) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ mit $a_3 = 0$ $= S \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \\ a_4 \end{pmatrix}$



$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-j a_2 + a_4)$

$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - j a_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - j r \cdot b_4)$

$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-j a_1 + 0)$ $\quad a_4 = r \cdot b_4$

$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - j 0_3)$ $\quad a_2 = r \cdot b_2$

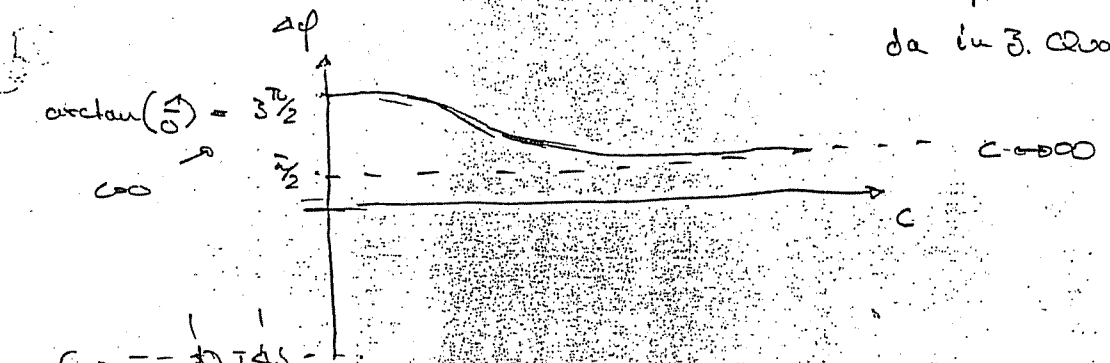
$\Rightarrow b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-j r \cdot b_2 + r \cdot b_4\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-j r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 - r \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} j a_1\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-j r \frac{2}{\sqrt{2}} a_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-j r \sqrt{2} a_1\right) = -j r a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

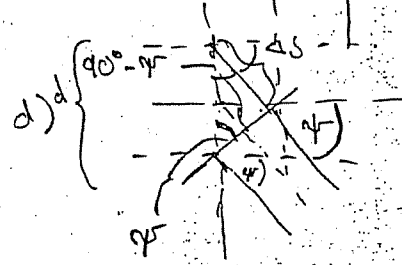
c) $\frac{b_3}{a_1} = -j r = -j \frac{1 - j\omega Z_0 C}{1 + j\omega Z_0 C} = \frac{-j - \omega Z_0 C}{1 + j\omega Z_0 C} = -\frac{j + \omega Z_0 C}{1 + j\omega Z_0 C}$

$\Rightarrow \Delta\varphi = \arctan\left[\frac{1}{\omega Z_0 C}\right] + \arctan\left[\omega Z_0 C\right] + \pi$

da im 3. Quadranten



d)



$\frac{\Delta s}{\lambda_0} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta s = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda_0 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\frac{c}{\omega} \cdot 2\pi = \frac{\Delta\varphi\, c}{\omega}$

$f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\omega} \cdot 2\pi$

$\Rightarrow \cos(90 - \psi) = \frac{\Delta s}{d}$ $\quad \cos(90 + \psi) = \frac{\Delta s}{d}$

$\Rightarrow +\sin(\psi) = \frac{\Delta s}{d}$

$\psi = \arcsin\left(\frac{\Delta s}{d}\right) = \arcsin\left(+\frac{\Delta\varphi\, c}{\omega d}\right)$

Aufgabe 6

a) $S_{12} = 0$ (Unilateral)

$z_{11} = R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}$

$z_{22} = R_{ds}$

$z_{21} =$

$U = zI$

$U_2 = z_{21} \cdot I_1 + z_{22} \cdot I_2$

$U_2 = R_{ds}(I_2 + g_m U_1)$

$= R_{ds}(I_2 - g_m z_{11} I_1)$

$U_1 = -I_1 \cdot z_{11}$

$\Rightarrow z_{21} = -R_{ds} \cdot g_m \cdot z_{11} = -R_{ds} \cdot g_m \left(R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}\right)$

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}(U_1 - Z_0 I_1)}{\frac{1}{2}(U_1 + Z_0 I_1)} = \frac{z_{11} - Z_0}{z_{11} + Z_0} = \frac{\frac{z_{11}}{Z_0} - 1}{\frac{z_{11}}{Z_0} + 1}$$

$$= \frac{R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} - Z_0}{R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}} + Z_0}$$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{\frac{U_2}{I_2} - Z_0}{\frac{U_2}{I_2} + Z_0} = \frac{R_{ds} - Z_0}{R_{ds} + Z_0}$$

$$S_{21} = \frac{I_2\left(\frac{U_2}{I_2} - Z_0\right)}{I_1(z_{11} + Z_0)} =$$

$$I_2 = -\left(g_m U_1 + \frac{U_2}{R_{ds}}\right) = -g_m(I_1 \cdot R_{gs} \cdot \frac{1}{j\omega C_{gs}} + \frac{U_2}{R_{ds}} = I_1\left(\frac{g_m R_{gs}}{j\omega C_{gs}} + \frac{1}{R_{ds}} z_{11}\right)$$

Stromteiler: $+ I_2 = g_m U_1 \cdot \frac{R_{ds}}{R_{ds} + Z_0} = g_m \frac{R_{ds}}{R_{ds} + Z_0} \cdot I_1 \left(R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}\right)$

mit $\frac{U_2}{I_2} = -Z_0$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I} \; g_m \frac{R_{ds}\left(R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}\right)}{R_{ds} + Z_0}(-Z_0 - Z_0) = \frac{-g_m R_{ds} 2 Z_0}{R_{ds} + Z_0 \left(1 + \frac{Z_0}{R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}}\right)}$$

b) Aus Stromteiler:

$$I_2 = g_m \frac{R_{ds}}{R_{ds} + 0}\left(R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}\right) \cdot I_1$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = g_m\left(R_{gs} + \frac{1}{j\omega C_{gs}}\right) = g_m \frac{(j R_{gs} \omega C_{gs} + 1)}{j\omega C_{gs}} \approx \frac{g_m}{j\omega C_{gs}}$$

$$\left|\frac{I_2}{I_1}\right| = \frac{g_m}{\omega C_{gs}} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \omega = \frac{g_m}{C_{gs}} \Rightarrow f_T = \frac{g_m}{2\pi C_{gs}}$$

c)

$$b_{22}^* = R_{DS} \rightarrow Z_0$$

$$\frac{R_{DS}\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R_{DS}+\frac{1}{j\omega C}} + j\omega L = Z_0^*$$

$$\Rightarrow \frac{R_{DS}}{-j\omega R_{DS}C+1} + j\omega L = Z_0 \frac{R_{DS}-\omega^2 R_{DS}CL + j\omega L}{R_{DS}(1+j\omega R_{DS}C)} = Z_0(1+j\omega R_{DS}C)$$

$$R_{DS} - \omega^2 R_{DS}^2 C L + j\omega L = Z_0 + j\omega R_{DS}^2 C Z_0$$

$$\omega L = \omega R_{DS}^2 C Z_0 \Rightarrow L = R_{DS}^2 C Z_0$$

$$R_{DS} - \omega^2 R_{DS}^4 C^2 Z_0 = Z_0$$

$$C = \frac{1}{\omega R_{DS}}\sqrt{\frac{R_{DS}-Z_0}{Z_0}}$$

$$L = R_{DS}\cdot\frac{1}{\omega R_{DS}}\sqrt{\frac{R_{DS}-Z_0}{Z_0}} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{R_{DS}-Z_0}{Z_0}}$$

d)

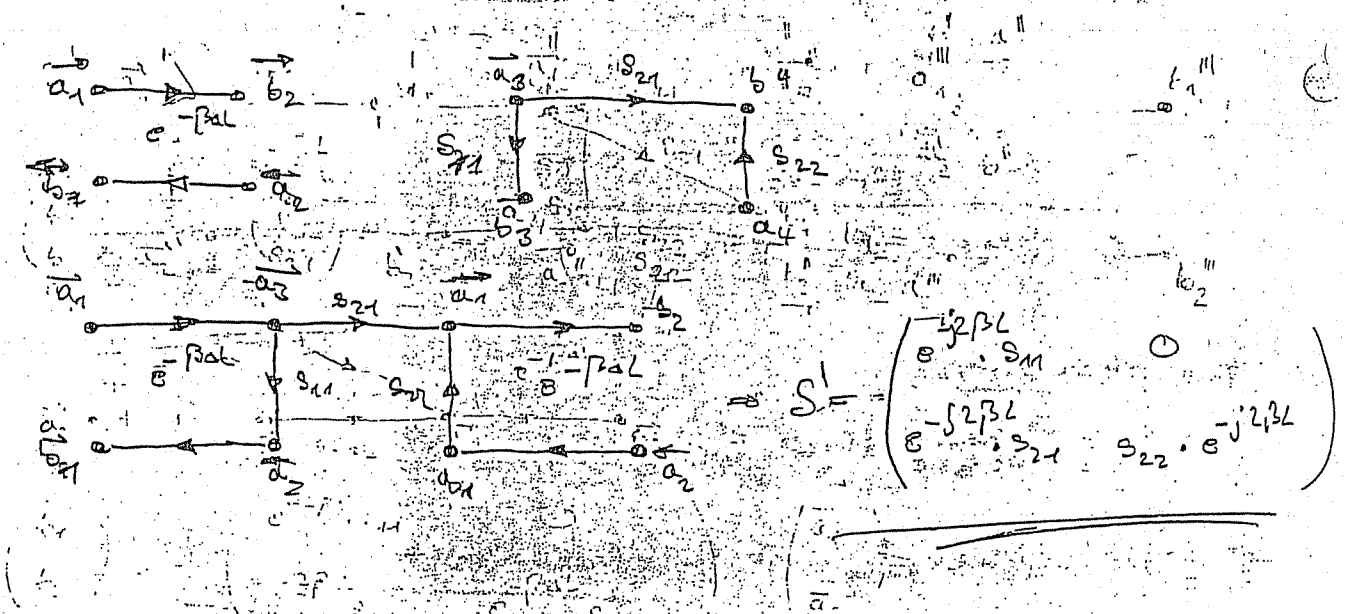
$$S = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\beta\Delta L} \\ e^{-j\beta\Delta L} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{L'C'}$$

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_0 \Rightarrow L' = Z_0^2\cdot C'$$

$$\Rightarrow \beta = \omega\sqrt{Z_0^2\cdot C'^2} = \omega Z_0 C'$$

e)



$$\Rightarrow S' = \begin{pmatrix} e^{-j2\beta L}\cdot S_{11} & 0 \\ e^{-j2\beta L}\cdot S_{21} & S_{22}\cdot e^{-j2\beta L} \end{pmatrix}$$

a) $\operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\underline{\vec{H}} \Rightarrow \operatorname{div}\underline{\vec{H}} = 0$

$\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = (\sigma_0 + j\omega\varepsilon_0)\underline{\vec{E}} = (1 + j\omega\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0})\sigma_0\underline{\vec{E}} \approx \sigma_0\underline{\vec{E}}$ da $\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \ll 1$

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}} = \sigma_0 \operatorname{rot}\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\sigma_0\underline{\vec{H}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{\vec{H}} - \Delta\underline{\vec{H}}$

$\Leftrightarrow \Delta\underline{\vec{H}} - j\omega\mu_0\sigma_0\underline{\vec{H}} = 0 \Leftrightarrow \Delta\underline{\vec{H}} - \underline{k}^2\underline{\vec{H}} = 0$ mit $\underline{k} = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_0} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0}$

Mit Ansatz $\underline{\vec{H}} = \vec{e}_y\,\underline{H}_y(x)$ und Fortsetzung:

$$\frac{d^2\underline{H}_y(x)}{dx^2} - \underline{k}^2\underline{H}_y(x) = 0$$

Allgemeine Lösung: $\underline{H}_y(x) = \underline{\alpha}\cosh(\underline{k}x) + \underline{\beta}\sinh(\underline{k}x)$

oder $\underline{H}_y(x) = \underline{\gamma}\,e^{+\underline{k}x} + \underline{\delta}\,e^{-\underline{k}x}$

b) Rechteckige Umläufe um den Leiter führen zu einer Differenz der Ströme

$\underline{H}_{1y}(x_1) - \underline{H}_{2y}(x_2) = \underline{I}$ bzw. $\underline{H}_{1y}(x_1) - \underline{H}_{3y}(x_3) = \underline{I}$

Dagegen führen rechteckige Umläufe um beide Leiter zu keiner Differenz der Ströme

$\underline{H}_{2y}(x_2) - \underline{H}_{3y}(x_3) = 0$

$\Rightarrow$ innerhalb jeder Gebiete gerade Konstante und $\underline{H}_{1y} = \underline{H}_{2y}$, $\underline{H}_{3y} = \underline{H}_{4y} + \frac{\underline{I}}{h}$

Wegen $\underline{H}_y(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$: $\underline{H}_{4y} = \underline{H}_{5y} = 0$ $\wedge$ $\underline{H}_{3y} = \frac{\underline{I}}{h}$

⊗	↑	↑	⊗

c) Falls in realen Leiter ein verschiedener Lösung von a) und Ansatz:

$\underline{H}_{1y}(x) = \underline{\alpha}\cosh(\underline{k}(x-3a)) + \underline{\beta}\sinh(\underline{k}(x-3a))$

Grenze bei $x = 3a$:

$\underline{H}_{1y}(3a) = \underline{\alpha}\cosh(\underline{k}\cdot 0) + \underline{\beta}\sinh(\underline{k}\cdot 0) = \underline{\alpha} \overset{!}{=} \underline{H}_{2y} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha} = 0$

damit Grenze bei $x = a$:

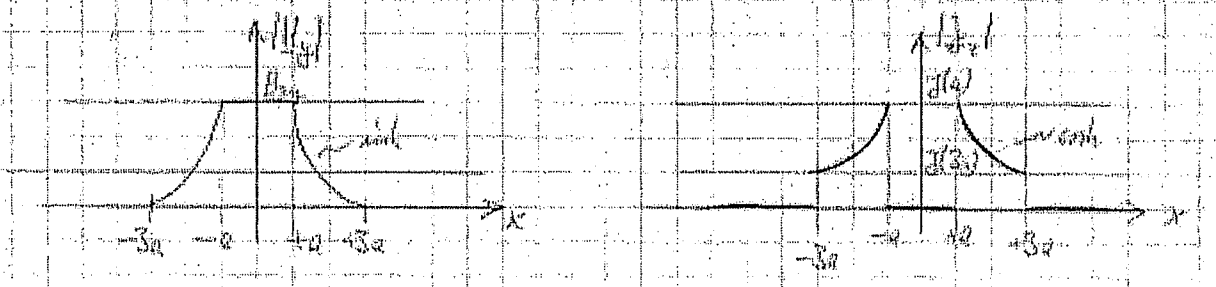
$\underline{H}_{1y}(a) = \underline{\beta}\sinh(\underline{k}(-2a)) \overset{!}{=} \underline{H}_{2y} = \frac{\underline{I}}{h} \Rightarrow \underline{\beta} = \frac{\underline{I}}{h}\frac{1}{\sinh(2\underline{k}a)}$

$$\Rightarrow \underline{H}_{1y}(x) = -\frac{\underline{I}}{h}\frac{\sinh(\underline{k}(x-3a))}{\sinh(2\underline{k}a)} = +\frac{\underline{I}}{h}\frac{\sinh(\underline{k}(3a-x))}{\sinh(2\underline{k}a)}$$

Strom aus $\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}$ mit Fortsetzung und $\underline{\vec{H}} = \underline{H}_y(x)\,\vec{e}_y$:

$$\underline{\vec{J}} = \underline{J}_z(x)\,\vec{e}_z = \vec{e}_z\frac{\partial\underline{H}_y(x)}{\partial x} = -\frac{\underline{I}}{h}\underline{k}\frac{\sinh(\underline{k}(3a-x))}{\sinh(2\underline{k}a)}\vec{e}_z$$

d)



H08
A2 (III)

a) TEM-Welle $\underline{\vec{H}} = \frac{1}{Z} \vec{n} \times \underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{H}_e} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Z_0 \mu_0}} (\vec{e}_y - \vec{e}_x) E_{e0} e^{-j k \vec{n}_e \cdot \vec{r}} \quad (1)$$

$$\underline{\vec{H}_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Z_0 \mu_0}} (\vec{e}_x \sin\varphi_r + \vec{e}_y \cos\varphi_r) E_{r0} e^{-j k \vec{n}_r \cdot \vec{r}} \quad (2)$$

b) $\vec{n}_e \cdot \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$ / $\vec{n}_e \cdot \vec{r}|_{z=0} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ (3)

$\vec{n}_r \cdot \vec{r} = x \sin\varphi_r - z \cos\varphi_r$ $\vec{n}_r \cdot \vec{r}|_{z=0} = x \sin\varphi_r$ (4)

$z=0$: Rot $\underline{\vec{E}} = \vec{0} \Leftrightarrow \underline{E}_{tang}$ stetig $\overset{\text{hier}}{\Longleftrightarrow} \underline{E}_y$ stetig $\Rightarrow \boxed{\underline{E}_y = 0}$ (5)
wegen idealem Leiter

$$\Rightarrow (\underline{E}_{ey} + \underline{E}_{ry})_{z=0} = \boxed{E_{e0} e^{-j\frac{kx}{\sqrt{2}}} + \underline{E}_{r0} e^{-j k x \sin\varphi_r} = 0} \quad \forall x \quad (6)$$

$$\Rightarrow 1)\ \sin\varphi_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\varphi_r = \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \cos\varphi_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_r \cdot \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z), \quad \boxed{\vec{n}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z)} \quad (8)$$

$$2)\ \boxed{\underline{E}_{r0} = -E_{e0}} \quad -j\pi = e^{-j\pi} \quad (9)$$

c) $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_e} + \underline{\vec{E}_r} = \vec{e}_y E_{e0} \left\{ e^{-j k \frac{x+z}{\sqrt{2}}} - e^{-j k \frac{x-z}{\sqrt{2}}} \right\} = -\vec{e}_y E_{e0} e^{-j k \frac{x}{\sqrt{2}}} \left(e^{-j k \frac{z}{\sqrt{2}}} - e^{+j k \frac{z}{\sqrt{2}}} \right)$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{E}} = -\vec{e}_y E_{e0}\, 2j\, e^{-j k \frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right)} \quad (10)$$

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{H}_e} + \underline{\vec{H}_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Z_0 \mu_0}} E_{e0} \left\{ (\vec{e}_x - \vec{e}_z) e^{-j k \frac{x+z}{\sqrt{2}}} - (\vec{e}_x + \vec{e}_z) e^{-j k \frac{x-z}{\sqrt{2}}} \right\}$$

$$\underline{\vec{H}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Z_0 \mu_0}} e^{-j k \frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ \vec{e}_x \underbrace{\left(e^{-j k \frac{z}{\sqrt{2}}} - e^{+j k \frac{z}{\sqrt{2}}} \right)}_{-2j \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right)} - \vec{e}_z \underbrace{\left(e^{-j k \frac{z}{\sqrt{2}}} + e^{+j k \frac{z}{\sqrt{2}}} \right)}_{2\cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right)} \right\} E_{e0} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{H}} = -E_{e0} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Z_0}} \left\{ \vec{e}_x \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_z\, j \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right\} e^{-j k \frac{x}{\sqrt{2}}} \quad (12)$$

d) $\vec{S}(t) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \}$

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ 2j E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Z_0}} \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \left[\vec{e}_y \times \left(\vec{e}_x \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) - j \vec{e}_z \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right) \right] \right\}$$

$$\vec{S}(t) = E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Z_0}} \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \left[-j \vec{e}_z \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_x \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$\boxed{\vec{S}(t) = E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{Z_0}} \sin^2\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_x} \quad (13)$$

In Zeitmittel wird Energie in +x-Richtung transportiert (14)
(stehende Welle kompliziert z-Richtung)

a) $\vec{S}(t) = \frac{1}{2} Re\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$

$\vec{S}(t) = \frac{1}{2} Re\{ 2j E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu_0}} \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_y \times \left[\vec{e}_x \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) - j \vec{e}_z \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right] \}$

$\vec{S}(t) = E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu_0}} \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \left[-j \vec{e}_z \cos\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) + \vec{e}_x \sin\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \right]$

$\vec{S}(t) = E_{e0}^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu_0}} \sin^2\left(\frac{kz}{\sqrt{2}}\right) \vec{e}_x$

Im Zeitmittel wird Energie in +x-Richtung transportiert

(stehende Welle bezüglich z-Richtung)

e) 1) $\vec{S}(t) = 0$ für $\sin\left(\frac{kz_l}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{kz_l}{\sqrt{2}} = l \cdot \pi \quad l = 0, -1, -2 \ldots$

$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow z_l = \frac{\sqrt{2}\, l \pi}{k} = \frac{\sqrt{2}\, l \pi}{2\pi} \lambda = \frac{l\lambda}{\sqrt{2}} \quad l = 0, -1, -2 \ldots$

2) $|\vec{S}(t)|$ = Maximum für $\sin^2\left(\frac{kz_m}{\sqrt{2}}\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{kz_m}{\sqrt{2}} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi \quad m = 0, -1, -2 \ldots$

$z_m = \frac{(2m-1)}{2\sqrt{2}} \lambda \quad m = 0, -1, -2 \ldots$

Aufgabe 3

a) $\text{rot}\, \vec{E} = -j\omega \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{H} = j \frac{1}{\omega\mu} \text{rot}\, \vec{E}$

$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\beta E_x \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\beta E_y$

$H_x = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{\beta}{\omega\mu} B \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{-j\beta z}$

$H_y = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{\beta}{\omega\mu} A \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$

$H_z = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = j \frac{1}{\omega\mu} (A k_y - B k_x) \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-}$

b) $\text{div}\, \vec{E} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial y} \Rightarrow A k_x = -B k_y$

$\Rightarrow B = -\frac{k_x}{k_y} A$

c) $G_1: \quad 0 \le x \le a \qquad y = b$

$E_x = E_z = H_y = 0$

$\cos(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{2b} \quad n = 1, 3, 5 \ldots$

$E_y = E_z = H_x = 0$

$\cos(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{2a}$ $\quad m = 1, 3, 5, \ldots$

G_{T3} $\quad 0 \leq x \leq a \quad y = 0$

$E_y = H_x = H_z = 0$: erfüllt

G_{T4} $\quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq b$

$E_x = H_y = H_z = 0$: erfüllt

d) $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$

$\boxed{k^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta^2}$

$\Rightarrow \beta = \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - k_x^2 - k_y^2}$

bei $m = n = 1$

$\omega_g^2 \varepsilon \mu = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2$

Aufgabe 4 H00:

keine Variation der Geometrie in y-Richtung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = 0$

b) $\Delta f_{mn} + k^2 f_{mn} = 0$

$\Rightarrow F_m''(x) \exp(\pm j\beta_m z) \mp \beta_m^2 F_m(x) \exp(\pm j\beta_m z) + k^2 F_m(x) \exp(\pm j\beta_m z) = 0$

$\Rightarrow F_m''(x) + (k^2 \mp \beta_m^2) F_m(x) = 0$

$\Rightarrow$ Ansatz: $F_m(x) = A_m \sin\left(\sqrt{k^2 \mp \beta_m^2}\, x\right) + B_m \cos\left(\sqrt{k^2 \mp \beta_m^2}\, x\right)$

mit $k_x^2 = (k^2 \mp \beta_m^2)$

$\Rightarrow F_m(x) = A_m \sin(k_x x) + B_m \cos(k_x x)$

Randbedingungen:

$x = 0$ Rot $H = 0 \rightarrow H_{tan} = H_z$ und $\partial_y = 0$

$\vec{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu} + \left[k^2 f_{mn} + \frac{\partial^2 f_{mn}}{\partial z^2}\right] \vec{e}_z \overset{!}{=} 0$

$= \frac{1}{j\omega\mu} \left[k^2 (A_m \sin(k_x 0) + B_m \cos 0) \exp(\pm j\beta_m z)\right.$

$\left. \mp \beta_m^2 (A_m \sin(0) + B_m \cos 0) \exp(\pm j\beta_m z)\right] = 0$

$\Rightarrow \left[k^2 B_m \mp \beta_m^2 B_m\right] = 0$

$\Rightarrow k^2 \mp \beta_m^2 = 0$ und $B_m = 0$

$x = a$

$H_z = k^2 (A_m \sin(k_x a) \mp \beta_m^2 A_m \sin(k_x a))$

$\Rightarrow k_x a = n \cdot \pi \rightarrow k_x = \frac{\pi}{a} \cdot n$

$\Rightarrow F_{mn} = A_m \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot n\, x\right)$ mit $\frac{\pi}{a} \cdot n = (k^2 - \beta_m^2)$

$\Rightarrow \beta_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \cdot n\right)^2}$

Grenzfrequenz: $\gamma = 0 \Rightarrow j\beta = 0$

$\Rightarrow 0 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \cdot n\right)^2} \rightarrow \omega^2 \varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a} \cdot n\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}\, \frac{\pi}{a} \cdot n \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\pi}{a} \cdot n$ mit $n = 1$

$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\pi}{a}$

$\vec{E}_{10} = A_m k_x \cos(k_x x) \cdot \exp(-j\beta_1 z)$

$\vec{H}_{10} = \frac{1}{j\omega\mu} \left[-j\beta_1 A_1 + k_x \cos(k_x x) \cdot \exp(-j\beta_m z) \vec{e}_x + (k^2 - \beta_1^2) A_m \sin(k_x x) \exp(-j\beta_1 z) \vec{e}_z\right]$

c) $\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{1h} + \vec{E}_{1r} + \vec{E}_{10} = \left[\underline{E}_0 + \underline{E}_{1r} + H_1 k_x \cos(k_x x)\right] \vec{e}_y$

$\vec{H}_{1T} = \vec{H}_{1h} + \vec{H}_{1r} + \vec{H}_{10} = \left[-\frac{E_0}{Z_{F0}} - \frac{E_{1r}}{Z_{F0}} - \frac{1}{\omega\mu} \beta_1 A_1 k_x \cos(k_x x)\right] \vec{e}_x$

$\underline{z = +c}$:

$\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{2h} + \vec{E}_{2r} = \left[\underline{E}_{2h} + A_2 k_x \cos(k_x x)\right] \vec{e}_y$

$\vec{H}_{2T} = \vec{H}_{2h} + \vec{H}_{2r} = \left[-\frac{E_{2h}}{Z_{F0}} - \frac{\beta_2 \beta_x}{\omega\mu} k_x \cos(k_x x)\right] \vec{e}_x$

d) $\underline{z = 0}$:

$\rho_0 + \Xi = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}$ pour $a < x < c$

$\vec{H}_{1T} = \vec{H}_{2T}$

$0 < x < a$: $\vec{E}_{1T} = 0$, $\vec{E}_{2T} = 0$

Aufgabe 4

a) Da keine Variation der Geometrie in y-Richtung $\Rightarrow$ hoher Wellenwiderstand TE-Feldtyp in $\vec{e}_y$ Richtung.

b) $\Delta f_{mn} + k^2 f_{mn} = 0$

mit: $f_{mn} = F_m'' \exp(\pm j\beta_m z) + F_m \exp(\pm j\beta_m z)(-\beta_m) + k_m^2 F_m \exp(\pm j\beta_m z) = 0$

$\Rightarrow F_m'' + (k^2 - \beta_m^2) F_m = 0$

Ansatz: $F_m(x) = A_m \sin\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right) + B_m \cos\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right)$

Rand: $x = y = 0$

Betrachte TM-Welle $\vec{H} \perp \vec{e}_z$ Komponente $\sqrt{k^2 - \beta_m^2}\,(k^2 - \beta_m^2 x)\,\sqrt{k^2-\beta_m^2}$

$\Rightarrow \vec{H}_z = \left[k^2 \left(A_m \sin\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right) + B_m \cos\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right)\right) \exp(\pm j\beta_m z) \right.$

$\left. \pm \beta_m^2 \left(A_m \sin\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right) + B_m \cos\left(\sqrt{k^2-\beta_m^2}\, x\right)\right) \exp(\pm j\beta_m z) \right] \vec{e}_z$

MW: $x = 0, y = 0, z < 0$ $\qquad k = k$

$\Rightarrow \vec{H}_z(0,0,z) = k^2 (0 + B_m 1) \exp(\pm j\beta_m z)$

$\pm \beta_m^2 (0 + B_m 1) \exp(\pm j\beta_m z) = 0$

$\Rightarrow B_m = 0$ oder $k^2 - \beta_m^2 = 0$

MW $x = a, y = 0, z < 0$ $\qquad \sqrt{k^2 - \beta_z^2} = k_x$

$H_z(a,0,z) = (k^2 + \beta_m^2)(A_m \sin(k_x a)) = 0$

$\Rightarrow k_x a = n\pi \Rightarrow k_x = \frac{\pi}{a} \cdot n$

$\Rightarrow k^2 - \beta_m^2 = k_x^2 \Rightarrow \beta_m^2 = k^2 - k_x^2 \Rightarrow \beta_m = \sqrt{k^2 - k_x^2}$

$\Rightarrow \beta_m = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2} n^2}$

Grenzfrequenz: ω_{n0}

$\beta_m = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2} n^2} \Rightarrow \omega_{n0}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon\mu}$

$\Rightarrow \omega_{n0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\pi}{a}$

$f_{10} = \exp(\mp j\beta_1 z)\; F_1(x) = \exp(-j\beta_1 z) \cdot A_m \sin(k_x x)$

$\Rightarrow \vec{E}_{10} = A_m k_x \cos(k_x x) \cdot \exp(-j\beta_1 z)\, \vec{e}_y \qquad \text{mit } \beta_1 = \sqrt{\omega^2 \varepsilon\mu - \frac{\pi^2}{a^2}}$

$\vec{H}_{10} = \frac{1}{j\omega\mu} \left(\pm A_m k_x \cos(k_x x) \cdot \exp(\mp j\beta_1 z) \cdot (-j\beta_1)\, \vec{e}_x \right.$

$\left. + \left(k^2 - \beta_1^2\right) \left(A_m \sin(k_x x) \exp(-j\beta_1 z) \right) \vec{e}_z \right)$

c) $\underline{z = -0}$:

$\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{1H} + \vec{E}_{1T} + \vec{E}_{10} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{1R} + \vec{E}_{10T} = \vec{E}_0 + A_m k_x \cos(k_x x)\, \vec{e}_y$

$\vec{H}_{1T} = -\frac{\vec{E}_0}{Z_{F0}} - \frac{\vec{E}_{1R}}{Z_{F0}} + \vec{H}_{10} = -\frac{\vec{E}_0}{Z_{F0}} - \frac{\vec{E}_{10T}}{Z_{F0}} - \frac{1}{\omega\mu} \beta_1 A_m k_x \cos(k_x x)$

$= -\frac{\vec{E}_0}{Z_{F0}} - \frac{A_m k_x}{Z_{F0}} \cos(k_x x) \cdot j\beta_1$

$\underline{z = +0}$

$\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{2H} + \vec{E}_{10} = \vec{E}_{2H} + A_m \cos(k_x x)\, k_x$

$\vec{H}_{2T} = -\frac{\vec{E}_0}{Z_{F0}} + \vec{H}_{10T} = -\frac{\vec{E}_{2H}}{Z_{F0}} - \frac{A_m k_x}{\omega\mu} j\beta_1 \cos(k_x x)$

d) $\Rightarrow$ Rot $\vec{E} = 0$ an Blende:

$\rightarrow a < x < c \rightarrow \vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}$ (1) $\vec{H}_{1T} = \vec{H}_{2T}$

$x > c \qquad \vec{E}_{1T} = 0 \;,\; \vec{E}_{2T} = 0$

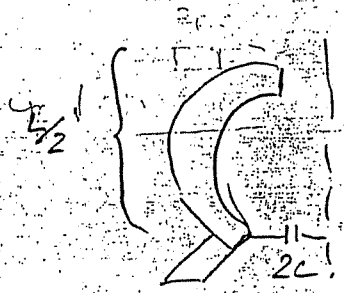
Aufgabe 5

a) $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ Symmetrie → $S_{11} = S_{22}$

reziprok → $S_{12} = S_{21}$

$= \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{11} \end{pmatrix}$

b) Gleichtakt → $a_1 = a_2 = a$ → $i_{MW} = 0$ → Leerlauf



$\Gamma_E = \frac{b_1}{a_1}$

$b_1 = S_{11} a + S_{21} \cdot a$

$\Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = S_{11} + S_{21}$

$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_{Lof}}} + \sqrt{Z_{Lof}} I_1\right)$ $b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_{Lof}}} - \sqrt{Z_{Lof}} I_1\right)$

$\Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_E - Z_{Lof}}{Z_E + Z_{Lof}}$ $\begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta L & j Z_L \sin\beta L \\ \frac{j}{Z_L}\sin\beta L & \cos\beta L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U_e = U_a \cos\beta L + j Z_L \sin\beta L \, I_a$

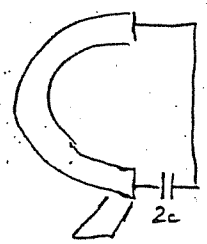
$I_e = U_a \frac{j}{Z_L}\sin\beta L + I_a \cos\beta L$

$\Rightarrow \frac{U_e}{I_e} = Z_{E_e} = \frac{\frac{U_a}{I_a}\cdot\cos\beta L + j Z_L \sin\beta L}{\frac{j}{Z_L}\sin\beta L + \cos\beta L} = \frac{\frac{U_a}{I_a} + j Z_L \tan\beta L}{1 + \frac{U_a}{I_a}\tan(\beta L)\cdot\frac{j}{Z_L}}$

→ Z_E für Leerlauf: $Z_{E_L} = -j\frac{Z_L}{\tan(\beta L)} = -j\frac{Z_L}{\tan(\beta \cdot L/2)}$

$\Rightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{-j\frac{Z_L}{\tan(\beta L/2)} - Z_{Lof}}{-j\frac{Z_L}{\tan(\beta L/2)} + Z_{Lof}} = \frac{-Z_{Lof}(\tan(\beta L/2)) - j Z_L}{-Z_{Lof}(\tan(\beta L/2)) + Z_{Lof}} = \Gamma_e$

c) $\Gamma_0 = \frac{b_1}{a_1}$ $a_1 = a$ $a_2 = -a$ EW in Symmetrie Ebene



$\Gamma_0 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_{E_0} - Z_{Lof}}{Z_{E_0} + Z_{Lof}}$

$\omega L \ll Z_{E0} = j\sqrt{Z_L}\tan(\beta L/2)$

$Z_E = Z_{E0} \parallel \frac{1}{j\omega 2C} = \frac{Z_L \tan(\beta L/2)}{\omega 2C} \Big/ j\left(Z_L \tan(\beta L/2) - \frac{1}{\omega 2C}\right)$

$= \frac{Z_L \tan(\beta L/2)}{j\left(Z_L \tan(\beta L/2)\,\omega 2C - 1\right)}$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{Z_E - Z_{ref}}{Z_E + Z_{ref}} = \frac{\frac{j(Z_L \tan(\beta L/2)\,\omega 2C - 1)}{Z_L \tan(\beta L/2)} - Z_{ref}}{\frac{j(Z_L \tan(\beta L/2)\,\omega 2C - 1)}{Z_L \tan(\beta L/2)} + Z_{ref}}$$

d) $\Gamma_0 = \frac{b_1}{a_1} = (S_{11} - S_{21}) \Rightarrow S_{21} = S_{11} - \Gamma_0$

$\Gamma_E = (S_{11} + S_{21}) \Rightarrow \Gamma_E = S_{11} + \Gamma_0 + S_{11} \Leftrightarrow \Gamma_E = 2S_{11} - \Gamma_0$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2}(\Gamma_E + \Gamma_0)$

$S_{21} = \frac{1}{2}\Gamma_E + \frac{1}{2}\Gamma_0 - \Gamma_0 = \frac{1}{2}(\Gamma_E - \Gamma_0)$

e) $\underline{\omega > \omega_c}$

$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{2L}\cot(\beta L)$ $\rightarrow Y_L = \frac{1}{Z_0} = 0{,}05\,S$

Aus Hilfsblatt $\rightarrow \beta L = 1{,}5$

$\rightarrow \omega_c = 0{,}05\,S \rightarrow C = \frac{0{,}05}{2\pi \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{-12}\,F = 20\,pF$

$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot L = \frac{2\pi}{\lambda_{ph}} f L = \frac{\omega}{c_0} \cdot L = \frac{\omega \cdot L}{c_0}\sqrt{\varepsilon_{eff}} = 1{,}5$

$\lambda_{ph} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{eff}}}$

Aus Hilfsblatt:

$\sqrt{\varepsilon_{eff}} = 2{,}8 \rightarrow L = \frac{1{,}5 \cdot c_0}{\omega \sqrt{\varepsilon_{eff}}} = 7{,}5\,mm$

$\frac{\omega}{n} \approx 4$