a)

$$\underline{Y}_C = j\omega C = j\omega \underline{\varepsilon}_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\underline{Y} = j\omega C_1 + (j\omega C_2 \parallel G_2)$$

$$= j\omega \varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} + \frac{j\omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot \sigma_2 \frac{A}{\cancel{d}}}{j\omega \varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{\cancel{d}} + \sigma_2 \frac{A}{\cancel{d}}} \qquad \left(G_2 = \sigma_2 \cdot \frac{A}{d}\right)$$

$$= j\omega \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot \left(\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \sigma_2}{j\omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 + \sigma_2}\right)$$

Der Vergleich zwischen $\underline{Y}_C$ und $\underline{Y}$ liefert:

$$\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} \sigma_2}{j\omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0 + \sigma_2} = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} \cdot (1 - j\omega \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2})}{1 + (\omega \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2})^2}$$

$$= \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2}}{1 + (\omega \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2})^2} - j \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \omega \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2}}{1 + (\omega \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{r\infty} = \varepsilon_{r1} \quad , \quad \Delta \varepsilon_r = \varepsilon_{r2} \quad , \quad \tau = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r2}}{\sigma_2}$$

b)

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_{r\infty} + \frac{\Delta \varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2} \quad \wedge \quad \varepsilon_r'' = \frac{\Delta \varepsilon_r \omega \tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta \varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2} = \varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty} \quad \wedge \quad \frac{\Delta \varepsilon_r}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{\varepsilon_r''}{\omega\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \omega\tau = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty}}$$

Einsetzen in $\varepsilon_r'' = \frac{\Delta \varepsilon_r \omega \tau}{1 + (\omega\tau)^2}$:

$$\Leftrightarrow \cancel{\varepsilon_r''} \cdot \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty}}\right)^2\right] = \Delta \varepsilon_r \cdot \frac{\cancel{\varepsilon_r''}}{\varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty}}$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty})^2 + \varepsilon_r''^2 = \Delta \varepsilon_r \cdot (\varepsilon_r' - \varepsilon_{r\infty})$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r''^2 + \varepsilon_r'^2 - 2\varepsilon_r' \varepsilon_{r\infty} + \varepsilon_{r\infty}^2 - \Delta \varepsilon_r \varepsilon_r' + \Delta \varepsilon_r \varepsilon_{r\infty} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r''^2 + \varepsilon_r'^2 - (2\varepsilon_{r\infty} + \Delta \varepsilon_r) \varepsilon_r' + \left(\varepsilon_{r\infty} + \frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)^2 - \left(\varepsilon_{r\infty} + \frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)^2 + \varepsilon_{r\infty}^2 + \Delta \varepsilon_r \varepsilon_{r\infty} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r''^2 + \left(\varepsilon_r' - \left(\varepsilon_{r\infty} + \frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)\right)^2 = \cancel{\varepsilon_{r\infty}^2} + \cancel{\Delta \varepsilon_r \varepsilon_{r\infty}} + \left(\frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)^2 - \cancel{\varepsilon_{r\infty}^2} - \cancel{\Delta \varepsilon_r \varepsilon_{r\infty}}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_r''^2 + \left(\varepsilon_r' - \left(\varepsilon_{r\infty} + \frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\Delta \varepsilon_r}{2}\right)^2$$

c)

$$\Delta \varepsilon_r = \varepsilon_{r,stat} - \varepsilon_{r\infty}$$

... s. Blatt