Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921

Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 106
D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik II (Bachelor / Vordiplom) SS 2010

07.08.2010

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1 **[9 Punkte]**

Die lineare Abbildung L sei bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ im Bild- und Urbildraum durch die Matrix

$$A = \mathcal{L}_L^{\mathcal{B},\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} -6 & 6 & 36 \\ -12 & 12 & 72 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung L bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \left(e_1 + e_2, \frac{1}{6} e_3, e_2 - \frac{1}{6} e_3\right)$ im Bild- und Urbildraum.

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die Matrix auf Diagonalisierbarkeit und geben Sie ~~die~~ eine Diagonalform~~en~~ bzw. ~~die~~ eine Jordan–Normalform~~en~~ an.

Hinweis: Sie müssen die Basiswechselmatrix nicht bestimmen.

Aufgabe 3 **[9 Punkte]**

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für $x \in (0, \infty)$ zunächst

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \qquad \text{und anschließend} \qquad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}.$$

Aufgabe 4 **[7 Punkte]**

Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{5} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x-1}}\, dx.$$

Aufgabe 5 **[9 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $g(t) := \int_0^t \sin^2(x)\, dx$ für $t \in (0, \pi)$.

(a) Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend ist, zu g also eine Umkehrfunktion h existiert. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, sofern der Wert existiert. (4 Punkte)

Aufgabe 6 **[11 Punkte]**

Lösen Sie auf $I = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} \sinh\big(u(x)\big)\, u'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1-x}, & x \in I, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$