Probeklausur HM IV

Donnerstag, 22. Juli 2010
11:44

Aufg. 1

a) Def. „$f: G \to \mathbb{C}$ hol."

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet

$f: G \to \mathbb{C}$ holomorph

$:\iff \forall z_0 \in G$ existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

b) Ist $f(x + iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ hol.

wobei $x, y \in \mathbb{R}$, $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

so gelten die CR-DGLn:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)$$

und $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$

Sind $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, und erfüllen die CR-DGLn dann ist

$f = u + iv$ holomorph

c) maximale Gebiete, in denen f und g hol. sind

$f(z) = \mathrm{Re}(z)$ ist nirgends hol.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ bel. dann ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0)$

und $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{Re(z) - Re(z_0)}{Re(z) + i Im(z) - Re(z_0) - i Im(z_0)} = 1$

$Im(z) = Im(z_0)$

Da $1 \neq 0$ ex. GW nicht, f nirgends hol.

$g(z) = \frac{z}{1+z^2}$ ist hol. auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

Def. $f(z) = z$, $h(z) = 1 + z^2$, dann sind f, h hol. auf ganz $\mathbb{C}$

$\Rightarrow g(z)$ hol., wo $h(z) \neq 0$

$\Rightarrow g$ hol. in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

Aufg. 2

a) $\Gamma = \gamma([a,b])$, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ st. diff'bare Kurve, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig

Def.: $\int_\Gamma f(z)\, dz$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

b) Nenne CIF + Verallgemeinerung

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ hol

$a \in G$, $R > 0$ mit $B_R(a) \subseteq G$,

$0 < r < R$. Dann gilt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

allgem.: für $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz$$

c) Berechne: $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-z^2}}{(z-1)^2}\, dz$

Es gilt: $f(z) = e^{-z^2}$ ist hol. auf $\mathbb{C}$

$$\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \underset{\text{Deform. CIS}}{=} \int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz \overset{\text{CIF, } k=1}{=} \frac{2\pi i}{1!} f'(z)\Big|_{z=1}$$

$$= 2\pi i(-2)e^{-1} = -4\pi i e^{-1}$$

Aufg. 3

i) $f_1(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\sin(z)}$

isol. Sing. in $\sin z = 0 \Rightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

· $k = 0$ $\sinh(0) = 0$

$$(\sinh(z))'\Big|_{z=0} = \cosh(z)\Big|_{z=0} = 1$$

sin hat NS in $z=0$

$\Rightarrow$ $z=0$ hebbare Singularität

• $\underline{k \neq 0}$ $\quad \sin'(k\pi) \neq 0$

$\Rightarrow$ $k\pi$ ist einfacher Pol von f_1

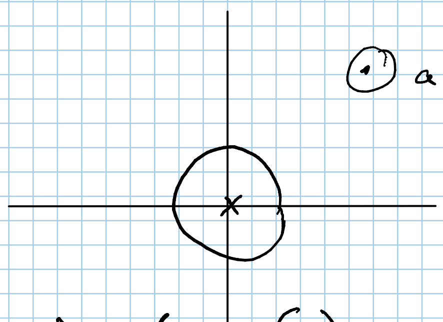
ii) $f_2(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{k\pi}, \; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Dies sind einfache Nennernullstellen

$\Rightarrow$ Pole 1. Ordnung

0 ist keine isol. Singularität, da 0 ein Häufungspunkt von $\left\{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ ist.



$\odot$ a $\quad f$ hol. in $B_R(a) \setminus \{a\}$

iii) $f_3(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z \cdot (\sin(z))^2}$

isol. Sing.: $z=0$, $z=k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

• $\underline{z=0}$ 3-fache Nennernullstelle

$$\left.\begin{array}{r} 1-\cos(0) = 0 \\ \sin(0) = 0 \\ \cos(0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\text{-fache Zählernullstelle}$$

$\Rightarrow$ $z=0$ ist Pol 1. Ordnung

- $z = k\pi$ ist 2-fache Nennernullstelle

- **k gerade** $1 - \cos(k\pi) = 1 - (-1)^k = 0$

$$\left(1 - \cos(z)\right)'\Big|_{z = k\pi} = \sin(k\pi) = 0$$

$$\left(1 - \cos z\right)''\Big|_{z = k\pi} = \cos(k\pi) \neq 0$$

$\Rightarrow k\pi$, k gerade, 2-fache Zählernullstelle

$\Rightarrow k\pi$, k gerade, hebbare Sing.

- **k ungerade:** $1 - \cos(k\pi) = 1 - (-1)^k = +2$

$\Rightarrow k\pi$; k ungerade, 2-fache Pole

Aufg. 4

- **Falls $a^2 = b^2$**

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cdot 1}\, dt = \frac{1}{a^2}\, 2\pi$$

- **Falls $a^2 \neq b^2$**

Sei $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Def. $f(z) \overset{(*)}{=} \dfrac{-i}{\frac{a^2}{4}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{b^2}{4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{z}$

$$= \frac{-4iz}{a^2(z^4 + 2z^2 + 1) - b^2(z^4 - 2z^2 + 1)}$$

$$= \frac{-4iz}{(a^2-b^2)z^4+2(a^2+b^2)z^2+a^2-b^2}$$

Wegen (*) gilt

$$\int_{2\pi} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-i}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}\cdot e^{-it}\,(+i)\cdot e^{it}\,dt$$

Wir berechnen das Kurvenintegral mit dem Residuensatz

1. Schritt: Singularitäten

Setze $w = z^2$, dann ist der Nenner von f: $w^2 + 2\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,w + 1$

NS: $$w = -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 - 1}$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-(a^4-2a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)^2}}$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \pm \sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}}$$

$$= -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \pm \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$\Rightarrow w_1 = -\frac{a^2+2ab+b^2}{\dots} = -\frac{(a+b)^2}{\dots} = -\frac{a+b}{\dots}$$

$$\Rightarrow w_1 = -\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = -\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} = -\frac{a+b}{a-b}$$

$$w_2 = -\frac{a-b}{a+b}$$

$\Rightarrow$ Der Nenner von f hat 4 NS:

$$z_1 = i\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \qquad z_2 = -i\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$z_3 = i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \qquad z_4 = -i\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Da $-4iz$ für $z = z_1, z_2, z_3, z_4$ nicht 0 ist, ist z_i einfacher Pol von f für $i = 1,2,3,4$

2. Schritt: Liegen $z_1, -, z_4$ in $\mathrm{int}(\gamma)$?

Es ist $|z_1| = |z_2|$; $|z_3| = |z_4|$

Es gilt: $|z_1| \neq 1$ und $|z_3| \neq 1$

$$|z_1| = 1 \Rightarrow |z^2| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a+b}{a-b}\right| = 1$$

$$\Rightarrow a = 0 \lor b = 0 \quad ⚡ \quad \text{da } a, b \neq 0$$

analog für z_3

$$|z_1||z_3| = \left|\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right| \left|\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right| = 1$$

$\Rightarrow$ entwede i) $|z_1| < 1 \land |z_3| > 1$

ii) $|z_1| > 1 \land |z_3| < 1$

3. Schritt Residuensatz

i) $(|z_1| \wedge |z_2|) < 1 \quad (|z_3| \wedge |z_4|) > 1$

Da γ eine einfach geschl. Kurve, st. st. diff'bar und f in $\mathrm{int}(\gamma)$ bis auf Pole z_1 und z_2 hol. ist, gilt:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2) \right)$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{-4iz_1}{\left((a^2+b^2)z^4 + 2(a^2+b^2)z^2 + a^2-b^2\right)'\Big|_{z=z_1}}$$

da nur z_1^2 eingeht und $z_1^2 = z_2^2$

$$= \frac{-4iz_1}{4(a^2-b^2)z_1^3 + 4(a^2+b^2)z_1} = \frac{-i}{2ab} = \mathrm{Res}(f, z_2)$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 2\left(\frac{-i}{2ab}\right) = \frac{2\pi}{ab}$$

ii) $|z_3|, |z_4| < 1, \quad |z_2|, |z_1| > 1$

Da γ einfach geschl. Kurve, st. st. diff'bar, f in $\mathrm{int}(\gamma)$ hol. bis auf die Pole z_3 und z_4

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, z_3) + \mathrm{Res}(f, z_4) \right)$$

$$\mathrm{Res}(f, z_3) = \frac{-4iz_3}{4(a^2-b^2)z_3^3 + 4(a^2+b^2)z_3} = \frac{i}{2ab} = \mathrm{Res}(f, z_4)$$

$$\Rightarrow \int f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{i}{2ab} = \frac{-2\pi}{ab}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot 2 \cdot \frac{i}{2ab} = -\frac{2\pi}{ab}$$