

# Zusammenfassung

## Numerische Mathematik für Elektrotechniker

RWTH Aachen, SS 2006, Prof. Dr. W. Dahmen

©2006 by Sebastian Strache, Ralf Wilke  
Korrekturen bitte an Ralf.Wilke@rwth-aachen.de

27. August 2006

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kondition und Stabilität</b>	<b>2</b>
2.1	Elementare Fehlerfortpflanzung . . . . .	2
2.2	Anwendung . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>2</b>
3.1	LR-Zerlegung . . . . .	2
3.1.1	ohne Pivotisierung . . . . .	2
3.1.2	mit Pivotisierung . . . . .	3
3.1.3	mit Äquilibrirung . . . . .	3
3.2	Cholesky Verfahren . . . . .	4
3.3	Givens-Rotation . . . . .	4
3.4	Verstärkungsfaktoren: . . . . .	6
3.5	Normen . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Lineare Ausgleichrechnung</b>	<b>7</b>
4.1	Normalengleichung . . . . .	7
4.2	Merkmale für „positiv definit“ . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Nichtlin. Gleichungssysteme, iterative. Lösungsverfahren</b>	<b>8</b>
5.1	Banach'scher Fixpunktsatz . . . . .	8
5.1.1	Fehlerabschätzung . . . . .	8
5.2	Newton . . . . .	9
5.2.1	A-posteriori Fehlerabschätzung . . . . .	9
5.3	Gauß-Newton . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Polynomiteration</b>	<b>10</b>
6.1	Lagrange'sche Grundpolynome . . . . .	10
6.2	Newton-Form . . . . .	10
6.3	Fehlerabschätzung auf $[a, b]$ . . . . .	10

6.4	Neville-Aitken-Schema . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Bewertung</b>	<b>11</b>
7.1	Newton . . . . .	11
7.2	Neville-Aitken-Schema . . . . .	11
7.3	Horner-Schema . . . . .	11

## 1 Vorwort

Das folgende Dokument ist das Ergebnis unserer Zusammenfassung der Algorithmen und Ideen für NuMa. Es darf ausschließlich kostenlos weitergegeben werden. Es wird keine Garantie für die Richtigkeit gewährt; Verwendung auf eigene Gefahr.

## 2 Kondition und Stabilität

### 2.1 Elementare Fehlerfortpflanzung

Sei  $x \mapsto f(x)$  gegeben.

Zwischen dem rel. Fehler der Eingabegröße  $r_x = \left| \frac{\tilde{x}-x}{x} \right|$  und dem rel. Fehler der Ausgabe  $r_f = \left| \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \right|$  gibt es den Zusammenhang:

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| = \underbrace{\left| \frac{f'(\zeta) \cdot x}{f(x)} \right|}_{\text{Verstärkungsfaktor } \kappa_{rel}: \text{Kondition}} \cdot \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

In erster Näherung ist damit

$$\kappa_{rel}(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

### 2.2 Anwendung

Sei  $f(x)$ , ein  $x_0$  und ein relativer Fehler  $\alpha$  von  $x_0$  gegeben.

**Aufgabe:** Schätzen Sie den rel. Fehler von  $f(x_0)$  ab.

**Lösung:**  $\kappa_{rel}(x_0)$  wie oben berechnen. Der rel. Fehler von  $f(x_0)$  ist  $r_f = \kappa_{rel}(x_0) * \alpha$

## 3 Lineare Gleichungssysteme

### 3.1 LR-Zerlegung

#### 3.1.1 ohne Pivotisierung

Wie Gauß. Erzeugung durch Abzug der Spalten voneinander. In  $L$  stehen die Faktoren, mit denen die Spalten multipliziert wurden. In  $R$  stehen die restlichen Einträge, die Ergebnis vom Gauß-Algorithmus sind.

1.  $A = L \cdot R$

2.  $L \cdot y = b$  Vorwärtseinsetzen
3.  $R \cdot x = y$  Rückwärtseinsetzen

### 3.1.2 mit Pivotisierung

**Vorteil:** Verbesserung der Stabilität

**Aufwand:**  $\frac{1}{3}n^3$

**Idee:** Durch Vertauschen von Zeilen wird  $A$  so geändert, dass der für das Gauß-Verfahren aktuelle Eintrag der in der Spalte betragsgrößte ist. Dadurch wird die Kondition des Algorithmus verbessert.

1.

$$P \cdot A = L \cdot R$$

$P$  ist Permutationsmatrix. Sie entsteht aus der Identität  $I$  durch Vertauschen der in  $A$  getauschten Zeilen. Dabei schreibt man am einfachsten die Identität zu Anfang des Verfahrens auf und vollzieht an ihr alle Permutations mit.

2.

$$\det P = (-1)^{\text{Anzahl der Vertauschungen}}$$

3.  $L \cdot y = P \cdot b$

4.  $R \cdot x = y$

$$\det A = \det P^{-1} \cdot \det R$$

### 3.1.3 mit Äquilibrierung

**Idee:** Erstellen einer Diagonal-Matrix  $D$ , welche  $\frac{1}{\text{Zeilenorm}}$  enthält. Dadurch werden die Zeilen im Verhältnis zu ihren Einträgen skaliert, was die Kondition des Algorithmus verbessert. Äquilibrierung wird meist als Ergänzung zur Pivotisierung verwendet.

1. Zeilennormen  $\|\cdot\|_\infty$  bestimmen = Addieren der Zeileneinträge
2.  $D =$  Diagonalmatrix mit  $\frac{1}{\text{Zeilennorm}}$  auf der Diagonale
3.  $D \cdot A = D \cdot b$  berechnen
4. mit oder ohne Pivotisierung weiterbehandeln  
Dabei beachten:

$$L \cdot y = P \cdot \underbrace{D \cdot b}_{\text{schon berechnet}}$$

$$R \cdot x = y$$

### 3.2 Cholesky Verfahren

**Aufwand:**  $\frac{1}{6}n^3$   
Zerlegung

$$A = LDL^T$$

Einträge von  $L$  und  $D$  berechnen sich mit folgenden Formeln

$$d_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2 \cdot d_{j,j}$$

$$l_{i,k} = \frac{1}{d_{k,k}} \cdot (a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} \cdot d_{j,j} \cdot l_{k,j}) \text{ mit } i > k$$

1. Berechnung 1. Spalte  $i = 1 : d_{1,1}, l_{2,1}, l_{3,1}, l_{4,1}$
2. Berechnung 2. Spalte  $i = 2 : d_{2,2}, l_{3,2}, l_{4,2}$
3. Berechnung 3. Spalte  $i = 3 : d_{3,3}, l_{4,3}$
4. Berechnung 3. Spalte  $i = 3 : d_{4,4}$
5.  $L \cdot y = b$
6.  $D \cdot z = y$
7.  $L^T \cdot x = z$

### 3.3 Givens-Rotation

Auch QR-Zerlegung genannt

**Aufwand:**  $\frac{4}{3}n^3$

**Idee:** Erzeugung von Nullen in der Matrix durch Drehung eines 2x2-Vektors derart, dass eine Koordinate auf eine Koordinaten-Achse fällt und damit 0 ist.

**Vorteil:**  $Q$  ändert die Kondition nicht. Das bedeutet, wir können Nullen erzeugen, ohne die Konditionszahl zu verändern.

$$\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \text{ Dies ist die Drehmatrix.}$$

Aus geometrischen Überlegungen zeigt sich:  $c = \frac{x}{r}$ ,  $s = \frac{y}{r}$  und  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

$y$  ist der Wert, der durch die Drehung zu 0 werden soll.

Ist das Problem größer als die 2x2 Matrix, so ist diese in eine Einheitsmatrix so einzubetten. Dabei ist die cs-Matrix so einzubringen, dass sie für diesen Schritt gewählte  $y$  zu 0 dreht. Ziel der Verfahrens ist es, eine obere Dreiecksform zu erzielen.

**Tipp:** Sei  $Z_{1,neu}$  die erste neue Zeile nach der Multiplikation mit der cs-Matrix und  $Z_{2,neu}$  die zweite.

Es gilt:

$$Z_{1,neu} = c \cdot Z_1 + s \cdot Z_2$$

$$Z_{2,neu} = -s \cdot Z_1 + c \cdot Z_2$$

**Ergänzende Worte**

Gegeben:  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$

Ziel: Finde ein  $x \in \mathbb{R}^k$ , so dass  $\|Ax - b\|_2 = \text{minimal}$ .

*Geometrische Interpretation:*

$U := \{y = Ax \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^k\}$  ist ein Unterraum im  $\mathbb{R}^n$  (der Dimension  $\text{Rang}(A)$ ),  
zum Beispiel:  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  und  $y = Ax$  ist Ebene im  $\mathbb{R}^3$ .

Dann ist

$$\min\{\|Ax - b\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^k\} = \min\{\|y - b\|_2 \mid y \in U\}$$

der Abstand vom Punkt  $b$  zu diesem Untervektorraum.

Mit anderen Worten: Wir suchen den Lotfußpunkt  $Ax_0$  von  $b$  auf  $U$ . Dann ist  $\|Ax_0 - b\|_2$  das gesuchte Minimum.

Die Givens-Rotation ist eine Drehung des  $\mathbb{R}^n$ , die bewirkt, dass der gedrehte Unterraum  $GU = \{(GA)x \mid x \in \mathbb{R}^k\}$  nicht „irgendwie schief“ im  $\mathbb{R}^n$  rumhängt, sondern von den ersten Einheitsvektoren  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  etc. aufgespannt wird.

Im Beispiel ist  $GU$  die  $x$ - $y$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$ . Das ist insofern praktisch, weil

1.

$$\|Ax - b\|_2 = \|G(Ax - b)\|_2 = \|(GA)x - Gb\|_2$$

2. Der Lotfußpunkt von  $Gb$  dirket auf einen von den ersten Einheitsvektoren aufgespannten Untervektorraum direkt abgelesen werden kann.

Ist nämlich wie im Beispiel  $GU = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  und  $Gb = (c, d, e)$ , so ist der Lotfußpunkt von  $Gb$  auf  $GU$  der Punkt  $(c, d, 0)$ , und der Abstand von  $Gb$  zu  $GU$  ist  $\|Gb - (c, d, 0)\|_2 = \|e\|$ . Allerdings will man ja nicht nur den Abstand herausbekommen, sondern auch das  $x$ , welches  $\|Ax - b\|_2$  minimiert.

Dazu nun eine analytische Interpretation:

$$\|(GA)x - Gb\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (k - te \text{ Komponente})^2}$$

liefert, dass man den Parameter  $x$  so wählen muss, um alle Komponenten, auf die  $x$  wirkt, zu 0 zu machen. Dann wird die Norm minimal, und es ist das  $x$  gefunden, welches  $\|Ax - b\|_2$  minimiert.

**Wissenswertes zu orthogonalen Matrizen**

- $Q^T Q = Q Q^T = I = E$
- Eigenschaften:  $\det(Q) = + - 1$
- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \|Q\|_2 = 1$

- $\|QA\|_2 = \|A\|_2 \forall x \in \mathbb{R}$
- Das Produkt orthogonaler Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

### 3.4 Verstärkungsfaktoren:

$$\Phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\text{rel. Fehler der Ausgabe}} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \Phi_j(x)}_{\text{Fehlerverstärkung}} \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\text{rel. Fehler der Eingabe}}$$

$$\kappa_{rel}(x) = \max_j |\Phi_j(x)|$$

### 3.5 Normen

- Betragsnorm:  $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$

- Maximumsnorm:

$$\|v\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |v_j|$$

- Zeilensummennorm:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

- Spaltensummennorm:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

- 

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$$\kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$$

- $(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

- $r(x) = b - A\tilde{x}$  Residuum

- $e(x) = x - \tilde{x}$  abs. Fehler

- Wenn  $A$  symmetrische, positiv definite Matrix ist, so ist

$$\kappa_2(A) = \sqrt{\kappa_2(A^T A)} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

## 4 Lineare Ausgleichrechnung

### 4.1 Normalengleichung

**Idee:** Gegeben sei eine Wertetabelle, sowie eine vermutete Abbildungsvorschrift (Funktion) mit 2 Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ . Ziel ist es, die Parameter so zu bestimmen, dass die Funktionen die Einträge der Wertetabelle möglichst gut nachbildet (und natürlich auch „gute“ Zwischenstellen liefert).  $z$  sei Vektor der Unbekannten in der zu bestimmenden Funktion, nicht der Vektor der Messdaten.

$$\|Az - b\|_2 \rightarrow \min$$

- Einsetzen der Wertetabelle in die Funktion  $\Rightarrow$  System von  $n \geq 2$  Gleichungen in  $\alpha$  und  $\beta$ . Hieraus erstellt man durch Aufschreiben in Matrix-Form  $Az = b$
- $Az = b \Rightarrow A^T Az = A^T b$
- $A^T A$  und  $A^T b$  berechnen und dann lösen Die Multiplikation mit  $A^T$  sorgt dafür, dass genau so viele Zeilen „verschwinden“, dass  $A^T A$  eine  $2 \times 2$ -Matrix ist. Somit ist aus dem (vielfach) überbestimmten Gleichungssystem eines geworden, welches für  $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  eine eindeutige Lösung liefert.
- Mit Cholesky lösen  $\Rightarrow \kappa = \kappa(A)^2$  (nicht unbedingt zu empfehlen)
- Mit Givens (QR) lösen  $\Rightarrow \kappa = \kappa(A)$ .  
Residuum ist  $\|b_2\|_2$  mit  $b_2$  als Teil von  $b$ , welcher dem „Nullteil“ von QR gegenübersteht.

Kondition eines linearen Ausgleichsproblems bzgl. einer Störung in  $b$  ergibt:

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos \Theta} \cdot \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$$

$$\kappa_2(A) = \sqrt{\kappa_2(A^T A)}$$

$$\kappa(A^T A) = \frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}$$

$$\cos \Theta = \frac{\|Ax^*\|}{\|b\|_2}$$

### 4.2 Merkmale für „positiv definit“

- alle Eigenwerte  $> 0$
- Choleski-Zerlegung  $A = LDL^T$  existiert mit allen Einträgen aus  $D > 0$

## 5 Nichtlin. Gleichungssysteme, iterative. Lösungsverfahren

### 5.1 Banach'scher Fixpunktsatz

Ordnung  $p = 1$

Umformen nach  $x = \dots = \Phi(x)$ .  $D$  sei Gebiet.

Bedingungen, damit Fixpunktproblem  $(x_*, x_*) = \Phi(x_*, y_*)$  eine eindeutige Lösung in  $D$  besitzt sind:

1.  $D$  geschlossen und konvex, oder  $\subset \mathbb{R}^n$
2.  $\Phi$  ist Selbstabbildung auf  $D$   $\Phi(D) \subset D$   
 Dabei ist zur Ermittlung der Schranken des Wertebereichs nur **eine** Schranke zu finden, so dass  $\Phi$  noch Selbstabbildung ist. Es ist also nicht unbedingt die **kleinste** Schranke zu finden. Damit kann bei der Bestimmung des Wertebereichs der *worst case* eines jeden Terms angenommen werden, auch wenn hierzu  $x$  gleichzeitig verschiedene Werte annehmen müsste.

3.  $\Phi$  ist Kontraktion auf  $D$ :  $|\Phi'(x)| \leq L < 1$ , im Mehrdim.:  $\left\| \underbrace{\Phi'(x)}_{\text{Jacobi-Matrix}} \right\| \leq L < 1, x \in D$

Die Abschätzung kann man einfach dadurch ausführen, dass man wie oben den *worst case* für alle enthaltenen Terme annimmt. Dabei kann  $x$  auch hier gleichzeitig verschiedene Werte annehmen. Man findet dadurch **eine** Schranke. Ist diese kleiner 1, so hat man damit die Kriterien zur Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt. Falls nicht, so muss man eine weitere Schranke suchen. Viel Spaß...

**Verfahren:**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

mit Startwert  $x_k \in D$  beliebig.

#### 5.1.1 Fehlerabschätzung

Es sei ein Fixpunkt-Problem  $\Phi(x) = x$  eines Gleichungssystems gegeben. Außerdem sei ein Startwert  $x^0$  und eine Genauigkeit  $\epsilon$  vorgegeben.

**Frage:** Wieviele Iterationen  $k$  sind nötig, um die Genauigkeit  $\epsilon$  zu erreichen?

- Berechne  $x_1 = \Phi(x_0)$
- Mit der **a-priori**-Fehlerabschätzung

$$\|x_k - x^*\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot \|x_1 - x_0\|_\infty$$

ergibt sich hier mit  $L$  als Lipschitzkonstante von  $\Phi$

$$k \geq \ln \left( \frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\epsilon(1-L)} \right) \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)}$$

Man kann also nach nur *einem* Iterations-Schritt schon abschätzen, wie viele Durchläufe man für eine vorgegebene Genauigkeit durchführen muss.

- Die **a-posteriori**-Fehlerabschätzung lautet bei der Bildung von  $\Phi(x_k)$

$$\|x_k - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{L-1} \|x_k - x_{k-1}\|$$

## 5.2 Newton

**Idee:** Gesucht ist Nullstelle von  $f$ . Durch iterative Addition/Subtraktion von  $\frac{f}{f'}$  zum Startwert  $x_0$  hofft man, näher an die Nullstelle zu kommen. **Voraussetzungen:** Genau wie beim Banach'schen Fixpunktsatz

**Verfahren für skalare Funktion:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Wenn die gesuchte Nullstelle eine Nullstelle zweiter Ordnung ist, so kann lokal quadratische Konvergenz erreicht werden, indem das Verfahren modifiziert wird zu:

$$x_{k+1} = x_k - 2 \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

**Verfahren für Systeme (normal)**

1. Berechne  $f(x^k), f'(x^k)$  (Jacobi-Matrix)
2. Löse  $\underbrace{f'(x_0, y_0)}_{\text{Jacobi-Matrix}} \cdot \Delta \vec{x}_0 = f(x_0, y_0)$
3.  $\vec{x}_1 = \Delta \vec{x}_0 + \vec{x}_0$

**für Systeme (vereinfacht)**

Die Vereinfachung besteht darin, dass die Jacobi-Matrix nur für den Startwert  $x_0$  einmal berechnet und in der folgenden Iteration fortwährend verwendet wird.

### 5.2.1 A-posteriori Fehlerabschätzung

**Quadratische Konvergenz**

$$x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$$

d.h. der Abstand des letzten Wertes  $x_k$  von der wahren Nullstelle ist ungefähr gleich dem Abstand des letzten Wertes  $k_k$  zum aktuellen  $k_{k+1}$

### 5.3 Gauß-Newton

nichtlineares Problem iterativ über lineare Probleme lösen

1.  $F(x_k), F'(x_k)$
2. Lösen des linearen Ausgleichsproblems  $\|F'(x_k) \cdot \Delta s_k - F(x_k)\|_2 \rightarrow \min$
3.  $x_{k+1} = x_k + \Delta s_k$

## 6 Polynomiteration

### 6.1 Lagrange'sche Grundpolynome

$$l_i = \prod_{i=0}^k \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad k = 1, \dots, n \quad l_i(x_k) = \delta_{i,k} \quad i \neq k$$

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot l_k(x)$$

Zur Ermittlung es Polynoms bei gegebener Wertetabelle siehe Übung 7

### 6.2 Newton-Form

$$\omega_k(x) = \prod_{i=1}^k (x - x_i) \quad k = 1, \dots, n \quad \omega_0 = 1$$

dividierte Differenzen

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$f[x_i] = F(x_i) = f_i$$

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \omega_k(x) \quad \text{mit} \quad c_k = f[x_1, \dots, k_{k+1}]$$

### 6.3 Fehlerabschätzung auf $[a, b]$

A-Priori:

$$|f(x) - P(f[x_0, x_1, \dots, x_n])(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

A-Priori:

$$k \geq \ln \left( \frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|} \right) \cdot \frac{1}{\ln(L)}$$

## 6.4 Neville-Aitken-Schema

**Idee:** Es sei eine Werte-Tabelle gegeben. Aufgabe ist es, an einer weiteren Stelle den Wert zu ermitteln.

Die Umsetzung des Schemas in LaTeX ist mir zu kompliziert. Vielleicht nach der Klausur.

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} \cdot P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} \cdot P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{u_i - u}{u_i - u_{i-k}} \cdot (P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}) \end{aligned}$$

für  $0 \leq k \leq i \leq n$ .

$u = x$   $P_{i,0} = f(\omega_i) = f(x_i)$

**Todo: horner schema**

## 7 Bewertung

### 7.1 Newton

- bei Änderung einer Stützstelle muss nur eine Reihe geändert werden. (Nicht wie bei Lagrange, wo alles neu berechnet werden muss.
- Stützstellen müssen nicht sortiert sein.

### 7.2 Neville-Aitken-Schema

Gut, wenn nur 1 Stelle gesucht wird

### 7.3 Horner-Schema

Gut, wenn viele Stellen gesucht werden (geringere Rechenaufwand)