2.8. JUNI 2010

NuMa GÜ 6

1.) Nichtlinearer Ausgleich (heute)
2.) Polynominterpolation
3.) Quadratur (Berechnung von Integralen)

	Linear	nicht Linear
Gleichung	$Ax = b \Rightarrow Ax - b = 0$	$f(x) = 0$
$\downarrow$		
Ausgleich	$\|Ax-b\|_2 \to \min$	$\|F(x)\|_2 \to \min$ *

* Verfahren: $f(x_n) + f'(x_n)\underline{\Delta x_n} = 0$ — Gleichung

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$$

$$\downarrow$$

Ausgleich

$$\|F(x_n) - F'(x_n)\Delta x_n\|_2 \to \min$$

$$\|F'(x_n)\Delta x_n - (-F(x_n))\|_2 \to \min$$

Warum $\|\ldots\|_2$? Andere Normen sind möglich, aber ...

(Linearer Ausgleich: $\|Ax-b\|_2 \to \min$

1.) Ansatz: Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix $\hat{Q}$ ändert die $\|\ldots\|_2$ nicht:

$$\|\hat{Q}(Ax-b)\|_2^2 = (\hat{Q}(Ax-b))^T(\hat{Q}(Ax-b))$$

$$= (Ax-b)^T \underbrace{\hat{Q}^T \hat{Q}}_{\hat{Q} \text{ ortho.} \Rightarrow \hat{Q}^T \cdot \hat{Q} = I} (Ax-b) = (Ax-b)^T(Ax-b)$$

$$= \|(Ax-b)\|_2^2$$

Idee: Nutze QR-Zerlegung von A

Setze $A := QR$

$$\|Ax-b\|_2 = \|QRx-b\|_2 = \|Q^T[QRx-b]\|_2$$

$$= \|Rx - Q^Tb\|_2$$

Vorteil: Givens-Rotationen / Householder-Spiegelungen sind numerisch (sehr) stabil

Nachteil: evtl. hoher Aufwand

<u>2. Ansatz:</u> Nutze die Normalengleichungen:

$$\phi(x) := \|Ax-b\|_2^2$$

$\phi(x)$ nimmt sein Minimum an, wenn $\phi'(x)$ / bzw. $\nabla\phi = 0$ (skalar: $\phi'(x) = 0$)

$$\phi(x) = (Ax-b)^T \cdot (Ax-b) = x^TA^TAx - 2x^TA^Tb + b^Tb$$

$$\nabla\phi(x) = 2A^TAx - 2A^Tb + 0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2A^TAx - 2A^Tb = 0 \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow A^TAx - A^Tb = 0$$

<u>Vorteil:</u> weniger Aufwand

<u>Nachteil:</u> $K(A^TA) \approx (K(A))^2$ [A quadratisch]

NuMa GÜ 6

(abhängig von der Kondition von A)

Aufgabe 4.11.)

$(u_1, v_1) = (1, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $(u_2, v_2) = (0, \frac{\sqrt{15}}{4})$

$(u_3, v_3) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1$$

Gesucht $\alpha, \beta > 0$ (optimal im Sinne kleinster Fehlerquadrate)

Lösung: $x := \begin{pmatrix} 1/\alpha^2 \\ 1/\beta^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\|Ax - b\| \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 7/4 \\ 0 & 15/16 \\ 4/3 & 1/4 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Givens-Rotationen:

Elim. $a_{3,1}$

$$r = \sqrt{1^2 + (4/3)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$c = \frac{1}{r} = \frac{3}{5}, \quad s = \frac{4/3}{r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\tilde{z}_1 \longleftarrow \frac{3}{5} z_1 + \frac{4}{5} z_3$$

$$\tilde{z}_3 \longleftarrow -\frac{4}{5} z_1 + \frac{3}{5} z_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7/4 & 1 \\ 0 & 15/16 & 1 \\ 4/3 & 1/4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5/3 & 5/4 & 7/5 \\ 0 & 15/16 & 1 \\ 0 & -5/4 & -1/5 \end{array}\right)$$

Elim $a_{3,2}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{15}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{256} + \frac{400}{256}} = \frac{25}{16}$$

$$c = \frac{15}{16} \cdot \frac{16}{25} = \frac{3}{5} \quad ; \quad s = -\frac{5}{4} \cdot \frac{16}{25} = -\frac{4}{5}$$

$$\tilde{z}_2 \leftarrow \frac{3}{5} \cdot z_2 - \frac{4}{5} \cdot z_3$$

$$\tilde{z}_3 \leftarrow \frac{4}{5} z_2 + \frac{3}{5} \cdot z_3$$

$$(*) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5/3 & 5/4 & 7/5 \\ 0 & 25/16 & 19/25 \\ 0 & 0 & 17/25 \end{array}\right)$$

Das System wird durch Rückwärtseinsetzen gelöst:

$$x_2 = \frac{304}{625} \quad , \quad x_1 = \frac{297}{625}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} = x_1 = \frac{297}{625} \underset{\alpha \overset{!}{>} 0}{\Rightarrow} \alpha = \frac{25}{3 \cdot \sqrt{33}}$$

$$\frac{1}{\beta^2} = x_2 = \frac{304}{625} \underset{\beta \overset{!}{>} 0}{\Rightarrow} \beta = \frac{25}{4 \cdot \sqrt{19}}$$

Residuum:

$$\frac{17}{25}$$

28. JUNI 2010

NuMa GÜ 6

5.5.) Nullstellen von nichtlinearen Systemen

$$F(x)\begin{cases}\cos(x_1)+\tan(x_2)-5x_2=0\\ \sin(x_1)-6\cdot x_1+\ln(x_2+1)=0\end{cases}$$

Banach

- Transformiere (*) in ein Fixpunkt-problem, d.h. finde $\phi(x)=\dots$ für die gilt: $\exists x=\phi(x)$
- (*) ist äquivalent zu:

$$\underbrace{\begin{matrix}\frac{1}{6}\sin(x_1)+\frac{1}{6}\ln(x_2+1) & = x_1\\ \frac{1}{5}\cos(x_1)+\frac{1}{5}\tan(x_2) & = x_2\end{matrix}}_{\Phi(x)}$$

$$F(x)=0 \iff \Phi(x)=x$$

- Voraussetzungen: • ist das Intervall, in dem der Fixpunkt liegen soll, abgeschlossen? (vollständig)
  • Ist Φ eine Selbstabbildung? d.h. $E\subseteq I$

$$\Phi(E)\subseteq E\ ?$$

(**) • wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, existiert genau ein Fixpunkt von Φ in I und die Folge

$$x_{k+1}=\Phi(x_k)$$

konvergiert gegen den Fixpunkt x^*.

• a priori-Abschätzung:

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \cdot \|x_1 - x_0\|$$

(**) Voraussetzung:

Φ ist kontraktiv: d.h.

$$\|x-y\| > \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \text{ für alle}$$

$\forall\, x, y \in I \qquad L \in [0,1)$

• a posteriori-Abschätzung:

$$\|x^* - x_k\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$$

Folgerung:

Φ ist kontraktiv auf I,
wenn I abgeschlossen und konvex ist
und wenn $\|\Phi'\| < 1$
Dann setze $L := \|\Phi'\|$

weiter mit $\underline{A\ s.S.)}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(x_1)\frac{1}{6} & \ln(x_2+1)\frac{1}{6} \\ \cos(x_1)\frac{1}{5} & \tan(x_2)\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{\Phi} \; ; \; I := [-1,1] \times [0,1]$$

• Selbstabbildung
sin, ln sind monoton.

~~...~~ $F_1(x_1, x_2)$ [1. Zeile von Φ]

$F_1 \quad [F(x_{1\,min}, x_{2\,min}), F(x_{1\,max}, x_{2\,max})] \subseteq [-1,1]$

$F_1 = [-0{,}14\ldots, 0{,}256\ldots]$

$F_2(x_1, x_2)$ [2. Zeile von Φ]

cos() symm. zu 0, tan() monoton steigend.

$F_2 : [0{,}11.., \; 0{,}51..] \subseteq [0,1]$

=> Selbstabbildung gezeigt.

Bem.: Wenn keine Monotonie vorliegt, dann müssen die Randwerte <u>und</u> die Extremwerte betrachtet werden.

I ist <u>abgeschlossen und konvex</u>

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin(x_1)\frac{1}{6} & \ln(x_2+1)\frac{1}{6} \\ \cos(x_1)\frac{1}{5} & \tan(x_2)\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos(x_1)\frac{1}{6} & \frac{1}{6(x_2+1)} \\ -\sin(x_1)\frac{1}{5} & 1+\tan^2(x_2)\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{komponentenweise,}\\ \text{Betrag}}}{\leq} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ |0{,}2 \cdot \sin(1)| & |0{,}2 + 0{,}2\tan^2(1)| \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Komp.weise,}\\ \text{Betrag}}}{\leq} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 \\ 0{,}168.. & 0{,}685.. \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\Phi'\|_\infty \leq \max\left\{\frac{1}{3},\; 0{,}168.. + 0{,}685..\right\}$$
$$= 0{,}85..$$

$\|\Phi'\|_\infty < 0{,}86 =: L$ [wichtig: immer aufrunden, oder <u>exakten</u> Wert verwenden]

$$\|\Phi'\|_\infty = 0{,}853398.. \not< 0{,}85$$

$x_0 = (0{,}5\ ,\ 0{,}5)$

$x_1 = \Phi(x_0) = (0{,}1475\ ,\ 0{,}2848)$

a priori:

$$\|x^* - x_k\|_\infty \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|_\infty$$

Kontraktionskonstante wurde in der $\|..\|_\infty$ bestimmt.

$\|x_1 - x_0\|_\infty = 0{,}3525$

$\|x^* - x_k\|_\infty \leq 0{,}01$

$$\Rightarrow \frac{L^k}{1-L} \cdot \|x_1 - x_0\|_\infty \leq 0{,}01$$

$$\Rightarrow k \geq \ln\left(\frac{0{,}01(1-L)}{\|x_1 - x_0\|_\infty}\right) \cdot \frac{1}{L}$$

$\Rightarrow k \geq 36{,}66$

$\Rightarrow$ wir benötigen 37 Iterationen.

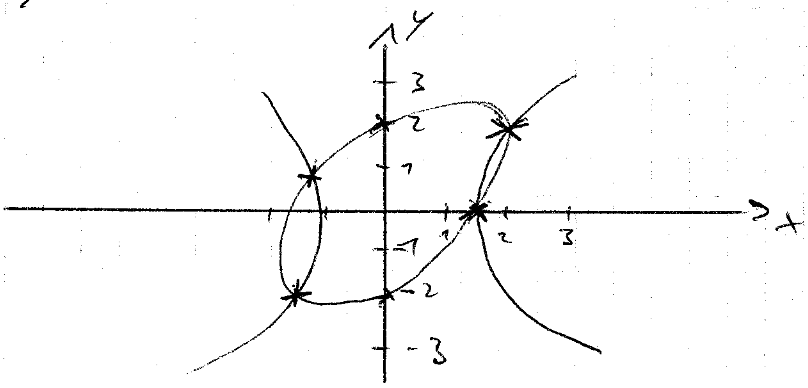
$x_{k+1} = \Phi(x_k)$

$x_{37} = (0{,}0448...\ ,\ 0{,}2511...)$

<u>A 5.7.)</u>

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$$
$$9x^2 - 16y^2 - 16 = 0$$

<u>Skizze:</u> $\left.\begin{array}{l} x = ... \\ y = ... \end{array}\right\}$ wenn möglich



NuMa Gü 6

an den Schnittstellen der Ellipse und der Hyperbel liegen die Nullstellen der Funktion.

Newton für System:

Startwert für x_0 (gegeben oder abgelesen)

Für $k = 0, 1, \dots$

- Berechne $f(x_k)$ und $f'(x_k)$

$\uparrow$ Matrix

- Löse das LGS $f'(x_k)\, s_k = -f(x_k)$

$\uparrow$ unbekannt

- Setze $x_{k+1} = x_k + s_k$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 10x - 6y & -6x + 10y \\ 18x & -32y \end{pmatrix}$$

$x_0 = (3,2)$ [abgelesen aus Skizze]

$$f(3,2) = \begin{pmatrix} +3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f'(3,2) = \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 54 & -64 \end{pmatrix}$$

$$f'(3,2) \cdot s_0 = -f(3,2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & 2 & -3 \\ 54 & -64 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow s_0 = \begin{pmatrix} -0{,}15\dots \\ -0{,}1429\dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + s_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}15\dots \\ -0{,}1429\dots \end{pmatrix}$$

$= \dots$ (online)

Vereinfachtes Newton für Systeme

Startwert x_0

Berechne $f'(x_0)$ [nur einmal, nicht in jedem Schritt]

zerlege $f'(x_0) = LR$ ...

Für $k = 0,1 \dots$

- Berechne $f(x_k)$
- Löse das LGS: $\underbrace{f'(x_0)}_{\text{LR-Zerlegung}} s_k = -f(x_0)$
- setze $x_{k+1} = x_k + s_k$

Vorteil (regulärer) Newton: lokal konvergent mit Ordnung 2 [wenn es denn konvergiert]

Nachteil: Aufstellen der Jacobi-Matrix + Invertieren

Vorteil vereinfachter Newton:

- nur einmaliges Aufstellen der Jacobi-Matrix + LR-Zerlegung

Nachteil: nur noch lokal konvergent mit Ordnung 1.

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 54 & -64 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 18 & 2 \\ 0 & -70 \end{pmatrix}$$