AM4 GÜ 6

A27) Bestimme Laurent-Reihe (LR) von

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $z_0 = 1+i$ in

a.) $0 < |z - z_0| < 1$

b.) $1 < |z - z_0| < \sqrt{5}$

c.) $\sqrt{5} < |z - z_0| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \underset{PBZ}{=} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

$\Rightarrow$ f holomorph außer in $\pm i$

$f_1(z) = \frac{1}{z-i}$ $f_2(z) = \frac{1}{z+i}$

hol. für $z \neq i$ hol. für $z \neq -i$

i.) $|z - z_0| < |i - z_0| = |i - 1 - i| = 1$

geom. Reihe: $|z| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$$f_1(z) = \frac{1}{z - i + 1 - 1} = \frac{1}{1 + (z - z_0)} = \frac{1}{1 - [-(z - z_0)]}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-(z - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - z_0)^n$$

ii.) $|z - z_0| > |i - z_0| = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z - z_0|} < 1$$

$$f_1(z) = \frac{1}{1 + (z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{(z - z_0)}}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{1}{(z-z_0)}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z-z_0)^{-n-1}$$

<u>iii.)</u> $|z-z_0| < |-i-z_0| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \frac{|z-z_0|}{|-1-2i|} = \frac{|z-z_0|}{|1+2i|} < 1$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z+i+2i-2i+1-1}$$

$$= \frac{1}{(1+2i)+(z-z_0)} = \frac{1}{1+2i} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{1+2i}}}$$

$$= \frac{1}{1+2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-z_0}{1+2i}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-z_0)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

<u>iv.)</u> $|z-z_0| > |-i-z_0| = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \left|\frac{2i+1}{z-z_0}\right| < 1$$

$$f_2(z) = \frac{1}{(1+2i)+(z-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i+1}{z-z_0}}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i+1)^n}{(z-z_0)^n}$$

$\left|\frac{2i+1}{z-z_0}\right| < 1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i+1)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

<u>Damit:</u> $f(z) = \frac{1}{2i}\left(f_1(z) - f_2(z)\right)$

a.) $0 < |z-z_0| < 1$ $(\Leftrightarrow$ i.)$)$ + iii.)

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1-(2i+1)^{-n-1}\right) \cdot (z-z_0)^n\right)$$

b.) $1 < |z-z_0| < \sqrt{5}$ $(\Leftrightarrow$ ii.)$)$ + iii.)

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-z_0)^{-n-1} - \frac{(-1)^n}{(2i+1)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

c.) $\sqrt{5} < |z-z_0| < \infty \quad (\Leftrightarrow \text{ ii.) + iv.)})$

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1-(2i+1)^n\right)(z-z_0)^{-n-1}$$

---

isolierte Singularitäten

Def.: $G \subset \mathbb{C}$, $a \in G$, $f: G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph

Dann heißt a isol. Sing. von f.

Klassifikation: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$

f hol. in $B_R(a) \setminus \{a\}$.

i.) a heißt hebbare Sing. von f, wenn $b_n = 0 \quad \forall n < 0$

ii.) a heißt Pol ~~der~~ von Ordnung k, wenn $b_n = 0 \quad \forall n < -k$ und $b_{-k} \neq 0$

iii.) a heißt wesentliche Singularität, wenn ~~∞ viele b_n~~ $b_n \neq$ für unendlich viele ~~…~~ $n < 0$.

A28.1 $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$, $z_0 = 0$

Log-Hauptzweig: def. auf $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$

- LR von f um z_0
- Konvergenzbereich ?
- Singularitäten ?

Es gilt: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \cdot \frac{1}{n}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} \cdot \ln(1+z) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n \cdot \frac{1}{n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{1}{n}}_{b_n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{n+1}}_{b_n} z^n$$

Konvergenzbereich: $|z| < 1$

$b_n = 0 \quad \forall n < 0 \quad \Rightarrow \quad 0$ hebbare Stng.

A29.) max. Def. Bereich?, Stng. klassifizieren

a.) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ /

definiert in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}$$

~~$\Rightarrow b_n \neq 0$ für unendl. viele n~~

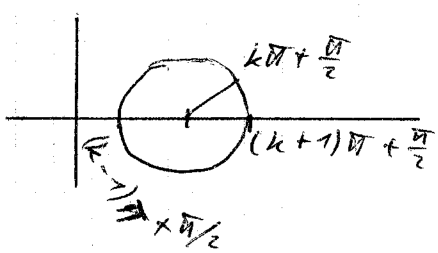
$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2\cdot(-n))!}}_{b_n} z^{2n} \Rightarrow b_n \neq 0 \text{ für unendl. viele } n < 0$$

$\Rightarrow 0$ ist wesentl. Stng. von f.

b.) $g(z) = \dfrac{1}{\cos(z)}$

def. für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

für $k \in \mathbb{Z}$ fest, definiere $B_k = B_{\pi}(\frac{\pi}{2} + k\pi)$



$\Rightarrow g(z)$ hol. in $B_k \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$\forall z \in B_k \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ gilt:

AMU GÜ6

$$\frac{1}{\cos(z)} = \frac{1}{(-1)^{k+1}\sin(z-(\frac{\pi}{2}+k\pi))}$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{1}{z-(\frac{\pi}{2}+k\pi)} \cdot \underbrace{\frac{z-(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{\sin(z-(\frac{\pi}{2}+k\pi))}}_{h(z)}$$

$h : B_k \setminus \{\pi/2 + k\pi\} \to \mathbb{C}$

es gilt: $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}+k\pi} h(z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hôpital}}}{=} 1$

$\Rightarrow$ durch setzen von $h(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 1$ wird h holomorph fortgesetzt auf B_k. ~~Fortsetzung~~ Fortsetzung von h nennen wir $\tilde{h}$.

$$\frac{1}{\cos(z)} = (-1)^{k+1}\frac{1}{z-(\frac{\pi}{2}+k\pi)} \cdot \tilde{h}(z)$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} (-1)^{k+1}\frac{1}{z-(\frac{\pi}{2}+k\pi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}^{(n)}(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{n!} \cdot (z-(\tfrac{\pi}{2}+k\pi))^n$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}^{(n)}(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{n!} (z-(\tfrac{\pi}{2}+k\pi))^{n-1}$$

$\Rightarrow b_{-n} = 0 \quad \forall n > 1, \quad b_{-1} \neq 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}+k\pi$ ist Pol 1. Ordnung von g.

Residuum: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$

b_{-1} heißt Residuum von f an der Stelle a.

$$b_{-1} = \mathrm{Res}(f,a) = \mathrm{Res}_f(a)$$

(A) f, g hol., in der Nähe von a.
$f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ (einfach) $[g'(a) \neq 0]$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(B) $g(a) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

Residuensatz:

$G \subset \mathbb{C}$, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ einfach geschlossen
$\mathrm{int}(\gamma) \subset G$, $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{int}(\gamma)$
$f: G \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{C}$ hol. und
$a_1, \dots, a_n$ Pole von f, dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k)$$

A30.) a.) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$

isol. Sing.: $z_1 = -1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$
z_1 Pol 2. Ordnung, da z_1 doppelte Nullstelle des Nenners, Zähler hat keine Nullstelle (in z_1)

z_2 / z_3: Pole 1. Ordnung, da einfache Nennernullstellen, Zähler Nullstellen frei.

$$Res(f, z_1) = Res\left(\frac{1}{(z-z_1)^2} \cdot \underbrace{\frac{z^2-2z}{z^2+4}}_{g} , z_1\right)$$

$$\overset{(\mathrm{B})}{=} \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right)\Big|_{z=-1}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

$$Res(f, z_2) \overset{(1)}{=} \frac{(z^2-2z)|_{z=z_2}}{\left[(z+1)^2(z^2+4)\right]'\Big|_{z=z_2}}$$

$$= \frac{(2i)^2 - 4i}{2(2i)(2i+1)^2} = \frac{i+7}{25}$$

$Res(f, z_3) = \frac{5-i}{25}$ (genauso wie bei z_2)

<u>b.)</u> $g(z) = \frac{\sin(bz)}{z^2+a^2}$, $a, b \in \mathbb{C}$ $a \neq \frac{-ik\pi}{b}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

1.) $a = 0$ Nenner hat 2-fache Nullstelle in 0. und $\sin(bz)|_{z=0} = 0$,
$b \cdot \cos(bz)|_{z=0} = b$

$\hookrightarrow$ [Musterlösung unstimmig!
Rest im <u>LZP online.</u>]

A31.) z.z.: $\displaystyle\int_{|z|=3} \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2\sin(z)-2z}{z} + \frac{1}{z^2+4}\,dz = 2\pi i$

Idee: Residuensatz:

i.) $z_1 = 2, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 2i, \quad z_4 = -2i$

$|z_i| < 3 \quad \forall i$

ii.) z_1: $\displaystyle\sin\left(\frac{1}{z-2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-2)^{-2n-1}$

$\hookrightarrow$ wesentliche Sing.

$\displaystyle\operatorname{Res}\left(\sin\left(\frac{1}{z-2}\right), 2\right) = \underset{\uparrow}{b_0} = \frac{(-1)^0}{1!} = 1$

Koeffizient vor $(z-2)^{-1}$

z_2: es gilt:

$\displaystyle\lim_{z \to z_2} \frac{2\sin(z)-2z}{z} \underset{\text{L'Hosp}}{=} 0 \quad \hookrightarrow$ hebbare Sing.

$\displaystyle\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{2\sin(z)-2z}{z}, 0\right) = 0$

z_3, z_4 mit (A)

$\displaystyle\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4}, z_3\right) = \frac{1}{2\cdot 2i} = \frac{-i}{4}$

$\displaystyle\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4}, z_4\right) = \frac{1}{-2\cdot 2i} = \frac{i}{4}$

iii.) ja $\hat{=}$ $(|z|=3)$ einfach geschlossen

f hol. in $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

$\displaystyle\underset{RS}{\Rightarrow} \int_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$

$\displaystyle= 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{2\sin(z)-2z}{z}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4}, 2i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+4}, -2i\right)\right)$

01. JULI 2010

HMu GüG

$$= 2\pi i \left(1 + 0 - \frac{i}{4} + \frac{i}{4} \right) = 2\pi i$$

5