05. JULI 2010

ASK GÜ 10

39.) $q_0 \underbrace{1111}_{n} \sqcup 11$

Laufzeitabschätzung der Multiplikations-TM bei Eingabe m und n [ZE $\hat{=}$ Zeiteinheit]

zunächst Hauptprogramm (Schritte 1-3)

- erste Zeile von Schritt 1 benötigt 1 ZE. Rest wird erst zum Schluss der Berechnung ausgeführt & benötigt $O(n)$ ZE, da wir den n-Block überqueren, um zur Ausgabe zu gelangen
- Schritt 2: zunächst m-Block überqueren, also $O(m)$ ZE. Dazu kommt Aufwand für Unterprogramm (*) s.u.
- Schritt 3: zurück zum Anfang vom m-Block: $O(m)$ ZE.
- Schritte 1-3 werden so oft wiederholt, wie es Striche im m-Block gibt.

Unterprogramm (*):

- erste Zeile von (a): 1 ZE. Rest wird am Ende von (*) ausgeführt, einmal darüberlaufen, also $O(n)$ ZE.
- Schritt (b): überquere n-Block, sowie mn-Block (Ausgabe), erfordert $O(n+mn)$ ZE, also $O(mn)$ ZE.

- Schritt (c): überquere von links mn-Block & n-Block, wieder $O(mn)$ ZE.
- Schritte (a)-(c): werden so oft ausgeführt, wie es Striche im n-Block gibt, also n mal.

Insgesamt für (*):

$$n(1+O(mn)+O(mn)+O(n))$$

also $O(mn^2)$

fürs Hauptprogramm also:

$$m\cdot(1+O(m)+O(mn^2)+O(m)+O(n))$$

also insgesamt $O(m^2n^2)$

A40.) geg.: TM $M=(Q,\Sigma,\Gamma,q_0,q_s,\delta)$ mit nur Links bezogenen

Beobachtung: M kann das erste Zeichen des Eingabeworts lesen, danach wird in jedem Schritt das leere Wort gelesen

Entscheidungsalgorithmus:

- Starte M angesetzt auf w & lasse M max. $|Q|+1$ Schritte laufen (zähle Schritte mit, die M ausführt und stoppe M, wenn $|Q|+1$ Schritt erreicht sind, falls M bis dann nicht gestoppt hat.)

wenn M nach $|Q|+1$ Schritten nicht in q_s gebe „nein" aus, sonst „ja".

Korrektheit: Da M nur Linksbewegungen ausführen kann & das Arbeitsfeld bis auf den ersten Schritt leer ist, kann M kein Feld des Rechenbandes mehr als 1x besuchen.
Nach spätestens $|Q|+1$ Schritten nach lesen des 1. Zeichens hat M einen Zustand $q \in Q$ mindestens 2x angenommen.

Da M in den $|Q|+1$ Schritten nach Lesen des 1. Zeichens auch das gleiche Bandsymbol ⊔ liest, arbeitet M vom 2. Auftreten von q ~~an~~ genauso wie vom ersten Auftreten von q an.
=> M terminiert nicht.

Wenn M terminiert, dann muss dies bereits in den ersten $|Q|+1$ Schritten geschehen

A41.)

zzg.: $AHP \leq IOP$
also: konstruiere aus Instanz (M, w) zu AHP eine Instanz (M', u, v) zu IOP, so dass gilt:
$M: w \to \text{stopp} \iff M': u \to v$

Konstruiere (M', u, v) wie folgt:

$u := w$; $v := \varepsilon$

M': arbeite wie M auf w, wenn M in q_s, dann schreibe ~~…~~ $\sqcup$ und stoppe dann in q_s' von M'.

z.z.g.: $M: w \to$ stopp $\Leftrightarrow$ $M': u \to v$

$\boxed{\Rightarrow}$ $M: w \to$ stopp.

$\Rightarrow$ M' stoppt ebenfalls im Zustand q_s' von M'; und im Zustand q_s von M schreibt M' ein $\sqcup$ und stoppt danach. Ausgabe ist damit ε, also gilt: $M': u \to v$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $M': u \to v$

$\Rightarrow$ M angesetzt auf $w = u$ stoppt, da M' genauso arbeitet und den Zustand q_s von M annimmt, bevor die Ausgabe $v = \varepsilon$ produziert wird.

$\Rightarrow$ $M: w \to$ stopp ✓

$\Rightarrow$ Lsg.: $\underline{\underline{AHP \leq IOP}}$

A42.) z.z.g.: $HP_{\leq k}$ entscheidbar

Entscheidungsalgorithmus/TM:

- geg. TM M, natürliche Zahl k
- Konstruiere TM M', die genau wie M arbeitet,

sich über die Anzahl der Arbeitsschritte merkt.

- außerdem: erreicht M' den M'-Zustand q_s in $\leq k$ Schritten erreicht, dann macht M' nichts bis Schrittzahl k erreicht wird.
- ist Schrittzahl k erreicht und ist M' in M-Zustand q_s, so drucke eine 1 (mit folgendem ⊔) für „ja" und stoppe
- ist Schrittzahl k erreicht und M' nicht im M-Zustand q_s, so drucke eine 0 (mit folgendem ⊔) für „nein" und stoppe

$\Rightarrow$ TM M' entscheidet das Problem $HP_{\leq k}$ und gibt ja (1) aus, falls M in $\leq k$ Schritten stoppt, nein (0) sonst.

zzg.: $HP_{>k}$ ist unentscheidbar

Wir wissen: $HP_{\leq k}$ entscheidbar, z.B. durch TM M'

Ann.: $HP_{>k}$ wäre entscheidbar, z.B. durch TM M''

Konstruiere damit M''', die HP entscheidet: M''' arbeitet zunächst wie M', dann weiter wie M''.

=> HP entscheidbar mit TM M'''

↯ WIDERSPRUCH

=> Ann. falsch, also $HP_{>k}$ unentscheidbar ☐

[ODER: Reduktion]