NuMa GÜ 5

4.18.) a) b.)

x_i	1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{2}$
y_i	0	41	3

$$\alpha x^2 + \beta y = \frac{91}{55}$$

$$\|Ax - b\|_2 = \min$$

$$1\alpha + 0\beta = \frac{91}{55}$$

$$\frac{1}{3}\alpha + 41\beta = \frac{91}{55}$$

$$\frac{1}{2}\alpha + 3\beta = \frac{91}{55}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 41 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}; \quad b := \begin{pmatrix} 91/55 \\ 91/55 \\ 91/55 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Finde $x \in \mathbb{R}^2$, s.d. $\|Ax - b\|_2 = \min$

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \alpha = \operatorname{sign}(y_1) \cdot \|y\|_2 = +\sqrt{1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$$

$$v := y + \alpha \cdot e^1 \left[= \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \right] = \begin{pmatrix} 2\,1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Q_v y = -\begin{pmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[= -\alpha \cdot e^1 \right]$$

$$\left[Q_v := I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \right]$$

(niemals im Kopf durchrechnen, sondern direkt das Ergebnis aufschreiben, das herauskommen soll!)

$$Q_v \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(2\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\beta}$$

$$\left[\bar{\beta} := \frac{2}{v^T v} = \frac{36}{91}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ 3 \end{pmatrix} - \cancel{\frac{36}{91}}^{\,6} \cdot \cancel{\frac{91}{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_v \cdot \begin{pmatrix} 91/55 \\ 91/55 \\ 91/55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91/55 \\ 91/55 \\ 91/55 \end{pmatrix} - \bar{\beta}\, v^T \begin{pmatrix} 91/55 \\ 91/55 \\ 91/55 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 91/55 \\ 91/55 \\ 91/55 \end{pmatrix} - \frac{36}{91} \cdot \frac{273}{55} \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13/5 \\ 1 \\ 37/55 \end{pmatrix}$$

$$\|Ax - b\|_2 \rightsquigarrow \left\| \begin{pmatrix} -7/6 & -13 \\ 0 & 39 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 1 \\ \frac{37}{55} \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$-\frac{7}{6}\alpha - 13\beta = -\frac{13}{5}$$
$$0\alpha + 39\beta = 1$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{31}$$
$$\alpha = \frac{68}{35}$$

Residuum: $\frac{37}{55}$

4.10.) $y(x) = x^2$; $I = [-1, 1]$

$$f(x) = \underline{a}\cos(\pi x) + \underline{b}\cdot\sin(\pi x) + \underline{c}$$

Stützstellen: $-1, -0{,}5, 0, 0{,}5, 1$

x_i	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
y_i	1	$0{,}25$	0	$0{,}25$	1

$$-a + 0b + c = 1$$
$$0a + 1b + c = 0{,}25$$
$$1a + 0b + c = 0$$
$$0a + 1b + c = 0{,}25$$
$$-a + 0b + c = 1$$

NuMa GÜ 5

21. JUNI 2010

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}25 \\ 0 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finde $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, s.d. $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2 = \min$

<u>4.11.)</u>

$(u_1, v_1) = \left(1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \qquad (u_2, v_2) = \left(0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \qquad (u_3, v_3) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

- $\frac{1}{a^2} + \frac{7/4}{b^2} = 1$
- $\frac{0}{a^2} + \frac{15/16}{b^2} = 1$
- $\frac{4/3}{a^2} + \frac{1/4}{b^2} = 1$

$x := \begin{pmatrix} 1/a^2 \\ 1/b^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 7/4 \\ 0 & 15/16 \\ 4/3 & 1/4 \end{pmatrix}$ Finde $x \in \mathbb{R}^2$ s.d. $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2 = \min$

<u>4.19.)</u>

$$f(x) = ax + \ln(b(x+1))$$

x_i	0	1	4
y_i	0	1	3

Problem: $\ln(b(x+1))$ nicht linear!

$$f(x) = ax + \ln(b) + \ln(x+1)$$

Setze $\gamma := \ln(b)$

$$f(x) = ax + \gamma + \ln(x+1)$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 - \ln(x_1+1) \\ y_2 - \ln(x_2+1) \\ y_3 - \ln(x_3+1) \end{pmatrix}$$

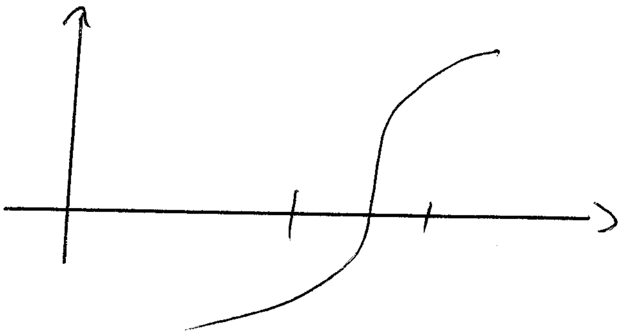
$x := \begin{pmatrix} a \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Finde x s.d. $\|Ax - b\|_2 = \min$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 - \ln(1) \\ 1 - \ln(2) \\ 3 - \ln(4) \end{pmatrix}$$

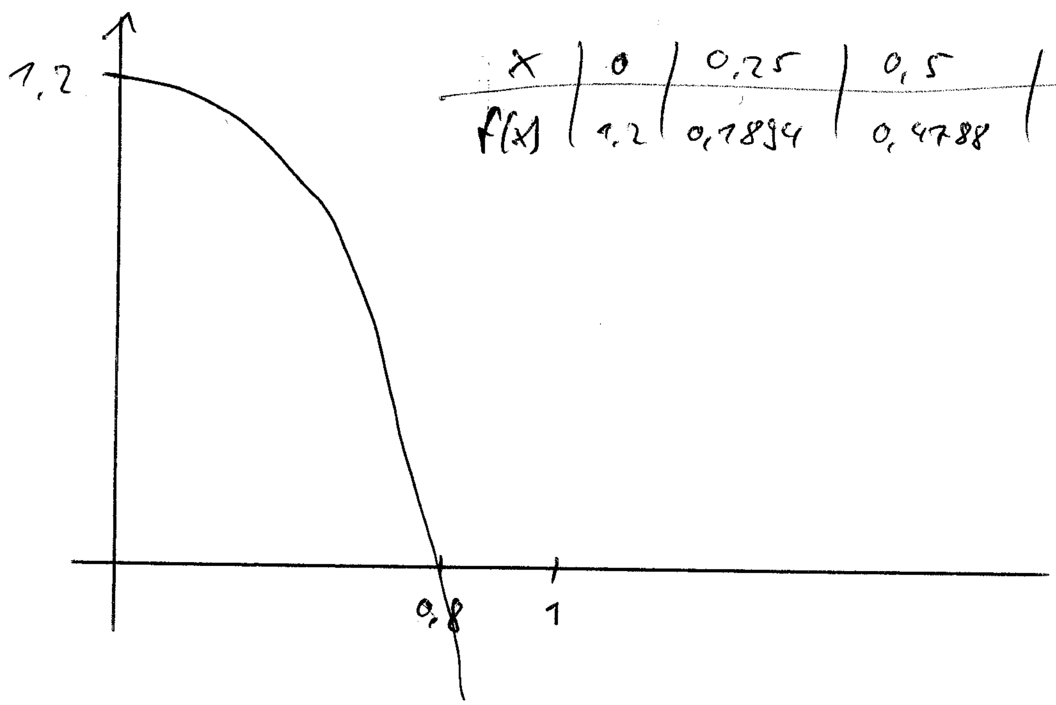
A. 5.2.1

a.) $f(x) = e^{-x^2} + 0,2 - x$

abs. Fehler $\varepsilon := 0,01$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} |x_1 - x_0| = |x_k - x_{k-1}| \overset{!}{\leq} \varepsilon$$



x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x)$	1,2	0,7894	0,4788	0,01978	-0,4321

NuMa GÜ 5

$\Rightarrow I := [0,1]$ liegt eine Nullstelle von f.

Wähle $x_0 := 0$, $x_1 := 1$

$$|x_k - x_{k-1}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot |x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \leq \frac{0{,}01}{\underbrace{|x_1 - x_2|}_{=1}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (k-1) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow k - 1 \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}$$

$\Rightarrow k \geq 7{,}64386\ldots$

$\Rightarrow$ Es werden $\underline{\underline{8}}$ Schritte benötigt

i	x_i	f_i
0	0	1,2
1	1	-0,4321
2	0,5	0,4788
3	0,75	0,01978
4	0,875	-0,20936
5	0,8925	-0,0957
6	0,78125	-0,0387
7	0,765625	-0,009777

$x_8 = 0{,}7578125$

$f_8 = 0{,}0052977 8\ldots$

Fixpunktverfahren:

$$f(x) = e^{-x^2} + 0{,}2 - x \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-x^2} + 0{,}2 = \phi(x)$$

- $\mathbb{R}^1$ Intervall abgeschlossen
- Selbstabbildung
- Kontraktivität

$\Rightarrow \exists!$ Fixpunkt

Setze $I := [0{,}5, 1]$;

I ist offensichtlich abg.

$\Phi(x) = e^{-x^2} + 0{,}2$

$\Phi(0{,}5) = 0{,}97880$ $\quad\Phi(1{,}0) = 0{,}567879$

$\Rightarrow$ Selbstabbildung: $\Phi(I) \subseteq I$

- Kontraktivität

$\Phi'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$\Phi''(x) = -2\, e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$

[Folgerung: Φ kontraktiv auf I, wenn $|\Phi'(x)|$ auf $I < 1$ ist]

Extrem von Φ'

Nullstellen von Φ'' + „Randwerte"

Beispiel x^2

$\Phi''(x) = 0$ für $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Phi'\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \underline{-0{,}85776\ldots}$

$\Phi'(0{,}5) = -0{,}7788$

$\Phi'(1{,}0) = -0{,}735788$

Setze Kontraktionskonstante

$L := 0{,}86$ (immer aufrunden, wenn gerundet wird)

NuMa GÜ 5

A priori $|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| \overset{!}{\leq} \varepsilon$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(L)}$; $x_0 = 0{,}5$ $\quad \varepsilon = 0{,}01$

$x_1 = 0{,}9788$

$n \geq 38{,}68\ldots$, d.h. es werden 39 Schritte benötigt

$x_5 = 0{,}8674565008$

$x_{10} = 0{,}7138203649$

$x_{39} = 0{,}7611354848$

$x_{38} = 0{,}7601268951$

A posteriori:

$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}| \approx 0{,}00619562\ldots$