AM4 GÜ 5

A22.1 Berechne die Integrale

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-t} \cdot \cos(t)\,dt \quad \text{und}$$

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-t} \sin(t)\,dt$$

Tipp: $f(z) = z \cdot e^{-z} \cos(z) + i z e^{-z} \sin(z)$

Es ist
$$\begin{aligned} f(z) &= z \cdot e^{-z} \cos(z) + i z e^{-z} \sin(z) \\ &= z \cdot e^{-z} \cdot e^{iz} \\ &= z \cdot e^{(-1+i)z} \end{aligned}$$

Wähle Γ als $\Gamma: \gamma: [0, R] \to \mathbb{C}$
$\gamma(t) = t$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^R t \cdot e^{(-1+i)t}\,dt$$

für $R \to \infty$ erhalten wir als Real- bzw. Imaginärteil die gesuchten Integrale

Satz 3.1.: $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ s.d. Weg

Dann $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Suche also Stammfunktion von f.

$$F(z) = \int f(z)\,dz = \int \underbrace{z}_{u} \cdot \underbrace{e^{(-1+i)z}}_{v'}\,dz$$

$$= z \cdot \frac{1}{i-1} e^{(i-1)z} - \int \frac{1}{i-1} e^{(i-1)z} \, dz$$

$$= \frac{z(i+1)}{-2} e^{(i-1)z} - \frac{1}{(i-1)^2} e^{(i-1)z}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(z(i+1) + i\right) e^{(i-1)z}$$

$$\Longrightarrow F'(z) = f$$

Dann gilt mit Satz 3.1.

$$\int_T f(z)\,dz = F(\gamma(R)) - F(\gamma(0))$$

$$= F(R) - F(0)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\left[\left(R(i+1)+i\right)e^{(i-1)R} - i\right]}$$

$$\Longrightarrow \lim_{R\to\infty} \int_T f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \int_0^R t e^{-t}\cos(t) + i t e^{-t}\sin(t)\,dt$$

$$= \frac{i}{2}$$

$\Longrightarrow$ Real- und Imaginärteilvergleich führt auf

$$\int_0^\infty t e^{-t}\cos(t)\,dt = 0$$

$$\int_0^\infty t e^{-t}\sin(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

A23.) Gibt es ein $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph $(0 \in G)$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-1}$ $\forall\, 1 < n \in \mathbb{N}$?

Identitätssatz: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

i.) $f \equiv g$ in G

ii.) $\{z \in G \,;\, f(z) = g(z)\}$ hat HP in G

iii.) $\exists a \in G: f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ $\forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2-1} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} = \frac{1/n^2}{1 - 1/n^2}$$

Def. $g: G \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$$

Dann gilt: $f(z) = g(z)$

in $\{z \in \mathbb{C} \,;\, z = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 1\} =: M$

M hat HP 0 in G

Identitätssatz

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$$

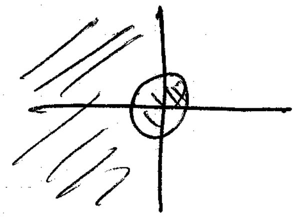
A24.) Sei $A = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$

$F: \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C}$

$$F(z) := \int_{|s|=1} \frac{\cos(3s)}{(s-z)^2} \, ds$$

Berechne: $F'(0)$ und $F'(\pi)$.

i) für $|z|>1$: hier ist der ~~[illegible]~~ Integrand holomorph, da $s-z$ nie 0 werden kann.



Die Kurve $|s|=1$ ist einfach geschlossen.

$$\underset{CIS}{\Rightarrow} \int_{|s|=1} \frac{\cos(3s)}{(s-z)^2} \, dz = 0$$

$\Rightarrow F(z) = 0$ $\forall z$ mit $|z|>1$

ii.) für $|z|<1$:

Def. $f(s) = \cos(3s)$, dann f holomorph in $|s|<1$ und mit CIF

$$F(z) = \int_{|s|=1} \frac{f(s)}{(s-z)^2} \, ds = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)$$

$$= 2\pi i \cdot 3(-\sin(3z)) = -6 i\pi \sin(3z)$$

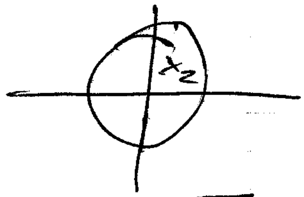
$$\Rightarrow F'(z) = \begin{cases} 0 & , |z|>1 \\ -18 i\pi \cos(3z) & , |z|<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow F'(0) = -18 i\pi \cos(0) = -18 i\pi$

$F'(\pi) = 0$

HM4 GÜ5

wähle z fix, $|z|<1$



CIS: f holomorph im Inneren von Γ

Γ einfach geschl.

$$\Rightarrow \int_\Gamma f\,dz = 0$$

A25.) Zeige: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$,

$a>1$

Idee: benutze CIF

1. Schreibe $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt$ als Kurvenintegral

Def.: $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $\gamma'(t) = ie^{it}$

und $$f(z) = -i\,\frac{1}{\underbrace{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}_{\cos(t)}}\cdot\frac{1}{z}$$

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Dann: $$\int_\gamma f(z)\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{-i}\,\frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)}\,\cancel{e^{-it}}\,\underbrace{\cancel{i}\cdot\cancel{e^{it}}}_{\gamma'(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt$$

ii.) Finde Singularitäten von f

$$\frac{-i}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \stackrel{\frac{1}{2}}{=} \frac{-i}{\frac{1}{2}z^2+az+\frac{1}{2}} = \frac{-2i}{z^2+2az+1}$$

$$z^2+2az+1=0 \Rightarrow z_{1/2} = -a \pm\sqrt{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{-2i}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$$

$$z_2 := -a-\sqrt{a^2-1}$$

$$\Rightarrow |z_2| = |(-1)(a+\sqrt{a^2-1})|$$
$$= a+\sqrt{a^2-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } a>1}}{>} 1$$

$\Rightarrow$ z_2 liegt nicht im EK

Frage: wo liegt z_1?

$$z_1 := -a + \sqrt{a^2-1}$$

$$z^2+2az+\underline{\underline{1}} = (z-z_1)(z-z_2)$$
$$= z^2-(z_1+z_2)z+\underline{\underline{z_1z_2}}$$

$$\Rightarrow z_1z_2=1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } |z_2|>1}}{\Rightarrow} |z_1|<1$$

$\Rightarrow$ z_1 innerhalb vom EK

iii.) CIF

Def. $g(z) = \frac{-2i}{z-z_2}$, dann g hol. im EK

AM 4 GÜS

17. JUNI 2010

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z-z_1}\,dz = \int\limits_{|z-z_1|=1} \frac{g(z)}{z-z_1}\,dz$$

$$= 2\pi i\, g(z_1) = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{z_1 - z_2}$$

$$= \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}}}$$

<u>A26.)</u> Entwickle $f(z) = z \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$

um $z_0 = -1$ in Laurent-Reihe.

<u>Laurent-Reihe:</u> $a \in \mathbb{C}$ und

$G = \{ z \in \mathbb{C} ; s < |z-a| < R \}$, $0 \leq s < R$

$f: G \to \mathbb{C}$ hol. Dann hat f LE

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \forall z \in G$$

mit $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$

$f(z) = z \cdot \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$ holomorph in $0 < |z+1| < \infty$

$a = -1$

$$f(z) = ((z+1)-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z+1}\right)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z+1)^{2n+1}} \cancel{(z+1)} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{-2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{-(2n+1)}$$