HM4 GÜ3

~~[illegible]~~ Möbius-Transformation

$$z \mapsto \frac{az+b}{d+cz} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

mit $ad-bc \neq 0$

Möbius-Trafos sind bijektiv von $\overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$

$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

durch $f(-\frac{d}{c}) = \infty$
und $f(\infty) = \frac{a}{c}$

A12.) Finde die Möbius-Trafo
mit

$$(\times) \quad \begin{aligned} 0 &\mapsto 1 \\ 1 &\longmapsto \infty \\ \infty &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Dazu: Wegen $1 \mapsto \infty$ muss gelten:

[gesucht: $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(\times)$ erfüllt]

$1 = -\frac{d}{c} \Rightarrow \underline{c = -d}$

wegen $\infty \mapsto 0$

muss gelten: $0 = \frac{a}{c} \Rightarrow \underline{a = 0}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{b}{cz-c}$$

$$f(0) \overset{!}{=} 1 \iff \frac{b}{-c} = 1 \Rightarrow \underline{b = -c}$$

$$f(z) = \frac{-c}{cz-c} = \underline{\underline{\frac{1}{1-z}}}$$

Dieses f erfüllt $(*)$!

<u>A13.)</u> f Möbius-Trafo

<u>zeige:</u> f hat entweder (einen oder zwei Fixpunkte) oder es gilt $f(z) = z \ \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

<u>dazu:</u> Es gilt: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - cb \neq 0$

<u>1. Fall:</u> $c \neq 0$ Dann $f(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$

$\Rightarrow \infty$ ist kein Fixpunkt

Sei $z \in \mathbb{C}$ bel. Dann muss für einen Fixpunkt gelten:

$$f(z) = z \iff \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$\iff az + b = cz^2 + dz$$

$$\iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung

$\Rightarrow$ es gibt 2 Lösungen in $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow f$ hat in diesem Fall ein oder zwei Fixpunkte!

AM4 GÜ3

2. Fall: $c = 0$:

Dann $f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$

$= \tilde{a} z + \tilde{b}$, $\tilde{a} = \frac{a}{d}$, $\tilde{b} = \frac{b}{d}$

Es ist $\tilde{a} \neq 0$ wegen $ad - bc \neq 0$

$f(\infty) = \infty$

Für $z \in \mathbb{C}$:

$f(z) = z \iff \tilde{a} z + \tilde{b} = z$

$\iff (\tilde{a} - 1) z + \tilde{b} = 0$

i.) $\tilde{a} = 1$: $f(z) = z \iff \tilde{b} = 0$

falls $\tilde{b} = 0$: $f(z) = z$

falls $\tilde{b} \neq 0$: kein weiterer Fixpunkt

hier also nur 1 Fixpunkt

ii.) $\tilde{a} \neq 1$: $f(z) = z \iff (\tilde{a} - 1) z + \tilde{b} = 0$

Diese Gleichung hat genau eine Lösung

$\Rightarrow$ 2 Fixpunkte $\square$

A14.) Gebe die MT mit

$0 \longmapsto -1-i$

$i \longmapsto \frac{1}{2}(1+i)$

$-i \longmapsto \infty$

dazu: wegen $-i \mapsto \infty$ muss gelten:

$-\frac{d}{c} = -i \iff d = i \cdot c$

$\Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+ic}$

$f(0) \overset{!}{=} -1-i \iff \frac{b}{ic} = -1-i$

$\iff b = -ic + c$

$\Rightarrow f(z) = \frac{az + c - ic}{cz + ic}$

$f(i) \overset{!}{=} -\frac{1}{2}(1+i) \iff \frac{ai + c - ic}{2ic} = -\frac{1}{2}(1+i)$

$\iff \frac{c + i(a-c)}{2ic} = -\frac{1}{2}(1+i)$

$\iff -i + \frac{a-c}{c} = -1-i$

$\iff \frac{a-c}{c} = -1 \iff \frac{a}{c} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{\cancel{c}(1-i)}{\cancel{c}(z+i)} = \underline{\underline{\frac{1-i}{z+i}}}$

A15.) Pfad-Integrale

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a,b] \to G$ stückweise stetig diff'bar

Dann: $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(z))\gamma'(z)\,dt$

$f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, \quad z \mapsto Re(z)$

a) T parametrisiert durch

$z = (1+i)t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$

Setze: $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = (1+i)t$

$\gamma'(t) = 1+i$ ist stetig diffbar.

HM4 GÜ3

20. MAI 2010

f stetig, $\mathbb{C}$ Gebiet

$$\Rightarrow \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t(1+i)\,dt = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(1+i)}}$$

<u>b.)</u> Γ gegeben durch

$$z = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 1+(t-1)i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Setze: $\gamma(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 1+(t-1)i & 1 < t \le 2 \end{cases}$

stückweise stetig diff'bar mit

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ +i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

f stetig, $\mathbb{C}$ Gebiet

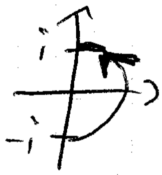
$$\int_\Gamma \operatorname{Re}(z)\,dz = \int_0^1 \operatorname{Re}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \int_1^2 \operatorname{Re}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 1\cdot i\,dt = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} + i}}$$

A16.) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto z^2$

$\mathbb{C}$ Gebiet, f stetig

a.) Γ = $-i$ nach i fahrende, positiv orientierte Halbkreis



$\gamma: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$

$t \mapsto e^{it}$ $\quad \gamma$ stetig diff'bar

mit $\gamma'(t) = i e^{it}$

$$\Rightarrow \int_\Gamma z^2 dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{e^{2it}}_{(\gamma(t))^2} \cdot \underbrace{i e^{it}}_{\gamma'(t)} dt$$

$$= i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{3it} dt = i \left[\frac{1}{3i} e^{3it}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{i3\pi}{2}}\right) = \frac{1}{3}(-i-i) = \underline{\underline{-\frac{2i}{3}}}$$

b.) Γ Streckenzug $-i \to 1 \to i$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit

$\gamma_1: [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t = (1-t)i$

und $\gamma_2: [0,1] \to \mathbb{C}$ $t \mapsto (1-t)+ti$

γ_1 und γ_2 stetig diff'bar mit

$\gamma_1'(t) = 1+i \qquad \gamma_2'(t) = -1+i$

$$\int_\Gamma z^2 dz = \int_{\Gamma_1} z^2 dz + \int_{\Gamma_2} z^2 dz$$

HM4 GÜ3

$$= \int_0^1 (t-(1-t)i)^2 (1+i)\,dt + \int_0^1 ((1-t)+it)^2(-1+i)\,dt$$

$$= (1+i)\left[-i t^2 + \frac{2}{3} i t^3 - t + t^2\right]_0^1 + (i-1)\left[t - t^2 + i t^2 - \frac{2}{3} t^3\right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} i$$