

Ergänzung zu ET II - KGÜ #2 DGL

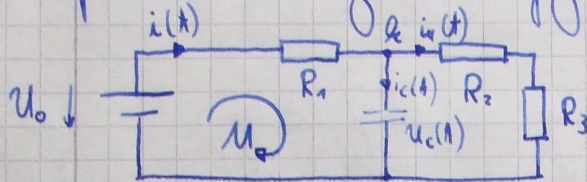
- 1 -

Hinweis: keine offizielle ISEA-Lösung!

• nicht Teil der offiziellen KGÜ!

Dennoch mögliche Klausuraufgabe: Stellen Sie die DGL auf...

Beispiel: Schaltung aus Aufgabe KG 5 f)



schnelle Lösung mit Anfangs-Endwert-Methode (siehe KG 5)

Nimm: Berechnung des Stromverlaufes $i(t)$ für $t > 0 = t_0$ (Schaltzeitpunkt)

$$\text{Masche } U: U_0 = i(t) \cdot R_1 + \frac{1}{C} \int i_c(t) dt \quad (1)$$

$$\text{Knoten } h: i_c(t) = i(t) - i_u(t) \quad (2)$$

$$\text{große Masche (Laufen): } U_0 = i_u(t) \cdot (R_2 + R_3) + i(t) \cdot R_1 \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow i_u(t) = \frac{U_0 - i(t) \cdot R_1}{(R_2 + R_3)} \quad (3b)$$

$$(3b) \rightarrow (2): i_c(t) = i(t) - \frac{U_0 - i(t) \cdot R_1}{(R_2 + R_3)} \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow (1): U_0 = i(t) \cdot R_1 + \frac{1}{C} \int i(t) - \frac{U_0 - i(t) \cdot R_1}{(R_2 + R_3)} dt$$

$$0 = \frac{d i(t)}{dt} R_1 + \frac{1}{C} \cdot i(t) - \frac{U_0 - i(t) \cdot R_1}{(R_2 + R_3) \cdot C} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} : R_1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{d}{dt}$$

$$0 = \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{R_1 C} i(t) - \frac{U_0}{(R_2 + R_3) \cdot C \cdot R_1} + \frac{i(t)}{(R_2 + R_3) \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d i(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_2 + R_3) R_1 C} \cdot i(t) = \frac{U_0}{R_1 C (R_2 + R_3)} \quad (\text{DGL})$$

Berechne zunächst homogene Lösung, d. h. $\uparrow$ gleich Null setzen für $i_h(t)$.

$$\frac{d i_h(t)}{dt} = - \frac{(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1 C (R_2 + R_3)} i_h(t)$$

$$\frac{d i_h(t)}{i_h(t)} = - \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 C (R_2 + R_3)} dt$$

$$\text{Setze } \frac{1}{\tau}$$

Separation der Variablen, d. h. „alle i links, alle t (hier nur dt) rechts (oder andersherum)“

↓ auf beiden Seiten integrieren

„hoch e“ ↓

$$\ln |i_h(t)| = + \ln C - \frac{t}{\tau}$$

$$i_h(t) = e^{\ln C - \frac{t}{\tau}}$$

$$= C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\ln C$: Integrationskonstante,
ln, damit der Term im nächsten
Schritt einfacher wird

Dies ist die homogene Lösung.

Für die allgemeine Lösung gibt es nun zwei Möglichkeiten:

a) $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$, also
allg. Lsg. aus Addition von
homogener und partikulärer Lsg.
→ oftmals „schoneres Hinscha“

b) Berechnung mittels Variation der Konstante
→ Schema, geht immer bei diesem Typ,
aber mehr Aufwand

Wir „kennen“ eine Lösung:

stationärer Fall, d.h. alle

Ungleichvergänge abgeschlossen:

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ für } t \rightarrow \infty \text{ (in DGL)}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot i(t) = \frac{U_0}{R_1(R_2 + R_3)}$$

$$\Rightarrow i(t \rightarrow \infty) = i_p(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,373 \text{ A}$$

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

$$= C \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0,373 \text{ A}$$

Fasse C als $C(t)$ auf:

$$i(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (*)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = C'(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} C(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Einsetzen in (DGL):

$$C'(t) e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} C(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} C(t) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R_1(R_2 + R_3)}$$

Term mit $C(t)$ heben sich bei diesem
Verfahren im Normalfall auf:

$$C'(t) = \frac{U_0}{R_1(R_2 + R_3)} \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$C(t) = \frac{U_0}{R_1(R_2 + R_3)} \cdot \tau e^{\frac{t}{\tau}} + C_2$$

Einsetzen in (*):

$$i(t) = \left(\frac{U_0}{R_1(R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right) e^{\frac{t}{\tau}} + C_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} + C_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

↓ nenne $C_1 = C_2$

$$= 0,373 \text{ A} + C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

↖ Somit gleiches Ergebnis ↗

Nun: Löse Anfangswert-Problem (für beide Wege a), b)
notwendig!):

-3-

$$i(t=0) = \frac{U_0}{R_1} \quad (\text{aus Aufgabe bekannt sei: } C_1 \text{ ungeladen, Spannung } u_c \\ \text{kann nicht springen, d.h. } u_c(t+0) = 0V)$$

$$= \frac{112V}{100\Omega} \Rightarrow U_0 = i(t) \cdot R_1 + u_c(t)$$

$$t=0: U_0 = i(t) \cdot R_1$$

$$= 1,12A$$

$$\frac{1}{\tau} C \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0,373A = C + 0,373A \Rightarrow C = 0,747A$$

$$\Rightarrow i(t) = 0,373A + 0,747A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{stimmt mit Ergebnis aus AEM überein :}$$