14. MAI 2010

SysTheo GÜ 5

Systeme 2. Ordnung

$$G(s) = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

-> Nenner~~...~~polynom der Übertragungsfunktion ist zweiter Ordnung in s.

Pole:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Abhängig von ξ sind die Pole reell oder konjugiert komplex.

$0 < \xi < 1$ => konjugiert komplexes Polpaar

$\xi \geq 1$ => 2 reelle Pole

Wenn 2 reelle Pole

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{\omega_0^2 K}{\underset{\uparrow}{(s+a)}\underset{\uparrow}{(s+b)}}$$

reell

Tabelle S. 209 Nr. 7.

$$G(s) \circ\!\!-\!\!\bullet\; g(t) = \omega_0^2 K \cdot \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

d.h. reelle Pole $\hat{=}$ exponentielles Verhalten im Zeitbereich konjugiert komplexes Polpaar ($0 < \xi < 1$)

$$G(s) = \frac{\omega_0^2 K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

~~Keine~~ Keine Faktorisierung (im Unterschied zum Fall reeller Pole)

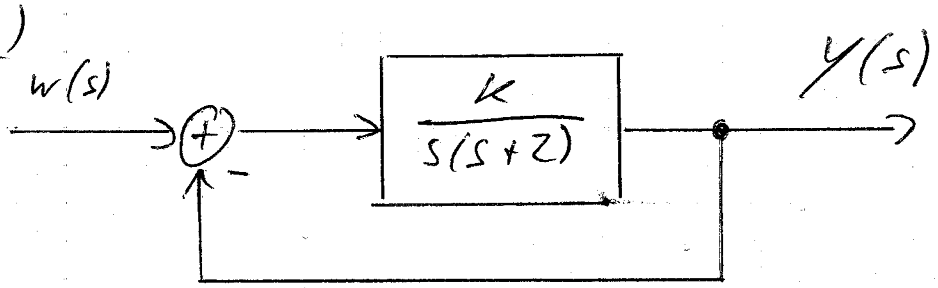
Tabelle S. 210 Nr. 24

$$G(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; g(t) = K \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$$

bei konj. komplexen ~~Systemen~~ Polen:

Schwingende Impulsantwort (gedämpfte Schwingung i.A.)

11.)



Übertragungsfunktion offener Kreis

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

Übertragungsfunktion geschlossener Kreis

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

↑ System 2. Ordnung

systheo GÜ 5

14. MAI 2010

Allgem. Darstellung System 2. Ordnung

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = K \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K}$$

$$2 \cdot \zeta \omega_0 = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Zusammenhang zwischen

M_p und ζ bzw. ω_0:

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- T_p und ζ bzw. ω_0:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Forderungen:

1.) $T_p = 1$

2.) $M_p \overset{!}{=} 5\%$

$$T_p = \frac{\pi}{\sqrt{K-1}} \leq 1 \quad \text{(Forderung 1)}$$

$$\Rightarrow K \overset{!}{\geq} 10{,}87$$

$$M_p = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{K-1}}\right) \leq 0{,}05$$

$$\Rightarrow K \overset{!}{\leq} 2{,}1$$

- beide Forderungen nicht gleichzeitig erfüllbar.

b.) gleicher Abschwächungsfaktor F.

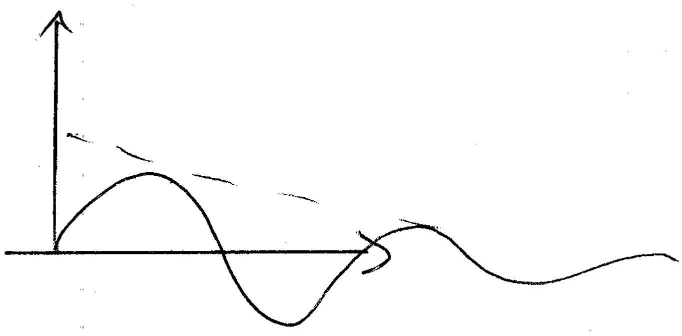
$$T_p = \frac{\pi}{\sqrt{K-1}} \le F \cdot 1 \qquad (1)$$

$$\mu_\varphi = \exp(-F) \le 0{,}05 \cdot F \qquad (2)$$

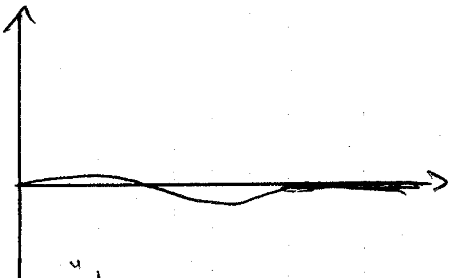
$\Rightarrow F = 2{,}2 \Rightarrow K = 3{,}04$

c.) $$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)} \qquad a=4 \quad b=2$$

$\rightarrow$ reelle Pole (d.h. kein schwingendes Verhalten zu erwarten, Stoßantwort, Sprungantwort)



schwingendes Verhalten



Überschwingen

System mit reellen Polen kann höchstens überschwingen.

$$G(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{b-a}\left((c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}\right)$$

SysTheo Gü 5

Übertragungsfunktion $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Stoßantwort

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t) \text{ Sprungantwort}$$

$\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \varepsilon(t)$

$$\Rightarrow \quad s \cdot H(s) = G(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Sprungantwort hat Maximum c (Überschwingen) wenn ihre Ableitung einen Nulldurchgang hat

Ableitung der Sprungantwort $\hat{=}$ Stoßantwort

$$g(t) = \frac{1}{b-a}\left((c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt}\right)$$

$c =$	6	3	1
$c-a =$	2	-1	-3
$c-b =$	4	1	-1

$b-a = \quad -2$

$c=6$: $\quad g(t) = -\frac{1}{2}\left(2 \cdot e^{-4t} - 4e^{-2t}\right) = 0$

$\Rightarrow t = -0{,}34$

$\rightarrow$ negative Zeit $\Rightarrow$ kein Überschwingen

$c=3$: $\quad g(t) = -\frac{1}{2}\left(-e^{-4t} - e^{-2t}\right) = 0$

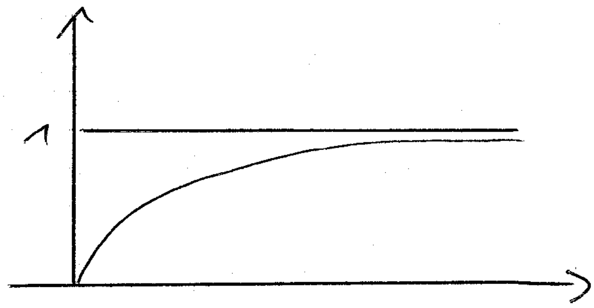
$\Leftrightarrow \quad e^{-4t} = -e^{-2t}$

$\Rightarrow$ kein Überschwingen

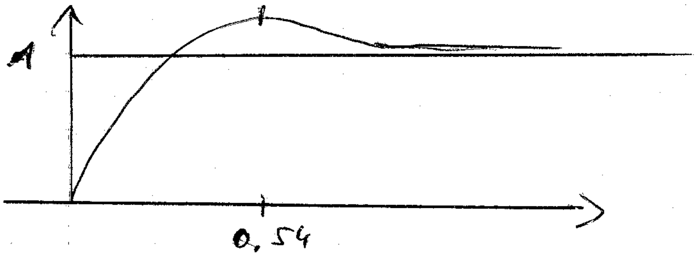
$c=1$: $g(t) = -\frac{1}{2}(-3e^{-4t}+e^{-2t}) = 0$

$t = 0{,}54$

$\Rightarrow$ Überschwingungen bei $t = 0{,}54$



Fall $c = 6/3$



Fall $c = 1$