NuMa GÜ 2

A2.4.)

$M(b, m, r, R)$

$x = f \cdot b^e \qquad b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Basis

- $r \leq e \leq R$
- $f = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_m$ (Mantisse)
  $d_j \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad \forall j \neq 1$

$d_1 \neq 0 \qquad \forall x \neq 0$

$x = \pm \left(\sum_{j=1}^{m} d_j \, b^{-j} \right) b^e$

$x_{min} = 0$

$x = 0.\underbrace{10000\dots0}_{m-1 \text{ mal}} \cdot b^r = b^{r-1}$

$x_{max} = a\,(b-1)(b-1)(b-1)\dots(b-1) \cdot b^R$

(Dezimal wäre das $0,9999\dots \cdot 10^R$)

$= (1 - b^{-m}) \cdot b^R$

A.2.21.)

$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a.) $\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq K(a) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\|_\infty = \max(9, 3) = 9$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/3 \\ -1/9 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}, \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{9}$$

$$K^\infty(A) = 9 \cdot \frac{7}{9} = 7$$

Störung (in $\|..\|_\infty$) in der rechten Seite:
$\max(0, |\varepsilon|)$

Störung in $x \leq 7 \cdot |\varepsilon|$

b.) Teilen 1. Zeile durch 9,
2. Zeile durch 3
(Betragszeilensumme)

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1/9 \pm 1/9\,\varepsilon \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$K_\infty(\bar{A}) = 3$$

$$r_b = \frac{1}{9}|\varepsilon| = \text{Störung in } b$$

$$\Rightarrow \text{Störung in } x \leq 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot |\varepsilon| = \frac{1}{3}|\varepsilon|$$

Wichtig: Minimierung von χ_∞,
keine Problem-Minimierung!!

A. 3. 9.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 8 & 7 & -7 & 6 \\ -6 & 16 & -2 & 13 \\ -10 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & 7 & -7 & -6 & 2 \\ -6 & 16 & -2 & 13 & 21 \\ -10 & 0 & 1 & 12 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} \\ \\ \end{matrix}$$

Buch S. 68 (Dahmen / Reusken)

$$l_{2,1} = \frac{a_{2,1}^{(1)}}{a_{1,1}} = \frac{8}{2} = 4$$

$$l_{3,1} = \frac{a_{3,1}^{(1)}}{a_{1,1}} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$l_{4,1} = \frac{a_{4,1}^{(1)}}{a_{1,1}} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\boxed{l_{i,j} = \frac{a_{i,j}^{(i)}}{a_{j,j}^{(i)}}}$$

$$a_{2,1}^{(2)} = 0 \; ; \quad a_{2,2}^{(2)} = 7 - 4 \cdot 3 = -5$$

$$a_{2,3}^{(2)} = -7 - 4(-2) = 1$$

$$a_{2,4}^{(2)} = -6 - 4(0-1) = -2$$

$$\vdots$$

$$(A \mid b)^{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 25 & -8 & 10 & 27 \\ 0 & 15 & -9 & 7 & 13 \end{array}\right)$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{1,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = \frac{2}{-5} = -5$$

$$l_{4,2} = \frac{a_{4,2}^{(2)}}{a_{2,2}^{(2)}} = \frac{1}{-5} = -3$$

$a_{i,j} = \dots$

$$(A|b)^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$l_{4,3} = \frac{a_{4,3}^{(3)}}{a_{3,3}^{(3)}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$a_{i,j} = \dots$

$$(A|b)^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rückwärts-Einsetzen:

$x_4 = 1$

$x_3 = -\frac{3}{-3} = 1$

$x_2 = (-6 + 2 \cdot 1 - 1)(-5) = 1$

$x_1 = (2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \cdot 2 = 1$

$\Rightarrow x = (1, 1, 1, 1)^T$

c.1) $\det(A)$

maple $\Rightarrow \det(A) = 30$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 7 & 4 & -2 & -10 \end{array}\right) \quad \text{II} - \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 30 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 12 & 0 & 4 & 40 \end{array}\right) \quad 1.3 \text{ II} -$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 30 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1\tfrac{1}{3} & 6\tfrac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_4 = 6\tfrac{2}{3} \cdot 1\tfrac{1}{3} = 4$$

$$x_3 = (30 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 4) : 4 = 3$$

$$x_2 = (20 - 3 \cdot 4) : 4 = 2$$

$$x_1 = (10 - (-1 \cdot 2) - 2 \cdot 4) : 4 = 1$$

c.)

$n = 20$

Rechenaufwand Cramer $(n+1)! \approx 5{,}109 \cdot 10^{19}$

$\hat{=} 5{,}2 \cdot 10^{22}$ sec

$\hat{=} 8447576$ Wochen

Gauß $\frac{2}{3} n^3 = 6333{,}33$

NuMa GÜ 2

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot R = A$$

$$A \cdot x = b \iff L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = b$$

=> 1. Schritt: Löse $L \cdot y = b$

2. Schritt: Löse $R \cdot x = y$

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L) \cdot \det(R)$$
$$= 1 \cdot [2 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot 1] = 30$$

A 3.27.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & & & & \\ -1 & & 2 & & & \\ -1 & & & 2 & & \\ -1 & & & & 2 & \\ -1 & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & -1/11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & -1/10 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1/9 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * & * \\ & & * & * & * & * \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

Vertausche 1. und letzte Zeile

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & & 2 \\ -1 & 2 & & & & \\ -1 & & 2 & & & \\ -1 & & & 2 & & \\ -1 & & & & 2 & \\ 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vertausche 1. Spalte mit letzter Spalte:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & & & -1 \\ & 2 & & & & -1 \\ & & 2 & & & -1 \\ & & & 2 & & -1 \\ & & & & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

A3.1.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a.) Cramersche Regel

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_i & \cdots & b & a_{i+1} \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -80$ $\quad \det(A_1) = -80$

$\det(A_2) = -160$

$\det(A_3) = -240$

$\det(A_4) = -320$

$$x = (1, 2, 3, 4)^T$$

b.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 0 & 2 & 10 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 10 \\ 6 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \hookleftarrow 1.2 \; + \\ \\ \\ \hookleftarrow 1.2 \; - \end{array}$$