NuMa GÜ 1

Eine Abbildung $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$
heißt Norm auf V, falls

(N1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N2) $\forall a \in \mathcal{X} \ [\mathbb{R}, \mathbb{C}], \ v \in V$ gilt:
$\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$

(N3) $\forall v, w \in V$ gilt:
$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

2.18. (Normen) $\quad x \in \mathbb{R}^2$

i.) • $x \to |x_1|$
(N1) ist nicht erfüllt: $\binom{0}{1} \mapsto |0| = 0$
aber $\binom{0}{1} \neq \binom{0}{0}$

ii.) • $x \mapsto 5|x_1| + 2|x_2|$
iii.) • $x \mapsto \max(a|x_1|, |x_2|)$
$\Big\}$ ⇒ analog zu vii.)

iv.) • $x \mapsto x_1 + x_2$ ist keine Norm, da (N1) nicht erfüllt ist:
$x = (0, -1) \mapsto -1 \ngeq 0$

v.) • $x \mapsto \sqrt{x_1 + x_2}$
$x = (-1, -1) \mapsto \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

vi.) • $x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ist Norm, da:
(N1) sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \vee x_2 \neq 0$, $x_1^2 \vee x_2^2 > 0$
$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$
$x = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$ ✓

(N2) $a \in \mathbb{R}$
$\|ax\| = \sqrt{(ax_1)^2 + (ax_2)^2} = a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = a \cdot \|x\|$ ✓

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

$$\|x+y\|^2 = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2$$
$$= (x_1^2+x_2^2) + 2\cdot(x_1y_1 + x_2y_2) + (\cancel{x_1}^2 + y_2^2)$$
$$\leq (x_1^2+x_2^2) + 2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2} + (y_1^2+y_2^2)$$
$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

---

vii.) $x \longmapsto |x_1| + |x_2|$ ist eine Norm, da:

(N1) ✓

(N2) $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|ax\| = |ax_1| + |ax_2| = |a|\cdot(|x_1| + |x_2|)$$
$$= |a|\cdot\|x\|$$

(N3) $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$
$$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$
$$= \|x\| + \|y\|$$

viii.) $x \mapsto \max(|x_1|, |x_2|)$ ist eine Norm, da:

(N1) ✓

(N2) $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|ax\| = \max(|ax_1|, |ax_2|) = |a|\cdot\max(|x_1|,|x_2|)$$
$$= |a|\cdot\|x\|$$

(N3) $\underline{x,y \in \mathbb{R}^2}$

$$\|x+y\| = \max(|x_1+y_1|, |x_2+y_2|)$$
$$\leq \max(|x_1|+|y_1|, |x_2|+|y_2|) \quad (*)$$

1. Fall: $\|x\| = |x_1| \wedge \|y\| = |y_1|$

$\Rightarrow \quad (*) = |x_1| + |y_1| = \|x\| + \|y\|$

NuMa GÜ 1 26. APR. 2010

2. Fall: $\|x\| = |x_1| \wedge \|y\| = |y_2|$

$\|x+y\| = \max(|x_1+y_1|, |x_2+y_2|)$

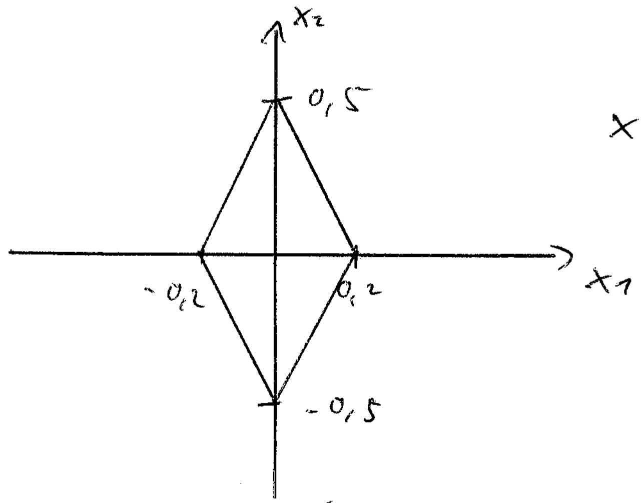
a.) falls $|x_1+y_1| \geq |x_2+y_2|$

$\|x+y\| = |x_1+y_1| \leq |x_1| + |y_1| \leq \|x\| + \|y\|$

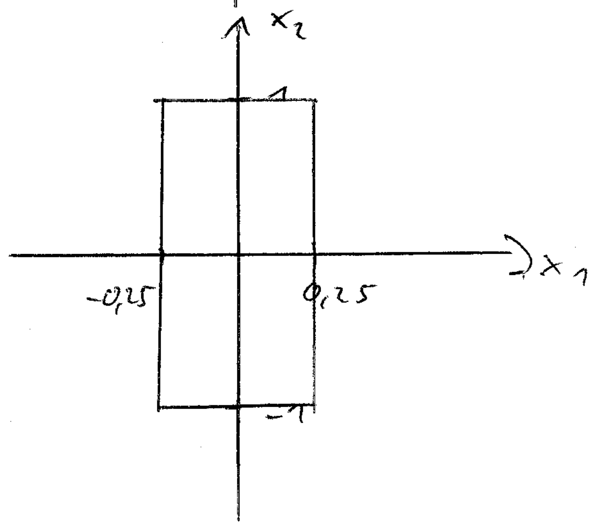
b.) falls $|x_2+y_2| > |x_1+y_1|$

$\|x+y\| = |x_2+y_2| \leq |x_2| + |y_2| = \|x\| + \|y\|$

b.)



$x \mapsto 5|x_1| + 2|x_2|$



$x \mapsto \max(4|x_1|, |x_2|)$

A.2.19.

$$A = \begin{pmatrix} 7/4 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -3/4 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 5/2 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -3/4 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 7/4 \end{pmatrix}$$

A symm. $\Rightarrow \|A\|_\infty = \|A\|_1$

- $\left|\frac{7}{4}\right| + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + \left|-\frac{3}{4}\right| = \underline{\frac{5}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$
- $\left|\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{5}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{2} + \frac{\cancel{2}}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$
- $\left|-\frac{5}{4}\right| + \left|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{7}{4}\right| = \underline{\frac{5}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$

$$\|A\|_\infty = \frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \|A\|_1$$
$$\|A_2\| = \sqrt{\lambda_{max} \cdot (A^T A)}$$

$$\lambda_{max}(A^T A) = \lambda^2(A) \quad \text{falls } A \text{ symm.}$$

sei λ EW von A mit EV v

$$(A^T A)v = A \cdot Av = A(\lambda v) = \lambda^2 v$$

$$\det(A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \lambda = 1, 2, 3$$
$$\Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sqrt{\lambda^2_{max}(A)}$$
$$= \lambda_{max}(A) = 3$$

A 2.11.)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$\tilde{x}$ Näherungswert für $x=2$, mit rel. Fehler von max. 5%

a,) rel. Fehler in $f(x)$

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \stackrel{\circ}{\leq} K_{rel.}(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|$$

$n=1$:

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \stackrel{\circ}{\leq} K_{rel}(x) \cdot \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

mit $K_{rel}(x) := \left| f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \right|$

$$\left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| \approx 5‰$$

$$K_{rel}(x) = \left| -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{(x^2+1)}} \right| = \left| -\frac{2x^2}{x^2+1} \right|$$

$$K_{rel}(x) = \left| -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{x^2+1}} \right|$$

$$K_{rel}(2) = \left| -\frac{2 \cdot 2^2}{(2^2+1)} \right| = 1{,}6$$

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \doteq 1{,}6 \cdot 5‰ = 8‰$$

=> rel. Fehler in f beträgt 8‰ [in 1. Näherung]

b.) $K_{rel}(2.0) \cdot e_x = 1$

$\Rightarrow 1.6 \cdot e_x = 1$

$\Rightarrow e_x = \frac{1}{1.6} = 0{,}625$

=> Der rel. Fehler in x darf max. 0,625‰ betragen.

---

pq-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

i.) $p = -123$, $q = 0.4$

$$x_{1/2} = \frac{123}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{378185}$$

$$x_1 =_{10} \underbrace{122.9967479}$$

$x_2 =_{10} 0.00\underbrace{3252120000}$

$x_1 =_4 0{,}123 \cdot 10^3$

$x_2 =_4 0$

Satz von Vieta

$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$

und vermeiden so Auslöschung:

$x_1 = -\frac{p}{2} + (\mathrm{sign}(-p)) \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$x_2 = \frac{q}{x_1}$

1) $x_1 =_4 123.0$; $x_2 = 0{,}003352$