AMU KGÜ2

05. MAI 2010

Holomorphie entspricht Differenzierbarkeit in Bezug auf den $\mathbb{R}^2$.

B8.)

a.) Wäre $\bar{z}$ holomorph, so auch $\frac{z+\bar{z}}{2} = Re\{z\}$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu A7

↳ „Zusammenbasteln" von holomorphen Funktionen gibt wieder eine holomorphe Funktion:

- Linearkombination
- Produkt / Quotient
- Verkettungen: $f(g(z))$

(alternativ: Skript S. 3)

b.) $g(x+iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{u} \underbrace{-2ixy}_{i\cdot v}$ $\quad x,y \in \mathbb{R}$

Cauchy-Riemann-DGL

$g(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$

und $u_x = v_y$
$u_y = -v_x$ (Th. 1.1)

$\Rightarrow g$ holomorph

$u_x = 2x \overset{!}{=} v_y = -2x$

$\Rightarrow$ CR verletzt

g nicht holomorph

c.) $h(z) = z^2 \cdot |z|$

Wäre h holomorph, so auch $h^2 = z^4 |z|^2$

$= z^4 \cdot z \cdot \bar{z} = z^5 \cdot \bar{z}$

also auch $\bar{z}$ – Widerspruch zu a.)

9.) $c(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

$= \frac{1}{2}\cos(x)e^y + \frac{1}{2}\cos(x)e^{-y}$

$-\frac{1}{2}i\sin(x)e^y + \frac{1}{2}i\sin(x)e^{-y}$

$= \frac{1}{2}(\cos(x) - i\sin(x))e^y$

$+\frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y}$

$= \frac{1}{2}e^{-ix}e^y + \frac{1}{2}e^{ix}e^{-y}$

$= \frac{1}{2}(e^{y-ix} + e^{ix-y})$ $\quad z = x + iy$

$= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$

$\Rightarrow$ holomorph, da e^z holomorph

(schneller: Cauchy-Riemann)

10.) $z_1 = (1+i)^4 = \left(\sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}\right)^4 = 4 \cdot e^{i(\pi + 8k\pi)}$

$\underline{\underline{= -4}}$ eindeutig

$z_2 = (1+i)^{1+i} = \left(\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}\right)^{1+i}$

$= \exp\left(\ln(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)\right)^{1+i}$

$= \exp\left(\ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{2})i + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) - \frac{\pi}{4} \underbrace{- 2k\pi}_{\cdot e^{-2k\pi}}\right)$ mehrere Werte

$\Rightarrow$ nicht eindeutig

IAM4 KGÜ2

05. MAI 2010

$$z_3 = \sqrt{1+i} = \underline{\underline{\pm\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}}}$$

2 mögliche Werte

<u>II 12.)</u>

$$u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

1.) Suche $\tilde{v}(x,y)$ ~~nach~~ mit Cauchy-Riemann

$$\partial_x u \overset{!}{=} \partial_y \tilde{v}$$

$$\partial_x u = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \overset{!}{=} \partial_y \tilde{v}(x,y)$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(x,y) = \int dy\, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ w=x^2+y^2}}{=} \frac{x}{w} + c(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + C(x)$$

<u>außerdem:</u>

$$\partial_y u = -\partial_x \tilde{v} \qquad (c(x) \text{ sei diff'bar})$$

$$-\partial_x \tilde{v} = -\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(x)\right)$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - c'(x) \overset{!}{=} \partial_y u$$

$$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow c(x) = \int dx\, c'(x) = \tilde{c} \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x}{x^2+y^2} + c\right) \text{ ist}$$

holomorph für $\tilde{c} \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

analytisch

↳ es gibt Taylorreihendarstellung

2.) Bestimme $\tilde{c}$

$f(1+i\cdot 0) \overset{!}{=} 0 = u(1,0) + i\tilde{v}(1,0$

$= 0 + i(1+\tilde{c}) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{c} = -1}}$

<u>B 11.)</u> $v(x,y) = 2x(1-y) = 2x - 2xy$

1.) $\partial_x \tilde{u} = \partial_y v = -2x$

$\tilde{u} = -x^2 + c(y)$

2.) $\partial_y \tilde{u} = -\partial_x v$

$\partial_y \tilde{u} = c'(y) \overset{!}{=} -2 + 2y$

$\Rightarrow c(y) = -2y + y^2 + \tilde{c}$

$\Rightarrow f(z) = -x^2 - 2y + y^2 + \tilde{c} + i(2x(1-y))$

$f(1+i) \overset{!}{=} 0$

$= -1 - 2 + 1 + \tilde{c} + 0i$

$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{c} = 2}}$

$\Rightarrow f(z) = -x^2 - 2y + y^2 + 2 + i(2x(1-y))$