AM4 GÜ 2

Def.: 1.8.

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$
f heißt diff'bar in $a \in G$

$:\Leftrightarrow \lim\limits_{w \to a} \frac{f(w) - f(a)}{w - a}$ ex.

Def.: 1.9.

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$
Existiert $\frac{df}{dz}(a)$ $\forall a \in G$, dann heißt f holomorph in G.

A7.) Sind die folgenden Funktionen holomorph?

a.) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ bel. Dann

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow f$ komplex diff'bar $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow f$ ist holomorph in $\mathbb{C}$.

b.) $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto Re(z)$

Behauptung: g ist nirgends holomorph.
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ bel. und $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z_0$ und
$Re(z_n) = Re(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\dfrac{g(z_n)-g(z_0)}{z_n-z_0} = \dfrac{Re(z_n)-Re(z_0)}{z_n-z_0}$

$$= 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sei nun $(w_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit
$w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$ und $Im(w_n) = Im(z_0)$

$$\frac{g(w_n)-g(z_0)}{w_n-z_0} = \frac{Re(w_n)-Re(z_0)}{Re(w_n)+\cancel{i\cdot Im(w_n)}-Re(z_0)-\cancel{i\cdot Im(z_0)}}$$

$$= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ g ist für kein $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diff'bar.

$\Rightarrow$ g ist nirgends holomorph in $\mathbb{C}$.

c.) $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z|$

i.) In $z_0 = 0$ ist h nicht komplex diff'bar.

Denn
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{z\searrow 0\\ z\in\mathbb{R}}} \frac{|z|}{z} = 1 \\ &\lim_{\substack{z\nearrow 0\\ z\in\mathbb{R}}} \frac{|z|}{z} = -1 \end{aligned}\right\} \neq$$

ii.) Sei $z_0 \neq 0$, bel. aus $\mathbb{C}$.

Dann ist $\dfrac{|z|-|z_0|}{z-z_0} = \dfrac{|z|^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(|z|+|z_0|)}$

$$= \frac{(Re(z))^2+(Im(z))^2-(Re(z_0))^2-(Im(z_0))^2}{[Re(z)-Re(z_0)+i(Im(z)-Im(z_0))](|z|+|z_0|)}$$

Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ mit $z_n \to z_0$ und
$Re(z_n) = Re(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{|z_n|-|z_0|}{z_n-z_0} = \frac{(\operatorname{Im}(z))^2-(\operatorname{Im}(z_0))^2}{i(\operatorname{Im}(z)-\operatorname{Im}(z_0))[|z_n|+|z_0|]}$$

$$= \frac{\operatorname{Im}(z_n)+\operatorname{Im}(z_0)}{i(|z_n|+|z_0|)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -i\,\frac{2\cdot \operatorname{Im}(z_0)}{2\cdot |z_0|}$$

Sei $(w_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit $w_n \to z_0$ und $\operatorname{Im}(w_n) = \operatorname{Im}(z_0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \frac{|w_n|-|z_0|}{w_n-z_0} = \frac{(\operatorname{Re}(w_n))^2-(\operatorname{Re}(z_0))^2}{(\operatorname{Re}(w_n)-\operatorname{Re}(z_0))[|w_n|+|z_0|]}$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(w_n)+\operatorname{Re}(z_0)}{|w_n|+|z_0|} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\operatorname{Re}(z_0)}{|z_0|}$$

Da die beiden Grenzwerte nie übereinstimmen ist k für kein $z_0 \neq 0$ komplex diff'bar.

$\Rightarrow$ h ist nicht holomorph.

A8.) $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 2x stetig diff'bar
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph

Zeige: u, v sind ~~holomorph~~ harmonisch

[harmonisch: $\Delta u = 0 \quad \forall (x,y)$]
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

Cauchy-Riemann-Gleichungen:
(Theorem 1.1) f holomorph
$\Rightarrow u_x = v_y \;\wedge\; u_y = -v_x$

Beweis: f holomorph

$\Rightarrow$ Satz 1.1. anwendbar.

Es gilt also

$u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$

$\rightsquigarrow (u_x)_x = (v_y)_x \wedge (u_y)_y = (-v_x)_y$

$$\Rightarrow u_{xx} = v_{yx} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwarz}}}{=} v_{xy} = -u_{yy}$$

$$\Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -u_{yy} + u_{yy} = 0$$

analog für v.

A9.) $\log_-$ ist der auf dem Gebiet

$\mathbb{C}_- = \{ z \in \mathbb{C};\ z \neq 0,\ \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2}$

definierte Zweig des Logarithmus
(Branch)

$\log_+ \rightsquigarrow \mathbb{C}_+ = \{ z \in \mathbb{C};\ z \neq 0;\ -\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \}$

Berechne $\log_-$ und $\log_+$ von $1+i$.

Def. 1.12: Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass

$\exp(f(z)) = z \quad \forall z \in G$

Dann heißt f Zweig des Logarithmus in G.

$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

Finde nun $k \in \mathbb{Z}$, so dass $1+i$ in $\mathbb{C}_+$ bzw. $\mathbb{C}_-$ liegt

<u>für $\mathbb{C}_-$:</u> $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \frac{5\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{9}{8} \Rightarrow \underline{\underline{k = 1}}$

also $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{4}} \in \mathbb{C}_-$

$\Rightarrow \operatorname{Log}_-(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i \cdot \frac{9\pi}{4}$

<u>für $\mathbb{C}_+$:</u>

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow k = 0$

$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{C}_+$

$\Rightarrow \operatorname{Log}_+(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$

<u>A10.)</u> f holomorph, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Realteil

$u(x,y) = 3x + (e^{2x} - e^{-2x})\cos(2y)$

f holomorph $\xRightarrow{\text{Th 1.1}}$ CR-Gl. muss gelten

$v_y = u_x = 3 + 2 \cdot (e^{2x} + e^{-2x})\cos(2y)$

$\wedge\ v_x = -u_y = 2 \cdot (e^{2x} - e^{-2x})\sin(2y)$

$\Rightarrow v = \int v_y \, dy = \int u_x \, dy$

$= \int 3 + 2(e^{2x} + e^{-2x})\cos(2y) \, dy$

$$= 3y + (e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y) + c(x)$$

ebenso: $v = \int v_x \, dx = \int -u_y \, dx$

$$= \int 2 (e^{2x} - e^{-2x}) \sin(2y) \, dx$$

$$= (e^{2x} - e^{-2x}) \sin(2y) + d(y)$$

$\Rightarrow \quad d(y) = 3y, \quad c(x) = 0$

$\Rightarrow \quad v(x,y) = 3y + (e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$$

$$= 3x + (e^{2x} - e^{-2x}) \cos(2y) + 3iy + i(e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y)$$

$$= 3z + e^{2x}(\cos(2y) + i \cdot \sin(2y)) - e^{-2x}(\cos(2y) - i \cdot \sin(2y))$$

$$= 3z + e^{2x} \cdot e^{i2y} - e^{-2x} e^{-i2y}$$

$$\underline{\underline{= 3z + e^{2z} - e^{-2z}}}$$

<u>A11.)</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph,

$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$,

$u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2x stetig diff'bar

<u>zeige:</u> f' holomorph

<u>Beweis:</u> Theorem 1.2 $\rightsquigarrow$ Prüfe CR-Gl.

Es gilt: $f'(z) \overset{CR}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } f \\ \text{holomorph}}}{} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z)$

HM4 Gü 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \underbrace{u_x}_{U} + i \cdot \underbrace{v_x}_{V}$$

zeige: CR-Gl. für U, V, also

$$u_{xx} + i \cdot v_{xx} = v_{yx} - i \cdot u_{yx}$$

$$\Rightarrow u_{xx} = v_{yx} \wedge v_{xx} = -u_{yx}$$

$$\underset{\text{Schwarz}}{\Rightarrow} \underbrace{(u_x)_x}_{U} = \underbrace{(v_x)_y}_{V} \wedge (v_x)_x = -(u_x)_y$$

$$\Rightarrow U_x = V_y \wedge V_x = -U_y$$

$$f' = U + iV$$

also erfüllt f' die CR-Gl.

$\underset{\text{Th 1.2}}{\Rightarrow}$ f' ist holomorph.