

komplex diff'bar (Def. 1.8)

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

f heißt komplex diff'bar in $a \in G$

$$\Leftrightarrow \lim_{w \rightarrow a} \frac{f(w) - f(a)}{w - a} \text{ ex.}$$

holomorph

(Def. 1.9)

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet $f: G \rightarrow \mathbb{C}$

f heißt holomorph in G

$\Leftrightarrow f$ komplex diff'bar $\forall a \in G$

A) Prüfe ob die folgenden Fkt. holomorph sind

a) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

$\Rightarrow f$ komplex diff'bar $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ holomorph

b) $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \operatorname{Re}(z)$

Behauptung: g nirgends holomorph

denn: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig und $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$

Folge mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ und $\operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z_0) \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(z_n) - g(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_0)}{z_n - z_0} = 0$$

Sei nun $(w_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ und
 $\operatorname{Im}(w_n) = \operatorname{Im}(z_0) \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(w_n) - g(z_0)}{w_n - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(w_n) - \operatorname{Re}(z_0)}{\operatorname{Re}(w_n) + i \operatorname{Im}(w_n) - \operatorname{Re}(z_0) - i \operatorname{Im}(z_0)} \\ = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ für kein $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex diff'bar

$\Rightarrow f$ nirgends holomorph

c) $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto |z|$

i) h ist in $z_0 = 0$ nicht komplex diff'bar, denn

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{|z|}{z} = 1 \quad \text{aber} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{|z|}{z} = -1$$

ii) Sei $z_0 \neq 0, z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{(z - z_0)(|z| + |z_0|)} = \frac{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 - (\operatorname{Re}(z_0))^2 - (\operatorname{Im}(z_0))^2}{[\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0) - i(\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0))](|z| + |z_0|)}$$

Sei $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit $z_n \rightarrow \infty$ und $\operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z_0) \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|z_n| - |z_0|}{z_n - z_0} = \frac{(\operatorname{Im} z_n)^2 - (\operatorname{Im} z_0)^2}{i(\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z_0)(|z_n| + |z_0|)} = \frac{\operatorname{Im} z_n + \operatorname{Im} z_0}{i(|z_n| + |z_0|)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -i \frac{\operatorname{Im} z_0}{|z_0|}$$

Sei nun $(w_n)_n \subset \mathbb{C}$ Folge mit $w_n \rightarrow z_0$ und

$$\operatorname{Im} w_n = \operatorname{Im} z_0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{|w_n| - |z_0|}{w_n - z_0} = \frac{(\operatorname{Re} w_n)^2 - (\operatorname{Re} z_0)^2}{(\operatorname{Re}(w_n) - \operatorname{Re} z_0)(|w_n| + |z_0|)} \\ = \frac{\operatorname{Re} w_n + \operatorname{Re} z_0}{|w_n| + |z_0|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re}(z_0)}{|z_0|}$$

Da $z_0 \neq 0$ angenommen, können die beiden Grenzwerte
 nie übereinstimmen

② $\Rightarrow f$ für kein $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$ h.d. $\Rightarrow f$ nicht holomorph in $\mathbb{C}$

AS $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 2 mal stetig d.f.f'bar

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

f sei holomorph

zeige: Δu bzw. $\Delta v \equiv 0$

d.h. u, v harmonisch, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

Theorem 1.1: f holomorph

$$\Rightarrow u_x = v_y \quad \wedge \quad v_x = -u_y \quad (\text{Cauchy-Riemann DGL-n})$$

Da f holomorph u.k. gilt mit Theorem 1.1

$$u_x = v_y \quad \wedge \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow u_{xx} = v_{yx} \quad \wedge \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

$$u_{xx} = v_{yx} \stackrel{\text{Scheffé}}{=} v_{xy} = -u_{yy}$$

$$\Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -u_{yy} + u_{yy} = 0$$

Δv analog

Def. Zweig des Logarithmus (Def 1.12)

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so dass

$$\exp(f(z)) = z \quad \forall z \in G$$

Dann heißt f Zweig d. Log. auf G

$$\underline{AS} \quad \mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}\}$$

$$\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}; z \neq 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$$

$\log_-$, $\log_+$ seien Zweige des Log. in $\mathbb{C}_-$ bzw. $\mathbb{C}_+$

Berechne $\log_+(1+i)$ und $\log_-(1+i)$

Polardarstellung von $1+i$:

$$1+i = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

Finde $k \in \mathbb{Z}$, so dass $1+i \in \mathbb{C}_+$ bzw. $\mathbb{C}_-$

$$\text{für } \mathbb{C}_- : \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < 2\pi k < \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{3}{8} \rightarrow k=1$$

$$\text{also } 1+i = \sqrt{2} e^{i \frac{9\pi}{4}}$$

$$\log_-(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{für } \mathbb{C}_+ : -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k < \frac{3\pi}{2} \rightarrow k=0$$

$$\text{also } 1+i = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \log_+(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}$$

A10 Gibt es ein holomorphes $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\text{Realteil: } u(x,y) = 3x + (e^{2x} - e^{-2x}) \cos(2y)$$

Ansatz: f ist holomorph $\Rightarrow$ es müssen die C-R-DGLn gelten

d.h. suche ein $v = v(x,y)$, so dass

$$u_x = v_y \quad \wedge \quad u_y = -v_x$$

$$v_y = u_x = 3 + 2(e^{2x} + e^{-2x}) \cos(2y)$$

$$v_x = -u_y = -(e^{2x} - e^{-2x})(-2) \sin(2y) = 2(e^{2x} - e^{-2x}) \sin(2y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= \int v_y dy = \int u_x dy = \int 3 + 2(e^{2x} - e^{-2x}) \cos(2y) dy \\ &= 3y + (e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y) + c(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } v &= \int v_x dx = \int -u_y dx = \int 2(e^{2x} - e^{-2x}) \sin(2y) dx \\ &= (e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y) + d(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c(x) = 0, \quad d(y) = 3y$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 3y + (e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y)$$

also: $f(x+iy) = u(x,y) + i(v(x,y))$ holomorph!

$$\begin{aligned}
 f(\underbrace{x+iy}_z) &= 3x + (e^{2x} - e^{-2x}) \cos(2y) + i3y + i(e^{2x} + e^{-2x}) \sin(2y) \\
 &= 3z + e^{2x} \underbrace{(\cos(2y) + i \sin(2y))}_{e^{i2y}} - e^{-2x} \underbrace{(\cos(2y) - i \sin(2y))}_{e^{-i2y}} \\
 &= 3z + e^{2x} e^{i2y} - e^{-2x} e^{-i2y} = 3z + e^{2z} - e^{-2z}
 \end{aligned}$$

A11 f wie A8 ($u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 2x stetig diff'bar)

Zeige: f' holomorph

Theorem 12. u, v stetig diff'bar und erfüllen CRDGLn

$\Rightarrow f = u + iv$ holomorph

$$f'(z) \stackrel{\text{CR}}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(z)}_{u_x + i v_x} = \underbrace{-i \frac{\partial f}{\partial y}(z)}_{-i v_y + u_y}$$

$$\Rightarrow u_x + i v_x = v_y - i u_y \quad \rightarrow \quad u_x = v_y \quad \wedge \quad v_x = -u_y$$

$$\stackrel{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} \quad u_{xx} = v_{xy} \quad \wedge \quad v_{xx} = -u_{xy}$$

$$\text{da: } f' = u_x + i v_x \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = v_{xy} \quad \wedge \quad u_{xy} = -v_{xx}$$

$\Rightarrow f'$ erfüllt die CRDGLn u_x, v_x stetig
diff'bar

$\stackrel{12}{\Rightarrow} f'$ holomorph