16. APR.

Systheo 1 GÜ 1

Laplace Transformation

$$X(s) = \mathcal{L}_1\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

→ einseitige Laplace Trafo

$$X(s) = \mathcal{L}_2\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

→ zweiseitige Laplace Trafo (GGET 4)

Sprungfunktion

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

kausale Signale, d.h. $f(t) = 0;\ t < 0$

$$f(t) = \varepsilon(t) \cdot x(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

d.h. kausale Signale darstellbar durch Multiplikation mit $\varepsilon(t)$.

Laplace-Trafo möglich mit Hilfe

1.) des Integrals $X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st}\, dt$
2.) Sätze der Laplace Trafo
3.) Tabelle S. 209

$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X(s)$

Rücktransformation in Zeitbereich erfordert oft Partialbruchzerlegung und ~~geht~~ geschieht mit Hilfe der Tabellen oder Sätze der Laplace-Trafo.

Beispiel:

$$\dot{f}(t) + \lambda f(t) = \varepsilon(t)$$

$$f(t) = ?$$

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

$$\dot{f}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s \cdot F(s) - f(t=0)$$ (Differentiationssatz)

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty \varepsilon(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{s}}}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

$$\dot{f}(t) + \lambda f(t) = \varepsilon(t)$$

$$F(s) \cdot s - f(t=0) + \lambda \cdot F(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow F(s) = \underbrace{\frac{1}{s(\lambda+s)}}_{\text{partialbruchzerlegung}} + \frac{f(t=0)}{\lambda+s}$$

$$\frac{1}{s(\lambda+s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\lambda+s} \Rightarrow A = \frac{1}{\lambda}$$

$$B = -\frac{1}{\lambda}$$

$$F(s) = \frac{1}{\lambda s} - \frac{1}{\lambda(\lambda+s)} + \frac{f(t=0)}{\lambda+s}$$

$$\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\lambda s}$$

systheo 1 GÜ 1 16. APR. 2010

$$\varepsilon(t)\, e^{-\lambda t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+\lambda}$$ Dämpfungssatz

$$\Rightarrow f(t) = \varepsilon(t)\cdot\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\varepsilon(t)\cdot e^{-\lambda t} + f(t=0)\,\varepsilon(t)\cdot e^{-\lambda t}$$

Oder Tabelle S. 209 Nr. 6

Von Interesse: Endwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$?

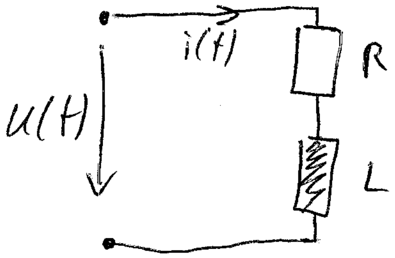
Bestimme im Zeitbereich:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{\lambda}$$ Endwert

Berechnung von $\lim_{t\to\infty} f(t)$ im Laplace-Bereich
(Endwert-Theorem der Laplace Trafo)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0} s\,F(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s(\lambda+s)} + \frac{f(t=0)}{\lambda+s}\right) \\
&= \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{\lambda+s} + \frac{s\,f(t=0)}{\lambda+s}\right) \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}
\end{aligned}$$

<u>Anwendung</u>



$$u_L(t) = L\cdot\frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = R\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = U_0\cdot\varepsilon(t) = \begin{cases} U_0 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{U_0}{s}$$

$$u(t) = R\cdot i(t) + L\cdot\frac{di(t)}{dt}$$
$\circ$

$$\frac{u_0}{s} = R\,I(s) + L\,s\,I(s) - L\,i(t=0)$$

$i(t=0) = 0$ Anfangswert

$$I(s) = \frac{u_0}{s(R + Ls)} = \frac{u_0}{L\left(\frac{R}{L} + s\right)}$$

S. 209 Nr. 6

$$\frac{a}{s\,(s+a)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \left(1 - e^{-at}\right)\varepsilon(t)$$

$$\frac{R}{L} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{L} + s\right)\cdot s} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\cdot \varepsilon(t) \quad \Big|\cdot \frac{u_0}{R}$$

$$\frac{u_0}{L} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{L} + s\right)\cdot s} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\cdot \frac{u_0}{R} \cdot \varepsilon(t)$$

$$I(s) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; i(t) = \frac{u_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\varepsilon(t)$$