Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 4
Serie 01 vom 12. April 2010

Teil A

Aufgabe A1 Zerlegen Sie die folgenden komplexen Zahlen in Real- und Imaginärteil:

$$z_1 = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}, \qquad z_2 = \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1}.$$

Aufgabe A2 Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z_2 = -1 - i.$$

Aufgabe A3 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Aufgabe A4

- Zeigen Sie, dass $\bar{z} = z^{-1}$ äquivalent ist zu $|z| = 1$.
- Zeigen Sie die Gleichheit $|z-a|^2 = |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2$.

Aufgabe A5 Welche Punkte der z-Ebene erfüllen $z = 1 + i + \lambda(5 - 2i)$ mit reellem $\lambda \geq 0$ bzw. $|(1+i)z| = 5$?

Aufgabe A6 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot z^n}{n^n}$.

Teil B

Aufgabe B1 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = 1 + i, \quad z^3 = -i, \quad z^3 = -5 - 5i.$$

Aufgabe B2 Geben Sie die Polardarstellung der folgenden komplexen Zahl an:

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

Berechnen Sie $\sqrt{z}$.

Aufgabe B3 Zeigen Sie: $|z| = 1 \Rightarrow \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$.

Aufgabe B4 Geben Sie eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ an, mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, wobei aber $(\arg(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 2\pi)$ nicht konvergiert.

Aufgabe B5 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) := \sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Aufgabe B6 Welche Punkte der z-Ebene erfüllen

a) $z = 2 - i + 5e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$,

b) $|z - 3| < 3|z + 3|$,

c) $\operatorname{Im}(z) \geq -2$,

d) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$?

Aufgabe B7 Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^{2n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cdot z^{2n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

HM4 GÜ1

1.) Zerlege die folgenden komplexen Zahlen in Re- und Im-Teil.

$$z_1 = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} \qquad \left(|z|^2 = z \cdot \overline{z} \right)$$

$$= \frac{(5+5i)(3+4i)}{|3-4i|^2} + \frac{20(4-3i)}{|4+3i|^2}$$

$$= \frac{5(1+i)(3+4i)}{9+16} + \frac{20(4-3i)}{16+9}$$

$$= \frac{1}{5}(3+4i+3i-4) + \frac{4}{5}(4-3i)$$

$$= 3 - i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{z_1\} = 3, \quad \operatorname{Im}\{z_1\} = -1$$

$$z_2 = \frac{3 \cdot i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$$

$$= \frac{(3 \cdot i^2 \cdot i^{4 \cdot 7} - i^3 \cdot i^{4 \cdot 4})(2+i)}{|2i-1|^2}$$

$$= \frac{(3(-1)(1) - (-i) \cdot 1)(2+i)}{5}$$

$$= \frac{(-3+i)(2+i)}{5} = -1 - i$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{z_2\} = -1, \quad \operatorname{Im}\{z_2\} = -1$$

2.) Gebe die Polardarstellung der folgenden Zahlen an

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -1 - i$$

zu z_1: $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

arg-Funktion (liefert $\varphi \in [0, 2\pi)$)

$(z = x + iy)$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi , & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} , & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} , & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

$$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}}$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z_2) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}}}$$

<u>3.)</u> Bestimme alle Nullstellen von
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^z = e^{-z} \quad | \cdot e^z \quad (\text{da } e^z \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C})$$

$$\Leftrightarrow e^{2z} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2z = 2k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = k\pi i, \; k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow z \in \{k\pi i, k \in \mathbb{Z}\}$ sind alle Nullstellen von f.

HM4 GÜ 1

4.) a.) zeige: $\overline{z} = z^{-1} \Leftrightarrow |z| = 1$

dazu: $\overline{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$

$\Leftrightarrow \overline{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$ $\square$

b.) zeige: $|z-a|^2 = |z|^2 - \overline{a}z - \overline{z}a + |a|^2$

dazu: $|z-a|^2 = (z-a)\overline{(z-a)}$

$= (z-a)(\overline{z} - \overline{a})$

$= z \cdot \overline{z} - \overline{a} \cdot z - a \cdot \overline{z} + a\overline{a}$

$= |z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + |a|^2$ $\square$

5.) Welche Punkte der z-Ebene erfüllen

a.) $z = 1 + i + \lambda(5 - 2i), \quad \lambda \geq 0$

b.) $|(1+i)z| = 5$

zu a.) $z = x + iy \quad , x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x = 1 + 5 \cdot \lambda$

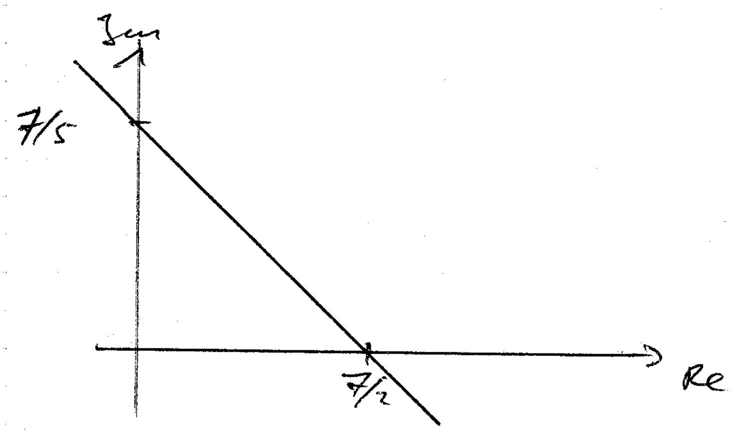
$y = 1 - 2\lambda$

$\lambda = \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-2}$

$\Rightarrow y - 1 = \frac{-2}{5}(x-1)$

$\Leftrightarrow y = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x$

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} ; z = 1+i + \lambda(5-2i), \lambda \geq 0\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{C}$.



b.) $|(1+i)z| = 5 \qquad z = x+iy$

$\Leftrightarrow |(1+i)\cdot(x+iy)| = 5$

$\Leftrightarrow |x+iy+ix-y| = 5$

$\Leftrightarrow |(x-y)+i(x+y)| = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 \cancel{-2xy} + y^2 + x^2 \cancel{+2xy} + y^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Die Menge ~~aller~~ $\{z \in \mathbb{C}; |(1+i)z| = 5\}$ ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius $\frac{5}{\sqrt{2}}$

6.) Bestimme den Konvergenzradius

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$

benutze Wurzelkriterium

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{n!}}$

$= \lim_{n\to\infty} |z|^{\frac{n!}{n}}$

$$= \begin{cases} 0 & , |z| < 1 \\ 1 & , |z| = 1 \\ \infty & , |z| > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha < 1$

$\Rightarrow$ dann konv. die Reihe absolut

$\alpha > 1$, dann divergiert die Reihe

$\alpha = 1$ keine ~~Aussage~~ Aussage!

 15. APR. 2010

$\Rightarrow$ Konvergenzradius ist $\underline{\underline{1}}$

<u>b.)</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot z^n$ mit $a_n = \frac{n!}{n^n}$

Konvergenzradius nach HM1-Skript:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n!}}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)\cancel{!}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\cancel{(n+1)}}}{\cancel{(n+1)}\, n^n}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \underline{\underline{e}}$

Quotientenkriterium:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

$\alpha < 1$, Absolute Konvergenz

$\alpha > 1$, divergent

$\alpha = 1$, ?!