$\pi = 3{,}14159\ldots$ $e = 2{,}71828\ldots$

Δ-Ungl:
$|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$
$|x|-|y| \le \underbrace{|x-y|}_{d(x,y)} \le |x|+|y|$
$|x\cdot y| = |x||y|$

Bernoulli Ungl. $\forall x \in \mathbb{R}$ $n \ge 2$ $x > -1$ $x \ne 0$
$(1+x)^n > 1 + n\cdot x$

Youngsche Ungl: $\varepsilon > 0$
$|x\cdot y| \le \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2$

Geom Mittel ≤ Arith. Mittel
$\sqrt{x\cdot y} \le \frac{x+y}{2}$

Cauchy-Schwartzsche Ungl
$\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} =$
$= \|x\| \cdot \|y\|$

Minkowski-Ungl.
$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$
$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Exponential Funktion:
$e^x \ge x+1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(1+\frac{x}{n})^n = e^x$
$|e^x - 1| \le \frac{|x|}{1-|x|}$ $|x| \le 1$
$e^x > x^n$ $x > 4n^2$ $x > y$ $e^x > e^y$

Logarithmus $\log x < \log y$ $x < y$
$\log(1+x) \le x$ $\forall x > -1$
$\log(x) < \sqrt[n]{x} < x$ | $x > (4n^2)^n$

Index-Shift: $l = k-1$ $k = l+1$
$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n}{n+l+1}$ gleiche Anzahl.

$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

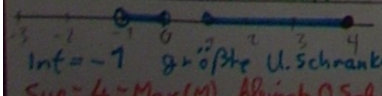
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ Gauß Σ | $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{N} y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} x_i y_k\right)$

$(K,>)$: $x < y \Rightarrow -x > -y$
$x < y \wedge u < v \Rightarrow x+u < y+v$
$x\cdot y > 0 \Rightarrow x,y < 0 \vee x,y > 0$
$x \ne 0 \Rightarrow x^2 > 0$
$x,y \ge 0 \Rightarrow x^2 \ge y^2 \Leftrightarrow x \ge y$

in $\mathbb{K}$: $-(-x) = x$ $(-x)(-y) = xy$
$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$
$\frac{x}{u}\cdot\frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}$ $\frac{x}{u} / \frac{y}{v} = \frac{xv}{uy}$ Piano Axiom
$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{vx+uy}{u\cdot v}$ $1 \in M$, $n \in M$ $\to (n+1) \in M$

$\forall \to \exists$; $\exists \to \forall$ Das hinter: wird verneint.



Inf = −1 größte U. Schranke
Sup = 4 = Max(M) kleinste O. Schr.
Min(M) existiert nicht.

Induktion nach n: $A_e(n+1) \to A_r(n+1)$
IA: A_1 ist wahr.
IV: * gelte für ein beliebiges freies $n \in \mathbb{N}$
IS: $A_e(n+1) = A_r(n+1)$ $l \to r$ umformen

Beweis durch Widerspruch $x \in \mathbb{Q}$ $x = \frac{p}{q}$ gekürzt!
Es gelte $\neg A$ $\neg A$
Indirekter Beweis: nur durch Tautologien
Bew von Tautologien: 0 addieren, $\cdot 1$ $(+x-x)$ $(\cdot x \cdot x^{-1})$
Existenz + Eindeutigkeit (Widerspr $x = \ldots$ $x = y$ $y = \ldots$)
Konj. komplex erweitern / 3. Binom
Tautologien durch Tabelle zeigen!

Körper Axiome:
A1 $x+y = y+x$ kommu M1 $x\cdot y = y\cdot x$
A2 $x+(y+z) = (x+y)+z$ Assoz M2 $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
A3 $0 \in \mathbb{K}$ $x+0 = x$ Neutra M3 $1 \in \mathbb{K}$ $x\cdot 1 = x$ $\forall x \in \mathbb{K}$
A4 $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists_1 y \in \mathbb{K}$ $x+y = 0$ M4 $\forall x \ne 0 \in \mathbb{K}\ \exists_1 y$ $x\cdot y = 1$
Inv-Element $x = -y$ Inv Element $y = x^{-1}$
AM: $x\cdot(y+z) = xy + xz$
NNE: $0 \ne 1$ Körper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ¬total angeordnet
¬Körper: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Anordnungs Axiome:
T_1 $x > 0 \vee x = 0 \vee -x > 0$
T_2 $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x+y > 0$
T_3 $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x\cdot y > 0$
O1 $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ Transitivität
O2 $x < y \vee x = y \vee y < x$ Trichotomie
O3 $x < y \Rightarrow x+z < y+z$ Monotonie Add
O4 $x < y \wedge z > 0$ $xz < yz$ Monotonie Multip.

$x \in \mathbb{K} \wedge y \in \mathbb{K} \Rightarrow (x\cdot y \in \mathbb{K} \wedge x+y \in \mathbb{K}$ heißt Körper wenn A_1-A_4 + M_1-M_4 + AM + NNE gelten

V: Vollständigkeits Axiom Infimums versi.
Ein total angeordneter Körper $(\mathbb{K},>)$ heißt vollst. wenn jede nach unten beschr. nicht leere Menge $M \subset \mathbb{K}$ eine größte untere Schranke $\inf(M) = R$ besitzt.

$d(x,y) = |x-y| \ge 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $d = 0 \Rightarrow x = y$
$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ Δ-ungl.

$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$
A^c komplement ¬nicht ∀ für alle
∪ vereinigt ∨ oder ∃ ex.
∩ geschnitten ∧ und ∃! = $\exists_1$ genau 1
$A \setminus B = A \cap B^c$ ∄ ex. kein
$\emptyset = \{\}$ $\boxed{A \Rightarrow B \quad \neg A \vee B}$ aus A folgt B
$P(A) := \{B : B \subset A\}$ alle Teilmengen
2^n bei n Elementen

$A \cap B = \emptyset$ disjunkt

1.()	4.∨
2.¬	5.⇒
3.∧	6.⇔ in Mitte

$(A^c)^c = A$ $\neg(\neg A) = (A)$
$A \cap B = B \cap A$ | $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ $A\cap B = B\cap A$ ...
$A \cup B = B \cup A$ | $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ $A\cup B = B\cup A$ ...
$A\cup(B\cap C) = A\cup B \cap A\cup C$ $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow A\vee B \wedge A\vee C$
$A\cap(B\cup C) = A\cap B \cup A\cap C$ $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow A\wedge B \vee A\wedge C$
$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ De Morgan
$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

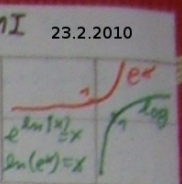
$A \vee A \Leftrightarrow A$
$A \wedge A \Leftrightarrow A$ Idempotenz

A	B	A∧B	A∨B	A⇒B	A⇔B
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$A \Rightarrow B$ $\neg A \vee B$
$A \Rightarrow B$ $\neg B \Rightarrow \neg A$ Implik. $B \vee \neg A$
$(A\subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ Trans. der Inklusion
$(A\Leftrightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$ Implikation

Potenzges.:
$x^p x^q = x^{p+q}$
$(x^p)^q = x^{pq}$
$\log(a^x) = x\cdot\log(a)$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$



Bin. Koeffizient
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$
$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \cdot (a+b)$
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$ $k = i+1$
$\binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{i=-1}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{i+1} b^{n-i}$ $i := k-1$
$0! := 1$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{0} b^{n+1}$
$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} b^{n+1}$
$k = l-1$

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ Jede konv. Folge mit GW ist Beschränkt. Cauchy F.
$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{-1}$
$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$ NF: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$, sd. $|a_n| < \varepsilon\ \forall n > N_0$
$\frac{1}{n}$; $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim = 0$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist konv. mit GWa, wenn $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ NF ist.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$; s.d. $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > N_0$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = NF \Rightarrow a = 0$
$\frac{x^n}{n!}$ NF $\frac{1}{n}$
$a_n = a^n$ geom. F. $|a| < 1$ NF $\frac{1}{n}$ $n\cdot a^n$ " NF $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Monotonie: $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ m.w. $\le$ s.m.w. m.f. Sm folgt zu
Injektiv: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
surjektiv: $\forall y \in W$ exeit. $x \in D$ $f(x) = y$ } bijektiv ↳ Umk. fkt existiert
Polynome untersch. Grades sind immer verschieden. gerade: $f(x) = f(-x)$ unger: $f(x) = -f(-x)$

Komplexer Körper: $\mathbb{C} := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ $z = (x,y)$
$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ $0 := (0,0)$
$(x_1,y_1) \odot (x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
ad A4 $z = (x,y)$ $-z = (-x,-y)$
$z \oplus (-z) = (0,0)$
ad M4: $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} / \frac{-y}{x^2+y^2}$ | $z\cdot z^{-1} = (1,0) = e$

M n.o.b. $\exists S \in \mathbb{K}: x \le S\ \forall x \in M$ $S \in M$: Max $M = S$
M nu B $\exists R \in \mathbb{K}: R \le x\ \forall x \in M$ $R \in M$: Min $M = S$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ wegmit $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$ a^2 ab b^2

$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ $\log(xy) = \log x + \log y$ $\log x^n = n\log x$
$\log\left(\frac{x}{n}\right) = \log x - \log y$

Horner Schema / Darstellung $4x^3 - x^2 + 2x - 10$
$((4x-1)x+2)x - 10$

NF: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sind NF: $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_1^{\infty} = NF$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
↳ beschränkt $\{\sqrt{\{a_n\}_1^{\infty}}\}_1^{\infty} = NF$ $\{a_n \cdot c_n\}_1^{\infty} \Rightarrow c_n$ beschr.
Keine NF:
$\exists \varepsilon > 0\ \forall N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $|a_n| \ge \varepsilon$ z.B. $a_n = 1 + (-1)^n$

Cauchy Folge: Δ-ungl. + Abschätzen $n > \frac{3}{2}$ → max{Bed, log} + 1 = n
z.B. $n > \frac{10}{2}$ Lut. 7 Kiko
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m > N_0$

δ-ε Sei $\varepsilon > 0 \wedge x \in D$ wähle δ: min{Bed, log}
dann gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D$ $|x - x_0| < \delta$:
≤ al-schätzen $x < \delta + x_0$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
$x > x_0 - \delta$
glm. stetig: ↳ umformen zu δ-(...
$\delta(\varepsilon)$ ohne x_0 z.B. $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$ ↳ Rest berechnen

Vergleichskriterium: $|b_n| \le |a_n|$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Sandwichlemma: $c_n \le a_n \le b_n$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \to \lim_{n\to\infty} a_n = a$
$\forall n > N_0$
Wurzelkrit: $\{\sqrt[n]{|b_n|}\}$; $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \to \Sigma$ konv. (Folge!)
Quotientenkrit: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \to \Sigma$ konv.
HP für $n \to \infty$ was ∞ geht Gegenfall wird.
Monotonie lemma $b_n \le b_n \le c_n$ $b_n = \sup\{\text{am } M \ge n\}$
Divergenz: $\forall M > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > M$ $\forall n > N_0$
Vollständigkeit: ① berechne ② Sup und ③ klein Inf

Komplex: $z = x + iy$ $w = u + iv$ $i^2 = -1$ $|e^{i\varphi}| = 1$

$d(z,w) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = |z-w|$ $\quad z = x + iy$ (kart.) $\quad \frac{1}{i} = -i$

$d(z,0) = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ $\quad = r \cdot e^{i\varphi}$ (Euler) $\quad e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$

$= r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ + region

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$ $\quad \mathrm{Im}(z - \bar{z}) = 0$ $\quad \mathrm{Re}(z) = x = r\cos\varphi$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $\quad z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$ $\quad \mathrm{Im}(z) = y = r \sin\varphi$

$\sqrt[n]{z} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ $\quad r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = d(z,0)$

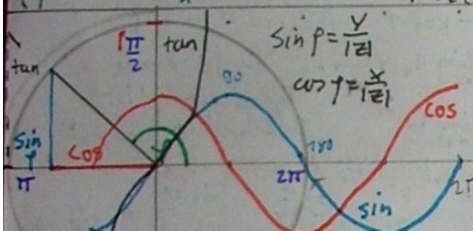
$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ $\quad \bar{z} = x - iy$ (konj. kompl.)

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_1 + x_2y_2)$ $\quad \sqrt{-x} = i\sqrt{x}$ $x > 0$

$= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$

$= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} r_1r_2$ $\quad = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$ $\quad c = \pi \mid c = 0$ $\quad c = \pi \mid c = 2\pi$ $\quad = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$



$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$ $\quad \cos\varphi = \frac{x}{|z|}$

$e^{i0} = 1$

$e^{\pm i\pi} = -1$

$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$

$e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm i)$

$e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

$e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$

$\varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad i^{4n} = 1$ $\quad i^{4n+1} = i$ $\quad i^{4n+2} = -1$ $\quad i^{4n+3} = -i$

$a = x + iy$ $\quad |a| = x^2 - y^2$

φ	$0°$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.A.	0	n.A.	0
exp	1	$\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 \pm i)$	$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$	i	-1	$-i$	1

$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$ $\quad e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$

$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$ $\quad$ Paarweise NST. $a+ib$ $a-ib$

$z_k = x_k + iy_k = r_k(\cos(\varphi_k) + i\sin(\varphi_k)) = r_k e^{i\varphi_k}$ $\quad \varphi_k = \varphi_k + 2\pi k$

$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}(\alpha + 2k\pi)i}$ $\quad |z| = |a|^{\frac{1}{n}}$ $\quad \varphi = \frac{1}{n}(\alpha + 2k\omega)$

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = |e^{ix}| = 1$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ $\quad |z+w| \le |z| + |w|$ $\quad |z \cdot \bar{z}| = |z|^2$

$e^z = e^w \Rightarrow z = w + 2\pi k i$ $\quad \{e^{i\varphi}\} = \{|z| = 1\}$ Einheitskreis

$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \ldots$

$f(ax_1 + bx_2, x_3) = af(x_1, x_3) + bf(x_2, x_3)$

$f(x_1, ax_2 + bx_3) = af(x_1, x_2) + bf(x_1, x_3)$

$\langle x, y \rangle = x_1y_1 \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Skalarprod

$+ \begin{cases} G \times G \to G \\ (a,b) \to a+b \end{cases}$ kommutative Gruppe $(G,+)$ $\quad \langle x, y \rangle = 0$

A_1 $a+b = b+a$ bis $\to A4$ $\quad$ orthogonal $x \perp y$

$+ \begin{cases} V \times V \to V \\ (\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} + \vec{v} \end{cases}$ Vektoraddition $\quad \|\cdot\|$ Norm $\sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\cdot_s \begin{cases} \mathbb{K} \times V \to V \\ (\alpha, \vec{u}) \to \alpha \cdot_s \vec{u} \end{cases}$ skalare Multiplikation

V_1 $(V, +_V)$ kommut. Gr. $\quad e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(j = 2)$ $\quad d(x,y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ Abstand

V2 $\alpha \cdot_s (\vec{u} +_V \vec{v}) = (\alpha \cdot_s \vec{u}) +_V (\alpha \cdot_s \vec{v})$

V3 $(\alpha + \beta) \cdot_s \vec{u} = (\alpha_s \cdot \vec{u}) +_V (\beta_s \vec{u})$

V4 $1 \cdot_s \vec{u} = \vec{u}$ $\quad N: \vec{0}$

Teilraum oder lin. Unterraum

Teilmenge $U \neq \emptyset$ von V

U1 $\vec{0} \in U$

U2 $\vec{a}, \vec{b} \in U \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in U$

U3 $\vec{a} \in U \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in U \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

Dreiecksgl. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

CSU $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$

Δ-GL $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$\|$ — $\|$ — $= 4\langle x, y \rangle$

span$\{a_1 \ldots a_n\}$ Erzeugenden System.

lin abh. $\alpha_1 a_1 \ldots = 0 \to$ lin Abh

$a_1 = a_2 \ldots = 0 \to$ unabh!

$\vec{v} = 0 \to \vec{v}$ ist lin Abh. $\quad n+1$ in $\mathbb{R}^n$ lin abh!

$u \times v$ $\quad (u+w) \times v = u \times v + w \times v$

$\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda u \times v = \lambda(u \times v)$

$\|\lambda \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\alpha$ = Fläche

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} =: \boxed{\sin x}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} =: \boxed{\cos x}$

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\quad \lim \frac{\sin x}{x} = 1$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$

$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $\quad q \neq 1$

geom. Summe $q = 1$: $= n+1$

Limes Superior: Größter HP

Inferior = kleinster HP

Bolzano Weierstraß eine beschr. Folge in $\mathbb{R}$ hat min 1 HP $\quad$ ↳ beschr. $[a,b]$ nimmt Inf. und Sup. an.

ZWS $f(a) \cdot f(b) < 0 \to$ min 1 NST

Cauchy-Krit für Reihen

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \left|\sum_{l=m+1}^{n} a_l\right| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_0$

falls $\sum$ konv. $\to a_n \to NF$

$\not\Leftarrow$ nicht umkehrbar.

Leibniz-Krit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ m.f.; $a_n > 0$, $\lim a_n = 0$

↳ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konv.

In konv. Reihe darf man ()-Setzen

Vergleichskrit

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n / \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\quad |a_n| \le b_n$

↳ konv → $\sum a_n$ abs. konv. Majorante

↳ div → $\sum b_n$ div Minorante

$\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$ $\lim < 1$ abs konv. $\quad \lim > 1$ divergent $\quad$ oder $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ $\quad \liminf > 1$

$\sqrt[n]{a_n}$ < 1 abs konv. $\quad > 1$ divergent $\quad \limsup < 1$ $\quad \liminf > 1$

Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad R := \sup\{|y| : y \in K\}$ heißt konv. Radius

$R = 0 \to$ konv $x = 0$

$R > 0 \to |x| < R$ abs konv. $\quad$ Grenzen einsetzen!

Quotienten / Wurzel Krit. $\quad R = \frac{1}{A}$ $\quad (\lim \ldots = A)$

$\lim\sup$

$0 = \frac{1}{\infty}$ $\quad \infty = \frac{1}{0}$

$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$

$r = p + \alpha v$

$\alpha = \frac{\langle q - p, v \rangle}{\|v\|^2}$ $\quad (\langle \vec{q} - r, v \rangle = 0)$

$\mathrm{dist}(Q, g) = \|q - r\|$

$= \left\|q - p + \frac{\langle p - q, v \rangle}{\|v\|^2} v\right\|$

$p = 0$ $\quad r = \alpha \cdot \vec{v} = \frac{\langle q, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v =: \mathrm{Proj}_v(\vec{q})$

Proj. von q auf span$\{v\}$ $\quad q - r \perp v$

$\cos(\phi) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ $\quad 0 \le \phi \le \pi$

$K_0 = \{u \in \mathbb{R}^k : \|\vec{u} - p\| = \delta\}$ Aufpunkt

Hyperebene: $k-1$ Vektoren $\quad \beta := \langle w, n \rangle$ $\quad \beta \ge 0$

HNF: $H = \{u : \langle u, n \rangle = \beta\}$ $\quad$ Einheitsnormalen $\quad \|n\| = 1$

$g \cap H$ $\quad \alpha^* = \frac{\beta - \langle w, n \rangle}{\langle v, n \rangle}$ $\quad G = w + \alpha^* v$ Gerade

1. $\langle v, n \rangle \neq 0$ ↗ 2. $v, n = 0$ ↘ vereinfacht

$\langle w, n \rangle = \beta$ ← oder gleich

$n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$

f ist inj $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ $\quad (g \circ f)(x) = x \ \forall x \in A$

f ist surj $\Leftrightarrow \exists g: B \to A$ $\quad (f \circ g)(y) = y \ \forall y \in B$

Zinsrechnung:

$E_k = \lim_{n \to \infty} K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^{nk}$

$= K_0 \cdot e^{\left(\frac{pk}{100}\right)} = K_0 \cdot e^{\left(\frac{p}{100}\right)k}$

$E_k = K_0\left(\frac{p}{100n}\right)^{nk}$ Zollerzgn.

$\sum \frac{1}{n}$ harmon. Reihe nicht konverg.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konv + $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ist konv

↳ absolut konv!

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist bed. konv!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad \alpha > 1$ konv $\quad \alpha \le 1$ div $\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ div

Cauchyscher Verdicht. Satz

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\quad a_n$ mon. fallend $a_n > 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{(2^k)}$ konv

Cauchy-Produkt:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (R) $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ (S)

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ T

$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ $\quad$ T = min(R, S)

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\quad R = \infty$ $\quad e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

$Q = \vec{p} + (\beta - \langle p, n \rangle) n$

$\mathrm{dist}(P, H) = \|P - q\| = |\beta - \langle p, n \rangle|$

$\sphericalangle H, g$ $\quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$ $\quad \cos\delta = \frac{|\langle n, v \rangle|}{\|n\| \|v\|}$

$H_1 \cap H_2$: $\quad n_3 = n_1 \times n_2$

Punkt durch: Gerade in $H_1 \cap H_2$

$v_1 \perp n_2 \cap G$

Graßmann:

$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle u, v \rangle \cdot w$

Jacobi Identität:

$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$

$\mathrm{Vol}\,P = |\mathrm{Spat}(a,b,c)| = \langle a, b \times c \rangle$

ONS OrthoNormal System

$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $\quad \delta_{ij}$ Kronecker Symbol

Basen in $\mathbb{R}^n$ n Vektoren $\quad V = \mathbb{C}^n$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad \dim V = n$

$V = P_n$ $\quad \dim V = n+1$

1 St β ONS in V → B ist Basis V

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to$ ONB $\quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle v_i$

ONS + Basis von

Gram Schmidt

$c_1 \ldots c_n$ ONS gesucht $\quad \langle c_i, c_j \rangle = 0 \ i \neq j$ $\quad \|c_i\| = 1$

$b_1 \ldots b_n$ lin unabh. $\quad c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ $\quad \neq \vec{0}$

$d_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle b_k, c_i \rangle c_i$ $\quad c_k = \frac{d_k}{\|d_k\|}$

$c_1 \ldots c_k$ = ONB

$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ falls $K = \mathbb{C}$

$\lim \frac{\sin x}{x} = 1$

$e^x = \frac{x^k}{k!}$

$\sum \frac{1}{q^n}$ $\quad |q| < 1$ $\quad = \frac{1}{1-q}$