Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921

Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 106
D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik I (Bachelor / Vordiplom) WS 2009/2010

23.02.2010

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$

Aufgabe 2 [7 Punkte]

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit den Eigenschaften

(i) $\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \geq n_0 \colon \left|a_n - a_{n+1}\right| < \varepsilon$,

(ii) $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert a.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} := \sqrt{3a_n + 4} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

für alle reellen Startwerte $a_1 \geq 0$ konvergent ist, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 [9 Punkte]

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz bzw. Divergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}. \qquad \text{(4 Punkte)}$$

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad \text{(5 Punkte)}$$

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{1}{x(x-1)}$ auf dem Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ stetig ist, indem Sie zu jedem $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass für alle $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ gilt: $\left|x - x_0\right| < \delta \implies \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Bitte wenden!!

Aufgabe 6

[10 Punkte]

(a) Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 54 \\ 74 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

(b) Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome $\mathcal{P} := \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist Polynom}\}$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass

$$p_1(x) = x - 1\,,\ p_2(x) = x^3 + 5x \quad \text{und} \quad p_3(x) = x^3 + 2$$

(6 Punkte)

linear unabhängig sind.